

薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ変形解析

ANALYSIS OF LARGE TORSION OF A THIN WALLED CURVED
BEAM BASED ON DISPLACEMENT FIELD THEORY

渡 辺 昇*・稼 農 知 徳**・薄 木 征 三***

By Noboru WATANABE, Tomonori KANO and Seizo USUKI

1. 序 論

薄肉曲線桁は曲線橋の単一主桁として、あるいは曲線格子桁橋の主桁として重要な構造形式である。特に基本的な構造単位として曲線I型断面桁を考えると、強軸（水平軸）まわりの曲げ剛性に比べてねじり剛性は一般に極めて小さい。するとたとえば鉛直等分布あるいは集中荷重が上フランジ中央に作用するような場合、鉛直変位や水平変位よりもむしろ断面の大きなねじれ変形が卓越することが想定されよう。このような場合にはI型桁の変形挙動は幾何学的非線形問題として扱われねばならないと考えられる。

薄肉曲線桁の微小変位理論に関する基礎的研究は、Vlasov¹⁾ や Dabrowski²⁾ に始まって以来、内外に多くの研究があり^{3)~6)} 完成したともいえるが、西野・深沢⁷⁾ は円筒座標でのひずみ-変位関係式を基礎として、薄肉ばり理論の仮定を整理することによって変位場が導かれ、支配方程式は仮想仕事の原理から簡単に導かれることを示した。特に、従来統一性に欠けていた開き断面と閉じ断面のねじれを系統的に整理した功績は大きい。

有限変位の問題では現在まで上述の微小変位理論に匹敵する理論は完成していない。Schroeder⁸⁾ は薄肉空間曲線部材の変位場をベクトル・テンソル解析によって求めているが、断面が平面を保持しながら三次元的に回転した後にそり変位を加えており、しかもねじれ率は微小変位理論と同じものを用いている点で理論的に問題がある。また断面のねじれ角を φ とすると、 $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ を φ の3次までのテイラー展開を用いており、固有値問題では差し支えないと思われるものの、大きなねじれ変形を扱うのは限界があると考えられる。

遠田⁹⁾ は薄肉開断面の2次の応力問題を伝達マトリックス法で解析している。ここで用いている変位場は後に薄木¹⁰⁾ が曲線部材に対してひずみ-変位関係式から導いた変位場でねじれ率を線形化した場合と考えられるが、増分理論において初期たわみの項を無視した線形化有限変位理論であって、大きな変位と変形の解析には限度がある。薄木が導いた変位場は直線部材に対する仮定¹¹⁾と同様に、ひずみ-変位関係式において部材軸方向変位の微係数の2次項を無視して得られた変位場であるが、I型桁の横倒れ座屈のように断面のねじれ変形が卓越する現象には十分な精度を持っている。しかしながら、次いで著者ら¹²⁾ が曲線I型桁の有限ねじれを剛性法で解析したときには、変位場と応力場に含まれる $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ を文献8)と同じく3次近似したために座屈荷重以上の解析は無理であった。

一方、西田¹³⁾ は著者らと同様の仮定とひずみ-変位関係式における近似とともに、母線ごとの曲率半径の差異を無視した場合の変位場をもとに還元法を用いてI型桁の有限ねじれを解析した。このとき上述のテイラー展開は用いていないものの、境界条件が微小変位理論と同一になっているのは不十分と思われる。倉方¹⁴⁾、依田¹⁵⁾、中井¹⁶⁾らの研究はテンソル解析を用いた微分幾何学的方法で、曲げとねじれに対して同程度の精度を持つと考えられる変位場を提案しているが、計算例も少なく明確に整理されていないように思われる。

数値計算法上の観点からみると、ラグランジ座標系でのひずみ-変位関係から決定された変位場を基礎とすると、ひずみ-変位関係式に導入される近似の精度によって制限される変位と変形の大きさ以内であれば、何らの座標変換を必要としないはずである。直線要素を用いた剛性法でアーチの横倒れ座屈解析を行った（この場合は曲線桁の解析が含まれる）前田・林¹⁷⁾の計算法は、ラグランジ座標系でのひずみ-変位関係式を用いながら、変位した後の要素に座標変換を行うというEuler的手法

* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 秋田大学教授 鉱山学部土木工学科

*** 正会員 秋田大学助教授 鉱山学部土木工学科

を混用した矛盾がある．すなわち増分形剛性方程式を導く際に，各増分段階の出発点についてはそれまでの部材要素の変形に基づいて，空間固定座標（Euler 座標）に対する座標変換行列を作製し，一増分間については物質固定座標（Lagrange 座標）でのひずみ-変位関係を用いるという矛盾である．

本論文では，I 型桁の横倒れ座屈のように大きなねじれ変形を扱うのに妥当と考えられる文献 10) で示された変位場を基礎として，先に著者らが報告した有限ねじれ解析を一步進めた結果を報告するものである．

初めに変位場と応力場を構成する部材軸線の回転成分から成る各非線形項のオーダーを吟味し，どの項が有意であり，どの項が無視できるかを明らかにする．同時に母線ごとの曲率半径の差異を無視したり，考慮したりすることが変位場と応力場の表示にどのようにかかわりあうかを議論する．次いで仮想仕事の原理から $\sin \varphi, \cos \varphi$ をテイラー近似しない場合の剛性方程式を導き，座屈荷重以上の荷重に対しても若干の工夫により安定な解が得られることを I 型桁の解析を通して示す．

最後に単径間 I 型桁に数種の荷重を作用させたときのねじれ変形解析を行い，断面内での直応力分布性状についての考察を行った．

2. 変位場とひずみの評価

(1) 変位場

棒理論の仮定から得られる変位場は¹⁰⁾，

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi) \\ v &= v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \\ w &= w_0 - y(\phi_x \cos \varphi - \phi_y \sin \varphi) \\ &\quad - x(\phi_y \cos \varphi + \phi_x \sin \varphi) - \omega \psi_z'' \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここで，座標系 (x, y, z) は 図-1 に示す直交座標であり， u_0, v_0, w_0 は座標原点 O の x, y, z 方向への変位である． φ は断面のねじれ角である．また，上式で

$$\phi_x = v_0' + \frac{w_0}{R}, \phi_y = u_0' \dots\dots (2)$$

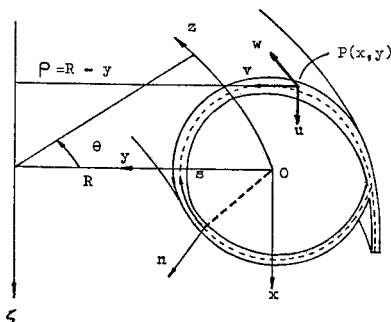


図-1

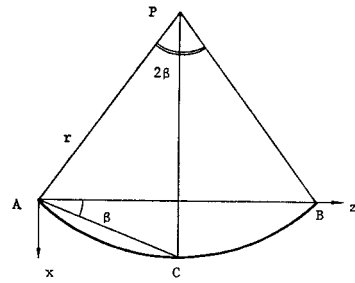


図-2

$$\psi_z'' = \varphi' - \frac{1}{R} \phi_y \cos \varphi + \frac{1}{R} \phi_x \sin \varphi \dots\dots (3)$$

とおいてある．上記号 ' は $z = R \cdot \theta$ に関する微分を示し， ϕ_x, ϕ_y は微小変位理論での x, y 軸まわりの接線回転角である．

図-2 は z 軸（桁軸線）を，桁の端点 A, B を結ぶ弦と x 軸でつくられる平面へ投影した状態を示す．いま桁が円弧 \widehat{ACB} のようにたわんだとして

$$\angle CAB = \beta \dots\dots (4)$$

とおくと， β はたわみ曲線 \widehat{AC} のたわみ角の平均である．変位場の式 (1) は曲げ変位に対しては微小変位理論と同程度であるから，

$$\phi_y = u_0' = \sin \beta \approx \beta \dots\dots (5)$$

が成り立つ程度までしか扱えない．有効数字 3 桁程度まで考えると，

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 10^\circ = 0.175 \approx \pi/18 \\ \sin \beta &= \sin 10^\circ \approx 0.176 \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

であるから， ϕ_y は 10° 程度まで追跡できよう．ねじれ角 φ についてはその大きさに制限はないが，

$$0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2} \dots\dots (7)$$

の範囲を扱うとしよう．両端単純支持の曲線桁を想定し，スパン中央でのねじれ角が $\pi/2$ であるとするとき，ねじれ率の平均値は，

$$\varphi' \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{L} \dots\dots (8)$$

また，桁断面内の任意点の座標 x, y の最大値は，

$$x \approx y \approx \frac{L}{10}, \frac{x}{R} \approx \frac{y}{R} \approx \frac{1}{10} \dots\dots (9)$$

の程度と仮定する．

そり関数 ω は，たとえば I 型断面では，フランジ幅を b ，桁高を h とすると最大値はおおよそ $\pm bh/4$ である．すなわち，

$$\omega \approx x^2 \approx y^2 \dots\dots (10)$$

たわみ角 ϕ_x も ϕ_y と同程度まで追跡するとすれば，式 (1) の w の非線形項の大きさは式 (6)~(9) より，

$$y \phi_x \cos \varphi \approx y \phi_y \sin \varphi \approx \frac{\pi}{18} y \dots\dots (11)$$

$$\omega\varphi' \approx y^2\varphi' \approx \frac{\pi}{10}y \dots\dots\dots(12)$$

$$\frac{\omega}{R}\phi_x \sin\varphi \approx \frac{\omega}{R}\phi_y \cos\varphi \approx \frac{\pi}{180}y \dots\dots\dots(13)$$

式(10)~(13)では y と x , ϕ_x と ϕ_y を入れ換えても同じことである。

式(13)よりねじれ率 ψ_z^n の非線形項は $\omega\varphi'$ の10%程度であり, しかも, $x/R, y/R$ に比して小さくなる。通常用いられるI型桁では,

$$\frac{x}{R} \ll \frac{1}{10}, \quad \frac{y}{R} \ll \frac{1}{10} \dots\dots\dots(14)$$

と見なせるから, この場合は線形化したねじれ率

$$\psi_z^n \approx \varphi' - \frac{\phi_y}{R} = \psi_z \dots\dots\dots(15)$$

を用いることができる注1)。

(2) ひずみ

薄肉曲線部材の非零のひずみ成分は2個であり, そのうち直ひずみは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = & \frac{R}{\rho} \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^2} \frac{R^2}{\rho^{*2}} \\ & \times \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{w_0}{R} m \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{w_0}{R} l \right)^2 \right\} \dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここで, ρ と ρ^* はそれぞれ断面内の任意点および薄肉中心線上の点を通る母線の曲率半径であり, l, m は薄肉中心線の接線の方向余弦である。 ξ, η は任意点の s, n 方向(図-1)への変位であって, u, v との関係は

$$\xi = lu + mv, \quad \eta = mu - lv \dots\dots\dots(17)$$

である。式(16)では変位 w の微係数の2次の項を無視し, かつそのほかの2次の項で,

$$w \approx w_0 \dots\dots\dots(18)$$

と近似している。

式(1)を式(16)の ε_θ に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = & \frac{R}{\rho} \left\{ \varepsilon_z - y \left(\phi_x' \cos\varphi - \phi_x\varphi' \sin\varphi \right. \right. \\ & \left. \left. - \phi_y' \sin\varphi - \phi_y\varphi' \cos\varphi - \frac{1-\cos\varphi}{R} \right) \right. \\ & \left. - x \left(\phi_y' \cos\varphi - \phi_y\varphi' \sin\varphi + \phi_x' \sin\varphi \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi_x\varphi' \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{R} \right) - \omega\varphi^n \right\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^2} \{ (\phi_y - x\varphi' \sin\varphi - y\varphi' \cos\varphi)^2 \\ & + (\phi_x + x\varphi' \cos\varphi - y\varphi' \sin\varphi)^2 \} \dots\dots(19) \end{aligned}$$

薄肉中心線に沿うせん断ひずみは変位場を導く過程で得られ

$$\tau_s = \theta\psi_z^n \dots\dots\dots(20)$$

ここで, θ は (s, n) の関数であって基本的には微小変位理論と同じものである。なお, 式(19)で $\omega\varphi^n$ は ψ_z^n の z に関する微分であり,

$$\begin{aligned} \vartheta\omega^n = & \varphi'' - (\phi_y' \cos\varphi - \phi_y\varphi' \sin\varphi + \phi_x' \sin\varphi \\ & + \phi_x\varphi' \cos\varphi)/R \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

図-1 から

$$R - y = \rho \dots\dots\dots(22)$$

の関係を用いると

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \frac{R}{\rho} + \frac{y}{\rho} + \left(\frac{y}{\rho} \right)^2 \dots\dots\dots(23)$$

を得る。 $y/\rho \approx 1/10$ では右辺第3項を無視できるから

$$\frac{R^2}{\rho^2} \approx \frac{R}{\rho} + \frac{y}{\rho} \dots\dots\dots(24)$$

これを ε_θ の式(19)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = & \frac{R}{\rho} \left[\varepsilon_z + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{R} \right) \{ \phi_x^2 + \phi_y^2 + (x^2 + y^2)\varphi'^2 \} \right. \\ & \left. - x \left(\phi_y' \cos\varphi + \phi_n' \sin\varphi + \frac{\sin\varphi}{R} \right) \right. \\ & \left. - y \left(\phi_x' \cos\varphi - \phi_y' \sin\varphi - \frac{1-\cos\varphi}{R} \right) \right. \\ & \left. - \omega\vartheta\omega^n + \frac{xy}{R} (\phi_n\varphi' \cos\varphi - \phi_y\varphi' \sin\varphi) \right. \\ & \left. + \frac{y^2}{R} (-\phi_x\varphi' \sin\varphi - \phi_y\varphi' \cos\varphi) \right] \dots\dots(25) \end{aligned}$$

図-2でたわみ曲線 \widehat{ACB} の曲率 (y 軸まわり) を $1/r$ としよう。幾何学的関係と, 式(5), (6)より $\angle CAB \approx \pi/18$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \angle APC = 2\angle CAB = \pi/9 \\ r \cdot \angle APB = L/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

よって曲率 $1/r$ の大きさは

$$\phi_y' \approx \frac{1}{r} = \frac{2\angle APB}{L} = \frac{2\pi}{9L} \dots\dots\dots(27)$$

の程度である。 x 軸まわりの曲率 ϕ_x' も同程度まで追跡するとしよう。すると ε_θ における各非線形項のオーダーは次のようになる。

式(5), (6)より

$$\phi_x^2 \approx \phi_y^2 \approx \frac{\pi^2}{324} \dots\dots\dots(28)$$

式(7), (8)より

$$(x\varphi')^2 \approx (y\varphi')^2 \approx \frac{\pi^2}{100} \dots\dots\dots(29)$$

式(28), (29)と $y/R \approx 1/10$ より

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{R} \phi_x^2 \approx \frac{y}{R} \phi_y^2 \approx \frac{\pi^2}{3240} \\ \frac{y}{R} (x\varphi')^2 \approx \frac{y}{R} (y\varphi')^2 \approx \frac{\pi^2}{1000} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

式(8)と(27)より

$$y\phi_x' \cos\varphi \approx y\phi_y' \sin\varphi \approx \frac{\pi}{45} \approx \frac{\pi^2}{141} \dots\dots\dots(31)$$

曲げねじれを表わす $\omega\vartheta\omega^n$ の各項は式(9), (21)より

注1) そり関数 ω にも R/ρ や ρ/R が係数として含まれるが, ここでの議論と同様の論法で式(14)が成り立つI型桁では $\rho \approx R$ とおける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{R} \phi_y \phi' \sin \varphi &\approx \frac{\omega}{R} \phi_x \phi' \cos \varphi \\ &\approx \frac{y}{R} \phi_x (y \phi') \cos \varphi \approx \frac{\pi^2}{1800} \\ \frac{\omega}{R} \phi_x' \sin \varphi &\approx \frac{\omega}{R} \phi_y' \cos \varphi \\ &\approx \frac{y}{R} (y \phi_y') \cos \varphi \approx \frac{\pi}{450} \approx \frac{\pi^2}{1414} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32 \cdot a, b)$$

また式 (25) で xy/R や y^2/R を係数とする項は $\omega \approx xy \approx y^2$ であるから式 (32・a) と同程度の大きさである。

式 (32) より曲げねじれ率の中の非線形項は、 ϕ_x^2 や ϕ_y^2 の大きさの $1/5 \sim 1/6$ であることがわかり、かならずしも無視できない。ただこれらの非線形項および式 (25) でアーダーラインを引いた項は y/R または x/R に比例しているから、I 型桁では式 (14) によってこれらの高次項は無視できよう。この場合は

$$\vartheta_\omega^n \approx \varphi^n - \frac{\phi_y'}{R} = \vartheta_\omega \dots\dots\dots(33)$$

と線形近似できよう。このことはしたがって $y/R \ll 1$ と見なしたことと同義であるから上式の近似と同時に

$$\frac{R}{\rho} \approx 1 \dots\dots\dots(34)$$

と近似したことを意味する注2)。

せん断ひずみの式 (20) のねじれ率 ψ_z^n は変位場で述べたように I 型桁については式 (33) と同じ理由で $\psi_z^n \approx \psi_z$ (式 (15)) と線形近似できる。

結局母線ごとの曲率半径の違いを式 (34) のように無視することはねじれ率や曲げねじれ率を線形近似することと同義であることが定量的に裏づけられたことになろう。この意味において遠田⁹⁾ と西田¹³⁾ が基礎式とした変位場は妥当であると言えよう。

3. 2 軸対称 I 型断面の場合の増分理論

(1) 仮想仕事の原理

フランジ面が部材軸線の曲率面に平行な I 型断面ばりでは前節で述べたように変位場として式 (1) でねじれ率を線形化して次式を採用できる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi) \\ v &= v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \\ w &= w_0 - y(\phi_x \cos \varphi - \phi_y \sin \varphi) \\ &\quad - x(\phi_y \cos \varphi + \phi_x \sin \varphi) - \omega \psi_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

直ひずみ ε_θ の式 (25) では曲げねじれ率を線形化しアーダーラインの項を無視し、せん断ひずみ r_s も式 (20)

でねじれ率を線形化して

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \varepsilon_x + \frac{1}{2} \{ \phi_x^2 + \phi_y^2 + (x^2 + y^2) \varphi'^2 \} \\ &\quad - x \phi_y' \cos \varphi + \phi_x' \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{R} \\ &\quad - y \left(\phi_x' \cos \varphi - \phi_y' \sin \varphi - \frac{1 - \cos \varphi}{R} \right) - \omega \vartheta_\omega \\ r_s &= \theta \cdot \psi_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ある安定なつり合い状態 (Q_n 状態とする) がある、これに微小な荷重増分を与えた結果、 Q_n 状態とはわずかに異なった安定な Q_{n+1} 状態に達したとする。すると、 Q_{n+1} 状態での仮想仕事の原理は、

$$\begin{aligned} &\int_0^\theta \int_F \{ (\sigma_\theta^\circ + \Delta \sigma_\theta) \delta(\varepsilon_\theta^\circ + \Delta \varepsilon_\theta) + (\tau_s^\circ + \Delta \tau_s) \\ &\quad \times \delta(r_s^\circ + \Delta r_s) \} dF R d\theta \\ &- \int_0^\theta \int_F \{ (q_x^\circ + \Delta q_x) \delta(u^\circ + \Delta u) + (q_y^\circ + \Delta q_y) \\ &\quad \times \delta(v^\circ + \Delta v) + (q_\theta^\circ + \Delta q_\theta) \delta(w^\circ + \Delta w) \} dF R d\theta \\ &- \left[\int_F \{ (\bar{\tau}_{x\theta}^\circ + \Delta \bar{\tau}_{x\theta}) \delta(u^\circ + \Delta u) + (\bar{\tau}_{y\theta}^\circ + \Delta \bar{\tau}_{y\theta}) \right. \\ &\quad \times \delta(v^\circ + \Delta v) + (\bar{\sigma}_\theta^\circ + \Delta \bar{\sigma}_\theta) \delta(w^\circ + \Delta w) \} dF \Big]_0^\theta = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(37)$$

ここで、 $q_x^\circ, q_y^\circ, q_\theta^\circ$ は単位体積当たりの荷重、 $\bar{\tau}_{x\theta}^\circ, \bar{\tau}_{y\theta}^\circ, \bar{\sigma}_\theta^\circ$ は部材端面に作用する表面力であって記号[°]は Q_n 状態の量であることを示す。また記号 Δ は増分量を示す。

上式で Q_{n+1} 状態での変位 ($u^\circ + \Delta u$), \dots やひずみ ($\varepsilon_\theta^\circ + \Delta \varepsilon_\theta$), \dots は式 (35), (36) で線形の幾何学量 $\phi_x, \varphi, \psi_z \dots$ をそれぞれ ($\phi_x^\circ + \Delta \phi_x$), ($\varphi^\circ + \Delta \varphi$), ($\psi_z^\circ + \Delta \psi_z$), \dots と置き換えることで得られる。このとき増分量は Q_n 状態の量に比べて微小であるとして増分量の 2 次の項まで考慮する。ねじれ角については増分についてのテイラー展開

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi^\circ + \Delta \varphi) &\approx (1 - \Delta \varphi^2 / 2) \cos \varphi^\circ - \Delta \varphi \sin \varphi^\circ \\ \sin(\varphi^\circ + \Delta \varphi) &\approx (1 - \Delta \varphi^2 / 2) \sin \varphi^\circ + \Delta \varphi \cos \varphi^\circ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

を用いる。またフックの法則より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^\circ + \Delta \sigma_\theta &= E(\varepsilon_\theta^\circ + \Delta \varepsilon_\theta) \\ r_s^\circ + \Delta r_s &= G(\tau_s^\circ + \Delta \tau_s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

が成り立つ。

以上の関係を用いて式 (37) の断面内での積分を行う。このときの座標原点 0 を

$$\int_F x dF = \int_F y dF = \int_F xy dF = 0 \dots\dots\dots(40 \cdot a)$$

を満たすように選ぶ。またそり関数 ω は ω に含まれる任意定数を

$$\int_F \omega dF = 0 \dots\dots\dots(40 \cdot b)$$

注 2) 式 (20) の θ にも R/ρ が ω と同様に係数として含まれるが I 型桁では式 (34) より直桁と同じものと見なせる。

を満たすように選べる¹⁰⁾。するとこれらの関係式と断面の2軸対称性より

$$\int_F \omega x dF = \int_F \omega y dF = \int_F \omega(x^2 + y^2) dF = 0 \quad \dots\dots\dots(40 \cdot c)$$

$$\int_F x(x^2 + y^2) dF = \int_F y(x^2 + y^2) dF = 0 \quad \dots\dots\dots(40 \cdot d)$$

となる。また分布曲げおよび曲げねじれモーメント荷重は作用していないものとする。すなわち

$$\int_F q_\theta x dF = \int_F q_\theta y dF = \int_F q_\theta \omega dF = 0 \quad \dots\dots(41)$$

以上を考慮し増分記号 Δ を省略すると式 (37) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_0^\theta \{ [EJ_p(\epsilon_z + \phi_x^\circ \phi_x + \phi_y^\circ \phi_y) + EJ_k \phi'^{\circ}] \phi_0' \delta \phi' \\ & + \{ EF(\epsilon_z + \phi_x^\circ \phi_n + \phi_y^\circ \phi_y) + EJ_p \phi_0' \phi' \} \\ & \times (\delta \epsilon_z + \phi_x^\circ \delta \phi_x + \phi_y^\circ \delta \phi_y) + EJ_x(-\chi_y \sin \varphi^\circ \\ & + \chi_x \cos \varphi^\circ)(-\delta \chi_y \sin \varphi^\circ + \delta \chi_x \cos \varphi^\circ) \\ & + EJ_y(\chi_x \sin \varphi^\circ + \chi_y \cos \varphi^\circ)(\delta \chi_x \sin \varphi^\circ \\ & + \delta \chi_y \cos \varphi^\circ) + EC_\omega \vartheta_\omega \delta \vartheta_\omega + GJ_T \psi_z \delta \psi_z \} R d\theta \\ & + \int_0^\theta \{ N^\circ(\phi_x \delta \phi_x + \phi_y \delta \phi_y) + K^\circ \phi' \delta \phi' \\ & - M_x^\circ(\delta \lambda_y \sin \varphi^\circ + \delta \lambda_x \cos \varphi^\circ) \\ & - M_y^\circ(\delta \lambda_x \sin \varphi^\circ - \delta \lambda_y \cos \varphi^\circ) \} R d\theta \\ & - \int_0^\theta \{ p_x \delta u_0 + p_y \delta v_0 + p_\theta \delta w_0 + m_\theta \cos \varphi^\circ \delta \varphi \\ & - m_n \sin \varphi^\circ \delta \varphi - (m_\theta^\circ \sin \varphi^\circ + m_n^\circ \cos \varphi^\circ) \\ & \times \varphi \delta \varphi \} R d\theta - \left[\bar{Q}_x \delta u_0 + \bar{Q}_y \delta v_0 + \bar{N} \delta w_0 \right. \\ & + \bar{T}_z \cos \varphi^\circ \delta \varphi - \bar{M}_\omega \delta \psi_z - \bar{M}_n \sin \varphi^\circ \delta \varphi \\ & - \bar{M}_x \delta \{ (-\phi_n^\circ \varphi + \phi_y) \sin \varphi^\circ + (\phi_x - \phi_y^\circ \varphi) \\ & \times \cos \varphi^\circ \} - \bar{M}_y \delta \{ (\phi_x - \phi_y^\circ \varphi) \sin \varphi^\circ \\ & + (\phi_y + \phi_x^\circ \varphi) \cos \varphi^\circ \} \Big]_0^\theta - \left[-(\bar{T}_z^\circ \sin \varphi^\circ \right. \\ & + \bar{M}_n^\circ \cos \varphi^\circ) \varphi \delta \varphi + \bar{M}_y^\circ \{ (\phi_y^\circ \cos \varphi^\circ \\ & + \phi_x^\circ \sin \varphi^\circ) \varphi \delta \varphi + \sin \varphi^\circ \delta(\phi \varphi_x) \\ & - \cos \varphi^\circ \delta(\phi \varphi_x) \} + \bar{M}_x^\circ \{ (\phi_x^\circ \cos \varphi^\circ \\ & - \phi_y^\circ \sin \varphi^\circ) \varphi \delta \varphi + \sin \varphi^\circ \delta(\phi \varphi_x) \\ & \left. + \cos \varphi^\circ \delta(\phi \varphi_y) \} \right]_0^\theta = -\delta W_n \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

上式の左辺では以下の幾何学量と断面量を定義した。

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= \phi_x' - \phi_y'^\circ \varphi \\ \chi_y &= \phi_y' + \frac{\varphi}{R} + \phi_x'^\circ \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x &= -\phi_y' \varphi - \frac{1}{2} \phi_x'^\circ \varphi^2 \\ \lambda_y &= -\phi_x' \varphi + \frac{1}{2} \phi_y'^\circ \varphi^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_F dF, J_x = \int_F y^2 dF, J_y = \int_F x^2 dF \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} J_T &= \int_F \Theta^2 dF, C_\omega = \int_F \omega^2 dF \\ J_p &= J_x + J_y, J_k = \int_F (x^2 + y^2)^2 dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x^\circ &= \int_F \sigma_\theta^\circ y dF, M_y^\circ = \int_F \sigma_\theta^\circ x dF \\ N^\circ &= \int_F \sigma_\theta^\circ dF, K^\circ = \int_F \sigma_\theta^\circ (x^2 + y^2) dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \int_F q_x dF, p_y = \int_F q_y dF, p_\theta = \int_F q_\theta dF \\ m_\theta &= \int_F (xq_y - yq_x) dF \\ m_n &= \int_F (xq_x + yq_y) dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_n &= \int_F \bar{\tau}_{x\theta} dF, \bar{Q}_y = \int_F \bar{\tau}_{y\theta} dF \\ \bar{M}_\omega &= \int_F \bar{\sigma}_\theta \omega dF, \bar{T}_z = \int_F (x\bar{\tau}_{y\theta} - y\bar{\tau}_{x\theta}) dF \\ \bar{N} &= \int_F \bar{\sigma}_\theta dF, \bar{M}_n = \int_F (x\bar{\tau}_{x\theta} + y\bar{\tau}_{y\theta}) dF \\ \bar{M}_x &= \int_F \bar{\sigma}_\theta y dF, \bar{M}_y = \int_F \bar{\sigma}_\theta x dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

式 (42) の左辺で Q_n 状態で作用している荷重 $m_\theta^\circ, m_n^\circ$ と材端力 $\bar{M}_x^\circ, \bar{M}_y^\circ, \bar{T}_z^\circ, \bar{M}_n^\circ$ は、それぞれ式 (46) と (47) の荷重と材端に作用している応力に記号 $^\circ$ を付けたもので与えられる。

式 (42) の右辺 δW_n は Q_n 状態に対する仮想仕事を表わし次のようである。

$$\begin{aligned} \delta W_n &= \int_0^\theta \{ N^\circ(\delta \epsilon_z + \phi_x^\circ \delta \phi_x + \phi_y^\circ \delta \phi_y) \\ & - M_x^\circ(-\delta \chi_y \sin \varphi^\circ + \delta \chi_x \cos \varphi^\circ) \\ & - M_y^\circ(\delta \lambda_x \sin \varphi^\circ + \delta \lambda_y \cos \varphi^\circ) + K^\circ \phi'^\circ \delta \phi' \\ & - M_\omega^\circ \delta \vartheta_\omega + T_{zs}^\circ \delta \psi_z \} R d\theta \\ & - \int_0^\theta \{ p_x \delta u_0 + p_y \delta v_0 + p_\theta \delta w_0 \\ & + m_\theta^\circ \cos \varphi^\circ - m_n^\circ \sin \varphi^\circ \delta \varphi \} R d\theta \\ & - \left[\bar{Q}_x^\circ \delta u_0 + \bar{Q}_y^\circ \delta v_0 + \bar{N}^\circ \delta w_0 + \bar{T}_z^\circ \right. \\ & \times \cos \varphi^\circ \delta \varphi - \bar{M}_n^\circ \sin \varphi^\circ \delta \varphi - \bar{M}_x^\circ \\ & \times \delta \{ (-\phi_y + \phi_x^\circ \varphi) \sin \varphi^\circ + (\phi_x - \phi_y^\circ \varphi) \\ & \times \cos \varphi^\circ \} - \bar{M}_y^\circ \delta \{ (\phi_x - \phi_y^\circ \varphi) \sin \varphi^\circ \\ & \left. + (\phi_y + \phi_x^\circ \varphi) \cos \varphi^\circ \} - \bar{M}_\omega^\circ \delta \psi_z \right]_0^\theta = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(48)$$

ここで、

$$T_{zs}^\circ = \int_F \tau_s \Theta dF \quad \dots\dots\dots(49)$$

式 (48) を $0 \leq \theta \leq \phi$ で部分積分を行うと、 Q_n 状態

に対する, つまりある任意なつり合い状態に対する断面力表示のつり合い方程式と境界条件が得られ, また式(42)の左辺を部分積分すると Q_n 状態からの増分量についての線形のつり合い方程式と境界条件が得られよう. ここでは剛性法を用いた解析を行うので, これらのつり合い方程式と境界条件を書き下すことは直接必要としないので省略する.

(2) 断面力-変位関係式

式(45)と(49)に, $\sigma_\theta = E\epsilon_\theta$, $\tau_s = G\gamma_s$ を代入すると2軸対称断面に対して次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} N^\circ &= EF \left(\epsilon_z^\circ + \frac{1}{2} \phi_x'^2 + \frac{1}{2} \phi_y'^2 \right) + \frac{1}{2} EJ_\rho (\varphi^\circ)'^2 \\ M_x^\circ &= -EJ_x \left(\phi_x' \cos \varphi^\circ - \phi_y' \sin \varphi^\circ - \frac{1 - \cos \varphi^\circ}{R} \right) \\ M_y^\circ &= -EJ_y \left(\phi_y' \cos \varphi^\circ + \phi_x' \sin \varphi^\circ + \frac{\sin \varphi^\circ}{R} \right) \\ K^\circ &= EJ_\rho \left(\epsilon_z^\circ + \frac{1}{2} \phi_x'^2 + \frac{1}{2} \phi_y'^2 \right) + \frac{1}{2} EJ_k (\varphi_0')^2 \\ T_{zs}^\circ &= GJ_T \psi_z^\circ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50 \cdot a \sim e)$$

これらは以下の剛性法による解析において, 初期応力マトリックスの計算のとき用いられる.

4. 剛性マトリックス

(1) 変位関数

アーチや曲線桁の挙動を剛性法で解析する場合の円弧要素に対する変位関数については, すでに文献12)で議論され, 精度も確かめられているのでここでは要点のみを述べる.

曲線桁を部材長さ方向へ有限個の要素に分割し, これら要素の重心軸上の点の変位を座標 θ の3次式で近似する.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (51)$$

ここで, θ_e を円弧要素の中心角とすると

$$L_e = R \cdot \theta_e$$

は要素長さであり, 式(51)の左辺は

$$u_0 \sim \frac{u_0}{L_e}, v_0 \sim \frac{v_0}{L_e}, w_0 \sim \frac{w_0}{L_e} \dots\dots\dots (52)$$

とおいてあり, これらは無次元変位である. 以下記号 \sim は, \sim の右の無次元量を \sim の左の文字で再定義することを表す.

要素両端 i, j での節点自由度として次のものを採用する.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_a &= [v_i \ w_i \ \phi_{xi} \ \epsilon_{zi} \ v_j \ w_j \ \phi_{xj} \ \epsilon_{zj}]^T \\ \mathbf{q}_c &= [u_i \ \phi_{yi} \ \varphi_i \ \psi_{zi} \ u_j \ \phi_{yj} \ \varphi_j \ \psi_{zj}]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots (53)$$

ここで, ψ_{zi} は無次元ねじれ率であって

$$\psi_{zi} \sim L_e \psi_{zi} \dots\dots\dots (54)$$

式(53)の \mathbf{q}_a は要素 $i-j$ の曲率面内の節点変位を表す. $\epsilon_{zi}, \epsilon_{zj}$ は内的節点変位であるが, これらを含めて節点変位と総称する. \mathbf{q}_c は曲率面外の節点変位を表す.

式(52)~(54)の定義によって式(51)の係数 $a_0 \sim d_3$ は \mathbf{q}_a または \mathbf{q}_c で表わされ, その結果

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= N_u \mathbf{q}_c, v_0 = N_v \mathbf{q}_c \\ w_0 &= N_w \mathbf{q}_c, \varphi = B_\varphi \mathbf{q}_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

となる. N_u, N_v, \dots はいずれも1行8列であり, その要素は θ の多項式であって内容は文献12)を参照されたい. 次に微小変位の場合の幾何学量 $\epsilon_z, \phi_x, \phi_y, \dots$ を節点変位で表わしておく. 式(55)を式(2), (15), (33)に代入して整理すると次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= B_z \mathbf{q}_a, \phi_x = B_{\phi_x} \mathbf{q}_a, \phi_y = B_{\phi_y} \mathbf{q}_c \\ \dot{\phi}_x &= B_{\dot{\phi}_x} \mathbf{q}_a, \dot{\phi}_y = B_{\dot{\phi}_y} \mathbf{q}_c, \dot{\varphi} = B_{\dot{\varphi}} \mathbf{q}_c \\ \psi_z &= B_{\psi_z} \mathbf{q}_c, \vartheta_\omega = B_{\vartheta_\omega} \mathbf{q}_c \end{aligned} \right\} \dots\dots (56)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_x &= L_e \phi_x', \dot{\phi}_y = L_e \phi_y', \dot{\varphi} = L_e \varphi' \\ \psi_z &\sim L_e \psi_z, \vartheta_\omega \sim L_e^2 \vartheta_\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots (57)$$

である. したがって, $\dot{\phi}_x, B_{\dot{\phi}_x}$ などそれぞれ ϕ_x, B_{ϕ_x} の θ/θ_e に関する微分であり無次元量である. B_z, B_{ϕ_x}, \dots はすべて1行8列であり内容は文献12)を参照されたい.

(2) 剛性方程式

式(55), (56)を増分式(42)の両辺に代入し, 節点変位増分の変分 $\delta \mathbf{q}_a^T, \delta \mathbf{q}_c^T$ について整理する. $\delta \mathbf{q}_a^T, \delta \mathbf{q}_c^T$ は任意であるからこれらの係数を零とおくことにより2組の方程式が得られ, これらに L_e/EJ_x または L_e/EJ_y を乗じると次式のように無次元剛性方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{K}_a + \mathbf{N}^\circ) \mathbf{q}_a + (\mathbf{K}_{ac} + \mathbf{T}^\circ) \mathbf{q}_c / \lambda = \mathbf{f}_a - \mathbf{r}_a^\circ \\ (\mathbf{K}_c + \mathbf{M}^\circ + \mathbf{M}_n^\circ) \mathbf{q}_c + (\mathbf{K}_{ac} + \mathbf{T}^\circ)^T \mathbf{q}_a = \mathbf{f}_c - \mathbf{r}_c^\circ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

ここで次のようにおいた.

a) 剛性マトリックス

$$\mathbf{K}_a = \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\theta_e} \left\{ \alpha_c (B_z^T + \phi_x^\circ B_{\phi_x}^T) (B_z + \phi_x^\circ B_{\phi_x}) + \left(\cos^2 \varphi^\circ + \frac{1}{x} \sin^2 \varphi^\circ \right) B_{kx}^T B_{kx} \right\} d\theta \dots (59)$$

$$\mathbf{K}_{ac} = -\frac{\lambda}{\Phi_e} \int_0^{\theta_e} \dot{\phi}_y^\circ \cos^2 \varphi^\circ B_{ky}^T B_{\phi_x} d\theta + \frac{1}{\Phi_e} \times \int_0^{\theta_e} [(B_z^T + \phi_x^\circ B_{\phi_x}^T) \{ \alpha_c \lambda \phi_y^\circ B_{\phi_y} + (1 + \lambda)]$$

$$\begin{aligned} & \times \dot{\varphi}^\circ \mathbf{B}_\varphi \} + \chi \mathbf{B}_{kx}^T \{ (1-\chi) \sin \varphi^\circ \cos \varphi^\circ (\mathbf{B}_{ky} \\ & + \dot{\phi}_x^\circ \mathbf{B}_\varphi) - \dot{\phi}_y^\circ \sin \varphi^\circ \mathbf{B}_\varphi \}] d\theta \dots \dots \dots (60) \\ K_c = & \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} (\cos^2 \varphi^\circ \mathbf{B}_{ky}^T \mathbf{B}_{ky} + \lambda_e^2 \mathbf{B}_{\theta\omega}^T \mathbf{B}_{\theta\omega} \\ & + k \mathbf{B}_{yz}^T \mathbf{B}_{yz}) d\theta + \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} \tau_e (\dot{\varphi}^\circ)^2 \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_\varphi d\theta \quad \textcircled{A} \\ & + \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} [\alpha_e \chi \phi_y^{\circ 2} \mathbf{B}_{\phi y}^T \mathbf{B}_{\phi y} + \phi_y^\circ \dot{\varphi}^\circ (1+\chi) \\ & \times (\mathbf{B}_{\phi y}^T + \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_{\phi y}) + x \{ -\dot{\phi}_y^\circ \mathbf{B}_\varphi^T - \sin \varphi^\circ \\ & \times (\mathbf{B}_{ky}^T + \dot{\phi}_x^\circ \mathbf{B}_\varphi^T) \} \{ -\dot{\phi}_y^\circ \cos \varphi^\circ \mathbf{B}_\varphi - \sin \varphi^\circ \\ & \times (\mathbf{B}_{ky} + \dot{\phi}_x^\circ \mathbf{B}_\varphi) \} + \cos \varphi^\circ (\dot{\phi}_x^\circ \cos \varphi^\circ \\ & - \dot{\phi}_y^\circ \sin \varphi^\circ) (\mathbf{B}_{ky}^T \mathbf{B}_\varphi + \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_{ky}) \\ & + (\dot{\phi}_x^\circ \cos \varphi^\circ - \dot{\phi}_y^\circ \sin \varphi^\circ)^2 \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_\varphi] d\theta \dots \dots (61) \end{aligned}$$

以上で次のパラメーターが定義された。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_e &= \frac{EFL_e^2}{EJ_x}, \quad k = \frac{GTT}{ET_y}, \quad \chi = \frac{J_x}{J_y} \\ \lambda_e^2 &= \frac{EC_\omega}{EJ_y L_e^2}, \quad \tau_e = \frac{EJ_k}{EJ_y L_e^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (62)$$

式 (59)~(61) では初期たわみ (Q_n 状態のたわみ) を含めて剛性マトリックスとよぶことにする。

$R \rightarrow \infty$ ではりが y 軸, つまり強軸まわりの曲げを受けるとき初期たわみは

$$\phi_x^\circ = \varphi^\circ = 0, \quad \phi_y^\circ \approx 0 \dots \dots \dots (63)$$

式 (50・c) より u_0 を式 (52) の無次元変位とすると

$$\dot{\phi}_y^\circ = \dot{u}_0 = -\frac{M_y^\circ}{EJ_y} \cdot L_e \dots \dots \dots (64)$$

となる。

マトリックス K_a, K_{ac} および K_c の表わす意味は次のようである。

(i) 条件式 (63) のもとで K_a は微小変位の場合のアーチの剛性マトリックスを与える。曲率面内と面外変位の連成効果を表わす K_{ac} は, 式 (63) の条件のもとでアンダーラインを引いた項以外は零となる。この項は式 (64) より y 軸まわりの初期曲率の効果を表わす。

(ii) K_c ① は式 (63) のもとで曲線桁の微小変位の剛性マトリックスを与える。⑩ は ε_θ の式 (36) で $(x^2+y^2)(\varphi')^2/2$ から出てくる項であり, 有限なねじれの場合の St. Venant の問題で重要な役割を担うことは微分方程式の上でも指摘されている¹⁸⁾。

条件式 (63) のもとでは ⑩ で二重アンダーラインの項 (の積) 以外は零となる。この項は $\dot{\phi}_y^\circ = \dot{u}_0$ を含みやはり初期曲率の効果を表わす。

b) 初期応力マトリックス

$$N^\circ = \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} N^\circ \mathbf{B}_{\phi x}^T \mathbf{B}_{\phi x} d\theta \dots \dots \dots (65)$$

$$T^\circ = \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} (\chi M_x^\circ \sin \varphi^\circ - M_y^\circ \cos \varphi^\circ) \mathbf{B}_{kx}^T \mathbf{B}_\varphi d\theta \dots \dots \dots (66)$$

$$\begin{aligned} M^\circ &= \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} \dot{\phi}_y^\circ \cos \varphi^\circ M_y^\circ \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_\varphi d\theta \quad \textcircled{A} \\ &+ \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} [\chi N^\circ \mathbf{B}_{\phi y}^T \mathbf{B}_{\phi y} + K^\circ \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_\varphi \\ &+ (\chi \cos \varphi^\circ M_x^\circ + \sin \varphi^\circ M_y^\circ) \{ \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_{ky} \\ &+ \mathbf{B}_{ky}^T \mathbf{B}_\varphi + (\dot{\phi}_x^\circ - \Phi_e) \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_\varphi \} \\ &- \chi \dot{\phi}_y^\circ \sin \varphi^\circ M_x^\circ \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_\varphi] d\theta \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

$$M_n^\circ = \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} (m_n^\circ \cos \varphi^\circ + m_\theta^\circ \sin \varphi^\circ) \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{B}_\varphi d\theta \dots \dots \dots (68)$$

ここで次の無次元断面力と荷重を定義した。

$$\left. \begin{aligned} N^\circ &\sim \frac{N^\circ L_e^2}{EJ_x}, \quad M_x^\circ \sim \frac{M_x^\circ L_e}{EJ_x} \\ M_y^\circ &\sim \frac{M_y^\circ L_e}{EJ_y}, \quad K^\circ \sim \frac{K^\circ}{EJ_y} \\ m_n^\circ &\sim \frac{m_n^\circ L_e^2}{EJ_y}, \quad m_\theta^\circ \sim \frac{m_\theta^\circ L_e^2}{EJ_y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (69)$$

式 (68) の M_n° マトリックスは荷重の作用位置とねじりモーメント荷重による, いわば初期荷重マトリックスであるが, これを含めてここでは初期応力マトリックスと総称する。曲げとねじれに関連する $T^\circ, M^\circ, M_n^\circ$ の表わす意味は次のようである。

(i) 式 (63) の条件のもとで, T° のアンダーライン上の項は曲率面内と面外変位の連成効果を表わす項である。

(ii) M° の ① は, 初期曲率と初期曲げモーメントの積の項であり, ⑩ は式 (63) の条件のもとでは零となり, 軸力や x 軸まわりの曲げが初期応力となる場合に問題となる項である。

(iii) M_n° の中の載荷位置によって生ずる m_n° は式 (46) で,

$$x = x_p = \text{一定}, \quad p_y = q_y = 0 \dots \dots \dots (71)$$

のとき

$$m_n^\circ = \frac{x_p p_x^\circ}{EJ_y} \cdot L_e^2 \dots \dots \dots (72)$$

となる。

c) 荷重増分

$$f_a = \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} (p_y N_\theta^T + p_\theta N_w^T) d\theta \dots \dots \dots (73)$$

$$f_c = \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} \{ p_x N_u^T + (m_\theta \cos \varphi^\circ - m_n \sin \varphi^\circ) \times \mathbf{B}_\varphi^T \} d\theta \dots \dots \dots (74)$$

ここで,

$$p_x \sim \frac{p_x L_e^3}{EJ_y}, \quad p_y \sim \frac{p_y L_e^3}{EJ_y}, \quad p_\theta \sim \frac{p_\theta L_e^3}{EJ_x} \dots (75)$$

m_θ, m_n は式 (70) で単に記号 $^\circ$ を除いたものである。

d) 残 差

これは Q_n 状態に対する仮想仕事の式 (48) から出てくる項であり次のようである。

$$r_a^\circ = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \left\{ N^\circ (B_z^T + \phi_x^\circ B_{\phi_x}^T) - (M_x^\circ \cos \varphi^\circ + \frac{1}{\chi} M_y^\circ \sin \varphi^\circ) B_{kx}^T \right\} d\theta - f_a^\circ \dots\dots (76)$$

$$r_c^\circ = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \left\{ \chi N^\circ \phi_y^\circ B_{\phi_y}^T + K^\circ \phi_0 B_\varphi^T + (\chi M_x^\circ \times \sin \varphi^\circ - M_y^\circ \cos \varphi^\circ) (B_{ky}^T + \kappa_x^\circ B_\varphi^T) + (\chi M_x^\circ \cos \varphi^\circ + M_y^\circ \sin \varphi^\circ) \phi_y^\circ B_\varphi^T - M_w^\circ B_{\theta w}^T + T_{zs}^\circ B_{\psi z}^T \right\} d\theta - f_c^\circ \dots\dots (77)$$

ここで、

$$M_w^\circ \sim \frac{M_{\theta w}^\circ}{EJ_y}, T_{zs}^\circ \sim \frac{T_{zs}^\circ L_e}{EJ_y} \dots\dots (78)$$

である。

式 (76), (77) の f_a°, f_c° は Q_n 状態で作用している荷重ベクトルであって式 (73), (74) の積分内の荷重強度に単に記号 $^\circ$ を付けたものである。

(3) 材端力から生ずる荷重と初期応力

これは 仮想仕事の式 (42) において、[] でくられた材端力のなす仮想仕事から派生してくる項であって方程式 (58) では考慮していない。しかし、桁の材端に曲げ、ねじれあるいは曲げねじれモーメントが作用するような荷重状態では、これら境界項から出てくるベクトルやマトリックスも考慮せねばならない。

a) 荷重ベクトル

式 (42) の境界項をマトリックス表示したときに、変分 $\delta q_a^T, \delta q_c^T$ の係数として出てくる荷重ベクトルはそれぞれ、

$$\bar{f}_a = \left\{ \begin{matrix} \bar{f}_{ai} \\ \bar{f}_{aj} \end{matrix} \right\}, \bar{f}_c = \left\{ \begin{matrix} \bar{f}_{ci} \\ \bar{f}_{cj} \end{matrix} \right\} \dots\dots (79)$$

ここで、

$$\bar{f}_{ai} = \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{yi} \\ \bar{N}_i \\ \bar{M}_{xi} \cos \varphi_i^\circ + \bar{M}_{yi} \sin \varphi_i^\circ / \chi \\ 0 \end{matrix} \right\} \dots\dots (80)$$

$$\bar{f}_{ci} = \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{xi} \\ -\chi \bar{M}_{xi} \sin \varphi_i^\circ + \bar{M}_{yi} \cos \varphi_i^\circ \\ (\bar{T}_{zi} - \chi \phi_{yi}^\circ \bar{M}_{xi} + \phi_{xi}^\circ \bar{M}_{yi}) \cos \varphi_i^\circ \\ + (\bar{M}_{ni} - \chi \phi_{xi}^\circ \bar{M}_{xi} - \phi_{yi}^\circ \bar{M}_{yi}) \sin \varphi_i^\circ \\ \bar{M}_{wi} \end{matrix} \right\} \dots\dots (81)$$

ここで、

$$\left. \begin{matrix} \bar{N}_i \sim \frac{\bar{N}_i L_e^2}{EJ_x}, \bar{Q}_{xi} \sim \frac{\bar{Q}_{xi} L_e^2}{EJ_y}, \bar{Q}_{yi} \sim \frac{\bar{Q}_{yi} L_e^2}{EJ_x} \\ \bar{M}_{xi} \sim \frac{\bar{M}_{xi} L_e}{EJ_x}, \bar{M}_{yi} \sim \frac{\bar{M}_{yi} L_e}{EJ_y}, \bar{T}_{zi} \sim \frac{\bar{T}_{zi} L_e}{EJ_y} \\ \bar{M}_{wi} \sim \frac{\bar{M}_{wi}}{EJ_y}, \bar{M}_{ni} \sim \frac{\bar{M}_{ni} L_e}{EJ_y} \end{matrix} \right\} \dots\dots (82)$$

式 (79) の $\bar{f}_{aj}, \bar{f}_{cj}$ は式 (80)~(82) でサフィック

ス i を単に j に置き換えたものである。上式で節点力の正負は微小変位理論と同じとするが、 \bar{M}_n については、

$$\bar{M}_{ni} = (\bar{M}_n)_{\theta=0}, \bar{M}_{nj} = (-\bar{M}_n)_{\theta=\phi_e} \dots\dots (83)$$

と約束する。材端力が与えられる問題では方程式 (42) で f_a, f_c をそれぞれ $f_a + \bar{f}_a, f_c + \bar{f}_c$ と置き換えることになる。同時に残差 r_a°, r_c° の中の f_a°, f_c° もそれぞれ $f_a^\circ + \bar{f}_a^\circ, f_c^\circ + \bar{f}_c^\circ$ とせねばならない。

b) 初期応力マトリックス

式 (42) の境界項には $\phi \delta \phi$ などのように増分の 2 次の変分が含まれるが、これらからは材端力による初期応力マトリックスが現われる。 δq_a^T の係数として出てくるものを S_{ac}° とするとこれは 8 行 8 列であり要素の値は

$$S_{ac}^\circ(3, 3) = -\chi \bar{M}_{xi}^\circ \sin \varphi_i^\circ + \bar{M}_{yi}^\circ \cos \varphi_i^\circ \dots\dots (84)$$

$S_{ac}^\circ(7, 7)$ は上式でサフィックス i を j に置き換えたものである。ほかの要素は零である。

δq_c^T の係数マトリックスを S_c° とすると、これも 8 行 8 列であってその要素は

$$\left. \begin{matrix} S_c^\circ(3, 3) = -\bar{T}_{zi}^\circ \sin \varphi_i^\circ + \bar{M}_{ni}^\circ \cos \varphi_i^\circ \\ \quad - \chi \bar{M}_{xi}^\circ (\phi_{xi}^\circ \cos \varphi_i^\circ - \phi_{yi}^\circ \sin \varphi_i^\circ) \\ \quad - \bar{M}_{yi}^\circ (\phi_{yi}^\circ \cos \varphi_i^\circ + \phi_{xi}^\circ \sin \varphi_i^\circ) \\ S_c^\circ(2, 3) = -\bar{M}_{yi}^\circ \sin \varphi_i^\circ - \chi \bar{M}_{xi}^\circ \cos \varphi_i^\circ \\ = S_c^\circ(3, 2) \end{matrix} \right\} \dots\dots (85)$$

$S_c^\circ(7, 7), S_c^\circ(6, 7)$ はそれぞれ上式の $S_c^\circ(3, 3), S_c^\circ(2, 3)$ のサフィックス i を j に置き換えたものとなり、 $S_c^\circ(7, 6) = S_c^\circ(6, 7)$ である。

桁の材端に曲げやねじりが作用する場合は、方程式 (42) において T° を $T^\circ - S_{ac}^\circ$ に、 M° を $M^\circ - S_c^\circ$ にそれぞれ書き換えねばならない。

(4) 断面力-節点変位関係

2 軸対称断面の場合の断面力-変位関係は式 (50) で与えられている。これを式 (62), (69) によって無次元表示すると次式となる。

$$\left. \begin{matrix} N^\circ = \alpha_e \left(\varepsilon_z^\circ + \frac{1}{2} \phi_x^{\circ 2} + \frac{1}{2} \phi_y^{\circ 2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) (\dot{\varphi}^\circ)^2 \\ M_x^\circ = -\dot{\phi}_x^\circ \cos \varphi^\circ + \dot{\phi}_y^\circ \sin \varphi^\circ + \phi_e (1 - \cos \varphi^\circ) \\ M_y^\circ = -\dot{\phi}_y^\circ \cos \varphi^\circ - \dot{\phi}_x^\circ \sin \varphi^\circ - \phi_e \sin \varphi^\circ \\ K^\circ = (1 + \chi) \left(\varepsilon_z^\circ + \frac{1}{2} \phi_x^{\circ 2} + \frac{1}{2} \phi_y^{\circ 2} \right) + \frac{1}{2} r_e (\dot{\varphi}^\circ)^2 \\ T_{zs}^\circ = k \cdot \psi_z^\circ \end{matrix} \right\} \dots\dots (86)$$

ここで初期たわみ $\varepsilon_z^\circ, \phi_x^\circ, \dots$ は式 (56) より

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_z^\circ = B_z q_a^\circ, \phi_x^\circ = B_{\phi_x} q_a^\circ \\ \phi_y^\circ = B_{\phi_y} q_c^\circ, \dot{\phi}_x^\circ = B_{\dot{\phi}_x} q_u^\circ \end{matrix} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_y^\circ &= B_{\phi_y} q_c, \quad \dot{\phi}^\circ = B_{\phi} q_c^\circ \\ \psi_z^\circ &= B_{\psi_z} q_c, \quad \psi^\circ = B_{\psi} q_c^\circ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(87)$$

と節点変位で表わされる。\$B_z, B_{\phi_x}, \dots\$ はいずれも 1 行 8 列の大きさであり、各要素は \$\theta\$ の多項式である。したがって、\$q_a^\circ, q_c^\circ\$ の値が既知とすると \$\theta(0 \le \theta \le \phi_e)\$ の値を指定すると式 (87) によってこの点の幾何学量 \$\varepsilon_z^\circ, \phi_x^\circ, \dots\$ の値が定まり、式 (86) によってこの点の断面力の値も定まる。

5. 有限ねじれ変形解析

(1) ニュートン・ラフソン法と数値積分

剛性方程式 (58) において要素曲率面内と曲率面外の荷重増分, \$f_a, f_c\$ を与えて、節点変位増分を求めるために、ここでは標準的なニュートン・ラフソン法による。計算法の要点は以下のようである。

(a) \$Q_n\$ 状態から \$Q_{n+1}\$ 状態への荷重増分 \$f_a, f_c\$ による変位増分 \$q_a^f, q_c^f\$ を初に求める。次に \$Q_n\$ 状態の変位 \$q_a^\circ, q_c^\circ\$ から定まる残差 \$r_a^\circ, r_c^\circ\$ を荷重とみなして、これによる変位増分 \$q_a^f, q_c^f\$ が \$q_a^\circ, q_c^\circ\$ に比べて十分小さくなるまで繰り返して式 (58) を解く。ここでは、\$q_a^f, q_c^f\$ の 1% 以内となったとき、収束したものと判定した。

(b) 式 (59)~(61) の剛性マトリックス、式 (65)~(68) の初期応力マトリックス、および式 (76), (77) の残差ベクトルはすべて数値積分で求めた。荷重増分 \$f_a, f_c\$ も集中荷重や材端モーメント荷重のような単純な場合を除いて数値積分で求めた。

数値積分は Gauss の求積公式によったが、Gauss の点の数 \$n\$ は被積分関数が多項式の場合、その次数による。たとえば式 (59) の \$K_a\$ は \$\phi_x^\circ B_{\phi_x}^T B_{\phi_x}\$ の積分を含むが \$\phi_x^\circ = B_{\phi_x} q_a^\circ\$ より、この要素は最大 \$\theta\$ の 12 次式となる (文献 12) 参照。しかし、\$K_a\$ には \$\cos^2 \phi^\circ B_{k_x}^T B_{k_x}\$ のような非多項式の積分も含まれる。これらを考えて、ここでは \$n=15\$ とした。よって \$\theta\$ について \$(2n-1)=29\$ 次までの厳密な積分値が得られる。

(c) 上述の \$\cos^2 \phi^\circ B_{k_x}^T B_{k_x}\$ などの数値積分は \$\theta\$ の多項式と同様に計算できる。すなわちある荷重状態に対する節点変位 \$q_c^\circ\$ が求まったとすると式 (87) の \$\psi^\circ = B_{\psi} q_c^\circ\$ より \$0 \le \theta \le \phi_e\$ での Gauss 点での \$\psi^\circ\$ の値が定まる。したがって、この点の \$\cos \phi^\circ\$ の値も確定し、行列 \$\cos^2 \phi^\circ B_{k_x}^T B_{k_x}\$ の要素の値が定まるからである。

(2) 座屈荷重以上の荷重に対する計算法

曲線桁の曲率が非常に小さくて初期不整のある直線桁とみなし得る桁では、横倒れ座屈荷重近傍で上述の繰り

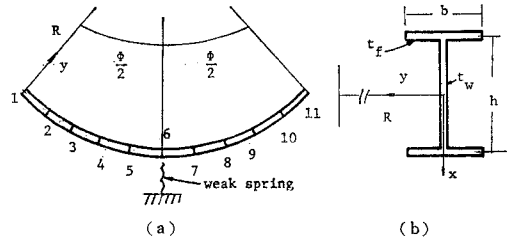


図-3

返し計算は荷重増分を小さくしても急に収束しなくなる。この問題は 図-3 (a) に示すように、スパン中央に半径方向の水平ばねを挿入することによって解決した。

すなわち、座屈荷重以降の荷重に対しては、式 (58) を桁全体に対して重ね合わせた後の剛性方程式とすると

$$K_a \rightarrow K_a + \bar{K} \dots\dots\dots(88)$$

と置き換えるのである。図-3 (a) は 10 等分割要素でスパン中央は節点番号 6 であるから、この場合

$$\begin{matrix} v_1 & w_1 & \phi_{x1} & \dots & v_6 & \dots & \varepsilon_{z6} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 21 & \dots & 44 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ 2 & & & & & \\ 3 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 21 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 44 & & & & & \end{array} \right] \dots\dots\dots(89)$$

となる。\$k\$ はばね定数である。実際にはばねは存在しないのであるが、\$k\$ の大きさを微小変位の場合の (つまり初期たわみが零の場合) の \$K_a\$ の \$v_6\$ に対応する対角要素の値の 10% 程度から 0.1% 程度まで漸次小さくして試行計算を行ってみると、ねじれ角や変位は有効数字 3 桁まで収束することが確かめられた。この点については次節で再述する。

(3) 単純桁の横倒れ座屈

解析の対象とする標準断面 I 型桁を 図-3 (b) に示す。\$L\$ を部材長とするとき、

$$h = \frac{L}{20}, \quad b = \frac{h}{3}, \quad t_w = \frac{h}{150}, \quad t_f = \frac{b}{25} \dots\dots\dots(90)$$

である。1 フランジとウェブの断面積はそれぞれ \$A_f = b^2/25, A_w = h^2/150\$ である。式 (62) よりパラメーターは¹²⁾ 図-3 (a) に示す 10 等分割要素について

$$\left. \begin{aligned} \alpha_e &= 7.560 \times 10^2, \quad k = 8.662 \times 10^{-5} \\ \chi &= 2.963 \times 10^{-2}, \quad \lambda_e^2 = 1.852 \times 10^{-3} \\ \tau_e &= 6.132 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(91)$$

となる。無次元パラメーターとして要素中心角 \$\phi_e\$ も必要であるが、\$L = R \cdot \phi_e = 20\$ m を一定として \$R\$ を 50 m,

500 m, 5 000 m と変えた. したがって

$$\phi_e = 0.4, 0.04, 0.004 \dots\dots\dots(92)$$

a) 曲率半径の差異による変形特性

図-4 はスパン中央のウェブ中心に鉛直集中荷重を用させ, これを漸増させていったときのスパン中央のねじれ角の計算結果である. 図中のパラメーター

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{20}, \frac{1}{200}, \frac{1}{2000} \dots\dots\dots(93)$$

は式 (92) の右辺に対応している. あるいは $R=50$ m, 500 m, 5 000 m に対応している. 縦軸の分母 P_{cr} は直析としての座屈荷重であって式 (91) の断面定数に対して

$$P_{cr} \sim \frac{P_{cr} L^2}{EJ_y} = 4.81 \times 10^{-2} \dots\dots\dots(94)$$

と得られる (たとえば文献 19) 参照).

図-4 において, $f/L=1/20, 1/200, 1/2000$ のそれぞれに対して実行された荷重ステップ数は 40, 60 および 90 ステップである. $f/L=1/2000$ の場合は本節 (2) で述べたように式 (94) の P_{cr} 以上の荷重レベルに対しては, スパン中央に半径方向のばねを入れ, 式 (88) の置き換えを行っている. $K_a(i, j)$ を図-3 (a) の 10 等分割要素からなる桁全体のマトリックスの i 行 j 列の値とすると, 式 (59) で初期たわみのない場合の v_0 に対応する対角要素の値は, 文献 11) と式 (91), (92) の値より

$$K_a(21, 21) = 64 \alpha_e^2 \phi_e^2 / 105 + 24 - 4 \phi_e^2 + 4 \phi_e^4 / 15 \approx 24.00 \dots\dots\dots(95)$$

ばね定数 k を式 (95) の 10% から漸次小さくして 0.1% まで種々変えたときの, 式 (94) の座屈荷重時におけるスパン中央のねじれ角の値を示したのが図-5 (a) である. 0.5%, 0.25%, 0.1% と小さくするにつれ有効数

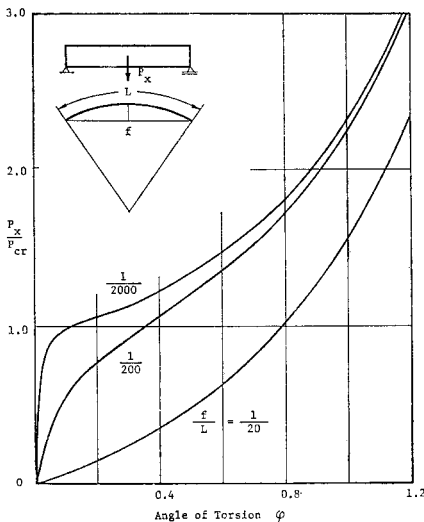


図-4

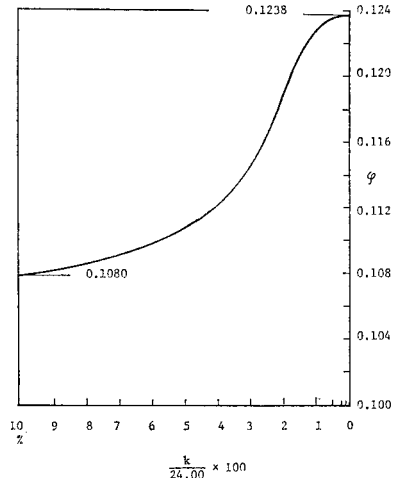


図-5 (a) ばね定数 k とスパン中央ねじれ角の関係 (座屈荷重時)

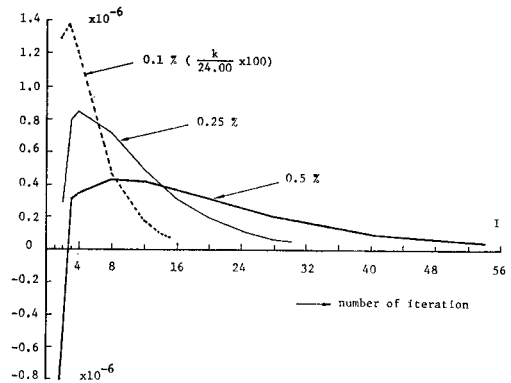


図-5 (b) 残差 $r_e^c(23)$ の収束状況

字 3 桁まで ϕ の値は変わらず, 収束したものと判断した.

図-5 (b) は座屈荷重時にニュートン・ラフソン法での繰り返し計算回数 I の増加に伴う残差の零への収束状況を, ばね定数 k をパラメーターとして折れ線で示している. 残差 $r_e^c(23)$ はねじれ角 ϕ_c に対応する要素の値である. k の値が小さいほど, 少ない繰り返し計算回数で収束することがわかる. しかし $k/24.00$ が 0.01% では解は発散した. これはばね定数 k の値が零に近づくとき, 座屈荷重近傍でアーチ作用に対する式 (88) 左辺の剛性マトリックス K_a が特異になるためと考えられる. しかし上述のようにスパン中央でのねじれ角は, k を小さくするにつれ一定値へ漸近するので, $k/24.0$ が 0.1% の解を収束値と判断した. 図-5 (a), (b) での荷重ステップ数 N での荷重増分は

$$\left. \begin{aligned} N=1 \sim 10 \text{ で } \Delta P_x &= 0.07 P_{cr} \\ N=11 \sim 90 \text{ で } \Delta P_x &= 0.02 P_{cr} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(96)$$

である.

次に荷重ステップ N の増加に伴う剛性マトリックス

表一 剛性マトリックスと初期応力マトリックスの値の変化

		$N=10$ $0.7 P_{cr}$	$N=20$ $0.9 P_{cr}$	$N=23$ $0.96 P_{cr}$	$N=25$ P_{cr}	$N=27$ $1.04 P_{cr}$	$N=30$ $1.1 P_{cr}$	$N=35$ $1.3 P_{cr}$
$K_c(23, 23)$	①	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	②	0.2173×10^{-5}	0.2443×10^{-4}	0.0685×10^{-3}	0.1574×10^{-3}	0.6803×10^{-3}	0.0770×10^{-2}	0.1670×10^{-2}
	③	0.7297×10^{-5}	0.6919×10^{-4}	0.1866×10^{-3}	0.4234×10^{-3}	0.9304×10^{-3}	0.2171×10^{-2}	0.5125×10^{-2}
$M^\circ(23, 23)$	④	-0.8829×10^{-5}	-0.1859×10^{-4}	-0.0240×10^{-3}	-0.0139×10^{-3}	-0.0467×10^{-3}	-0.0080×10^{-2}	-0.0151×10^{-2}
	⑤	0.0235×10^{-5}	0.0267×10^{-4}	0.0074×10^{-3}	0.0171×10^{-3}	0.0367×10^{-3}	0.0080×10^{-2}	0.0161×10^{-2}
$K_c(23, 23)$ + $M^\circ(23, 23)$	Σ	0.0876×10^{-5}	0.7770×10^{-4}	0.2385×10^{-3}	0.5660×10^{-3}	0.2941×10^{-2}	0.2941×10^{-2}	0.6805×10^{-2}

K_c と初期応力マトリックス M° の要素の値の変化を見たのが表一である。 $K_c(23, 23)$, $M^\circ(23, 23)$ は φ_θ に対応する対角要素である。表中の ①, ②, ③ および ④, ⑤ はそれぞれ式 (61) と (67) にアンダーラインで示した項である。

表一のすべての値は $K_c(23, 23)$ における $P_x=0.7 P_{cr}$ のときの ① の値

$$K_c(23, 23, 0.7 P_{cr}, ①) = 0.44656 \times 10^{-1} \dots (97)$$

で除したものである。① は式 (63) 以下で述べたように、ねじれ角 φ° を零とおいたとき、微小変位の場合の剛性マトリックスを与える。表一 から次のことがわかる。

(i) ① に対応する行の値が 1.0000 となっていることは、荷重が増し、ねじれ角が増しても式 (97) の値と 5 桁まで変わらない。すなわち初期たわみの影響はほとんどない。

(ii) ②/③ の値は 3.3~3.1 で座屈前後で大きな変化はない。② は式 (61) から主に曲げとねじれの連成項から成るに対して、③ は純粋なねじれの項から成る。しかも ③ は ε_θ の $(x^2+y^2)\varphi^2/2$ から出てくる、つまりひずみエネルギーでは初期たわみの 4 次の項から出てくるが、単に次数が高いからという理由で¹⁷⁾この項を無視することはできない。

(iii) マトリックス M° で、y 軸まわりの曲げ効果を表わす ④ (式 (67)) の値は負であり、主に軸力と x 軸まわりの曲げ効果を表わす ⑤ は正である。 $P_x=0.7 P_{cr}$ では ④+⑤ < 0 であるが $1.1 P_{cr}$ で ④+⑤=0, $1.3 P_{cr}$ で ④+⑤ > 0 と逆転する。

(iv) $0.7 P_{cr}$ と $1.3 P_{cr}$ で値をみると、②, ③ の値は約 10^3 倍となるが、④, ⑤ では 10^2 倍以下である。つまり荷重の増加につれ初期たわみの影響が強く現われる。

(v) ②+③+④+⑤ は常に正であり、荷重の増加とともにねじれ剛性が増し、一見ねじれにくくなる。しかし、 $1.3 P_{cr}$ においてもこの和は ① の値の 0.68% 程度である。

b) 荷重位置の差異による変形特性

図一6 (a), (b), (c) は鉛直集中荷重の荷重位置を上フ

ランジ中央、ウェブ中央および下フランジ中央と変えた場合の計算結果である。さらに、これらの図では f/L をパラメータとしている。

縦軸は荷重 P_x を式 (94) の P_{cr} 、すなわちウェブ中央点荷重の場合の座屈荷重で除したものであり、上フランジ中央、下フランジ中央荷重の場合の横倒れ座屈荷重はそれぞれ

$$\frac{P_{cr} L^2}{EJ_y} = 3.05 \times 10^{-2}, 7.60 \times 10^{-2} \dots \dots \dots (98)$$

となる¹⁹⁾。したがって、上フランジ中央、ウェブ中央および下フランジ中央荷重の場合の座屈荷重の比は 0.63 : 1 : 1.58 となる。

荷重位置の違いを表わすマトリックス M_n° で、いまの場合スパン中央に集中荷重が作用しているから、この作用点の x 座標を x_β とすると式 (72) の m_n° に相当するものは $P_x x_\beta L_e / EJ_y$ である。よって式 (68) で $m_\theta^\circ = 0$ を考慮して

$$M_n^\circ(23, 23) = \frac{P_x x_\beta L_e}{EJ_y} \cdot \cos \varphi_\theta^\circ \dots \dots \dots (99)$$

$M_n^\circ(23, 23)$ は全体マトリックスにおける要素の位置を示し、式 (97) と同じくスパン中央のねじれ角 φ_θ に対応する位置である。 M_n° のほかの要素はすべて零である。上フランジ中央、ウェブ中央、下フランジ中央のそれぞれに対して

$$x_\beta = -\frac{h}{2}, 0, \frac{h}{2} \dots \dots \dots (100)$$

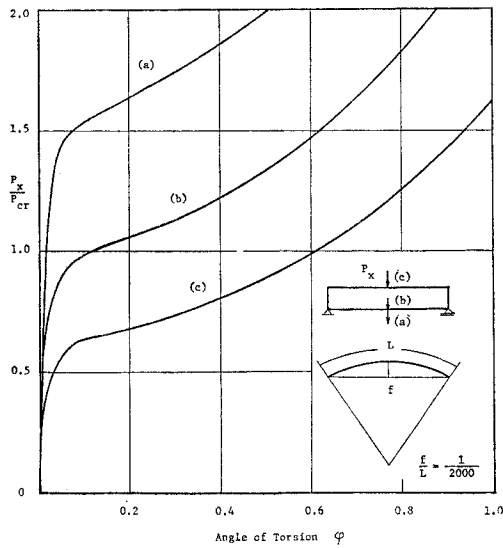
となる。

図一6 から以下のことが読み取れる。

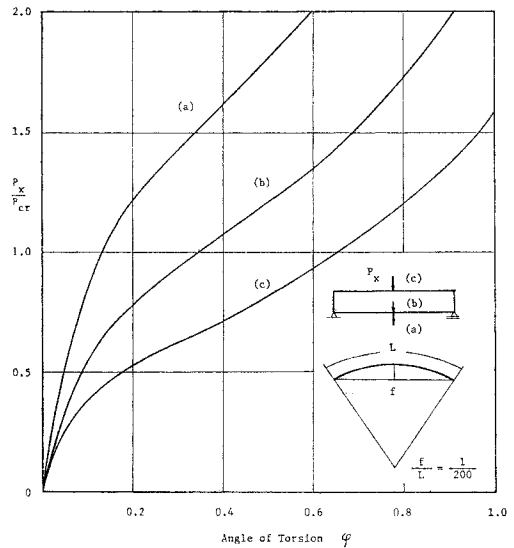
(i) 図一6 (a) は $f/L=1/2000$ の場合であり、荷重位置の違いによる座屈荷重の差異が明瞭に認められる。図中の (c)、すなわち上フランジ中央荷重では座屈直後の曲線形がフラットになっており、三者の中では最も不安定な荷重状態であることがはっきりわかる。

図中の (a)、すなわち下フランジ中央荷重では座屈荷重直後の曲線はほかの場合より立ち上がっており、ねじれ変形でみれば最も安定している様子がわかる。

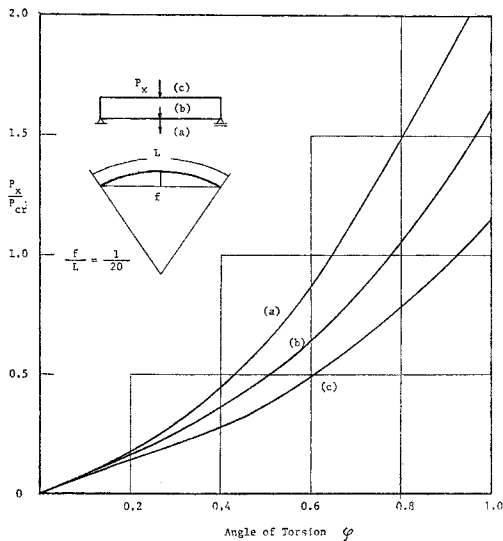
(ii) 図一6 (b) は $f/L=1/200$ の場合であって、荷重位置によらず、それぞれの座屈荷重近傍で曲線の凹凸が逆転しているのがみられる。



(a)



(b)



(c)

図-6

(iii) 図-6 (c) は $f/L=1/20$ の場合であって、ある荷重に対する載荷位置によるねじれ角の大きさの差異は図-6 (a), (b) に比べて小さくなっており、この意味では微小変位理論に近い(微小変位理論では載荷位置による挙動の差はない)。

c) 三角関数を3次近似した場合

ねじれ角 φ が小さい場合、テイラー展開

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + \dots \\ \cos \varphi &= 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (101)$$

を用いて変位場とひずみを $\varepsilon_z, \phi_x, \phi_y, \varphi$ およびこれらの微係数の多項式で近似することができる。固有値問題

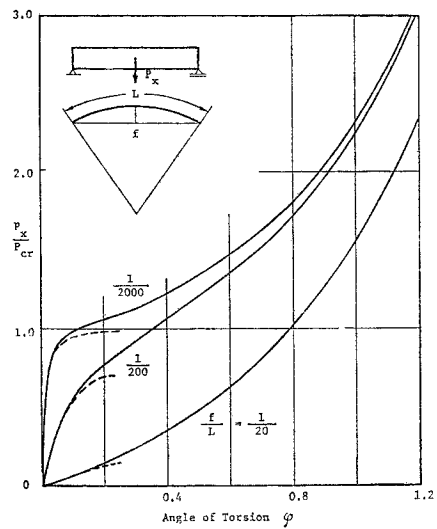


図-7 3次近似との比較

では最低これらの2次の項まで考慮される。3次の多項式で近似した場合の剛性法による曲線桁の解析は著者らが先に報告している¹²⁾。

図-7 は本報告(実線)と文献 12)(破線)との結果を比較したものである。ただウェブ中央に鉛直集中荷重が作用した場合である。パラメーター f/L の値にかかわらず、3次近似ではねじれ角は $\varphi \approx 0.25$ ラジアン程度までしか追跡できず、しかも φ は大きめに評価されることがわかる。

この3次近似では、式(3)のねじれ率 ψ_z'' と式(21)の曲げねじれ率 ϑ_w'' の非線形項も3次近似している。3次近似から得られる剛性マトリックスや初期応力マト

リックスは本報告の式 (59) 以下に比べて複雑であり、この意味においてもテイラー展開式 (101) を用いることは特に利益はないようである。

(4) 二、三の支持条件と作用荷重の場合の結果

有限変位理論においても基本的な単径間桁の構造特性を調べておくことは興味があると考えられるので、以下には支持条件をパラメーターとして、二、三の荷重状態に対する有限ねじれ変形解析の結果を示す。対象とする桁は式 (90), (91) に示した I 型断面である。

a) 端曲げモーメント荷重

図-8 は端曲げモーメントが単純桁の一端、両端に作用した場合と片持ちばりの自由端に作用した場合の解析結果である。前二者については、スパン中央の片持ちばりについては自由端のねじれ角である。片持ちばりの場合、節点荷重は式 (80), (81) で $i=1, \bar{M}_{x1}=0, \bar{M}_{y1}=M_y$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{a1} &= [0, 0, M_y \sin \varphi_1 / \chi, 0]^T \\ \bar{F}_{c1} &= [0, M_y \cos \varphi_1, (\phi_{x1} \cos \varphi_1 - \phi_{y1} \sin \varphi_1) M_y, 0]^T \end{aligned} \right\} \dots (102)$$

となる。節点力 M_y は断面が変位、回転した後の y 軸まわりの曲げ荷重であるから、自由端が変位することによって、変位する以前の x, y 軸まわりの曲げモーメント $M_y \sin \varphi_1, M_y \cos \varphi_1$ および x 軸まわりのねじれモーメント $(\phi_{x1} \cos \varphi_1 - \phi_{y1} \sin \varphi_1) M_y$ が生ずることことに注意しなければならない。

また片持ちばりの場合、式 (84), (85) より重ね合わ

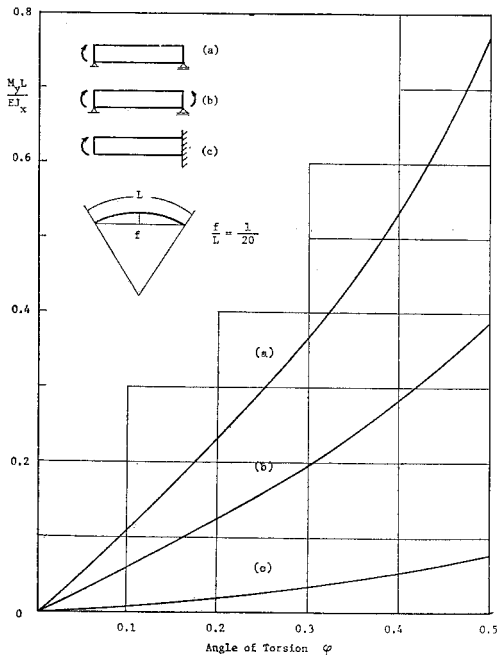


図-8

せ後のマトリックスに対して、 $\bar{M}_{y1} = M_y$ として

$$\left. \begin{aligned} S_{ac}^\circ(3, 3) &= M_y^\circ \cos \varphi_1^\circ \\ S_c^\circ(3, 3) &= -M_y^\circ (\phi_{y1}^\circ \cos \varphi_1^\circ + \phi_{x1}^\circ \sin \varphi_1^\circ) \\ S_c^\circ(2, 3) &= -M_y^\circ \sin \varphi_1^\circ = S_c^\circ(3, 2) \end{aligned} \right\} \dots (103)$$

となり、初期応力マトリックス T° を $T^\circ - S_{ac}^\circ$ に、 M° を $M^\circ - S_c^\circ$ に書き換えねばならない。単純支持桁では式 (102), (103) で $\varphi_1^\circ = 0$ となる。

図-8 (および以下の図) では荷重を EJ_x で無次元化してある。軸線の曲率が $f/L = 1/20 (R = 50m)$ と大きいので支持形式によらず曲線が下に凸となって安定なつり合い状態を示している。

b) 端曲げねじりモーメント荷重

端曲げモーメントと同じ支持条件のもとでの計算結果を図-9 に示す。ねじれ角 φ の値も a) と同じ位置である。図中の記号は、桁端にそり関数 ω と同一符号に直応力 σ_θ が作用する曲げねじれモーメント M_ω が正であることを意味する。

図-9 から曲げ荷重の場合に比べて $\varphi < 0.5$ の範囲では、非線形性が強く現われている。これは曲げねじりモーメントは桁をねじるように作用し、したがって、剛性マトリックス K_c の中で、 $\sin \varphi, \cos \varphi$ を含む非線形項が卓越してくるためと考えられる。

なおこの場合の荷重ベクトル \bar{F}_a, \bar{F}_c は式 (80), (81) より微小変位理論の場合と同じである。

c) 集中ねじりモーメント荷重

両端固定、単純支持および片持ちばりの場合の解析結果を図-10 に示す。前二者はスパン中央の、後者は自由端のねじれ角である。

式 (70) より、スパン中央のねじりモーメントを T_x

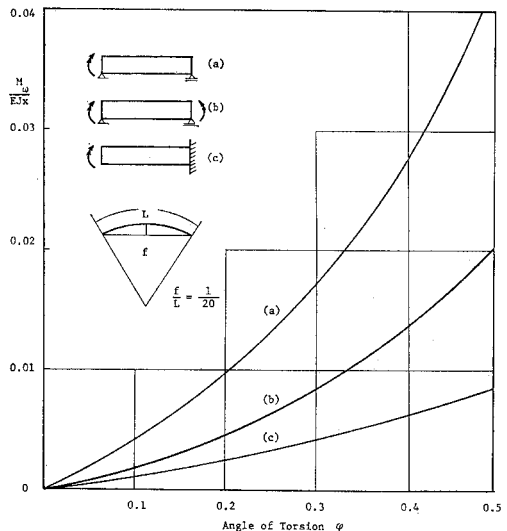


図-9

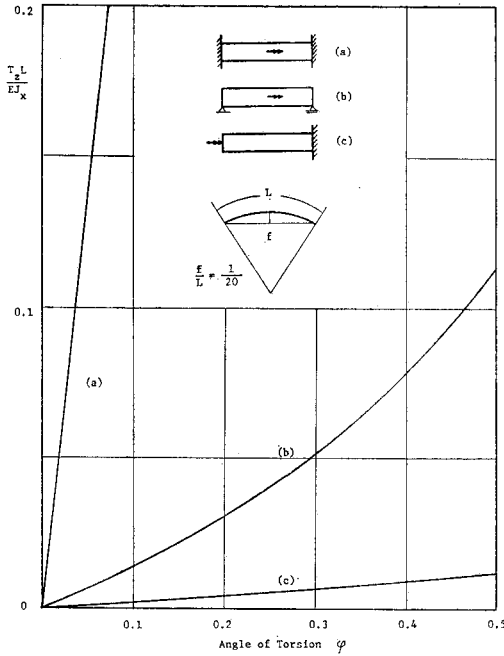


図-10

とするとき m_θ° に相当するものは $T_z (\sim T_z L_e / EJ_x)$ であり、したがって、マトリックス M_n° は式 (68) で $m_n^\circ = 0$ とおいて

$$M_n^\circ(23, 23) = T_z \sin \varphi_\theta^\circ \dots\dots\dots (104)$$

荷重ベクトル f_c は式 (74) で $p_x = m_n = 0$ とおいて

$$f_c(23) = T_z \cos \varphi_\theta^\circ \dots\dots\dots (105)$$

ほかの要素は零である。したがってねじれ角が大きくなるにつれ、 M_n° の値は大きくなり、荷重は小さくなる。

片持ちばりの自由端の材端力ベクトル \bar{f}_c も同様であり、自由度 φ_1 に対応する節点荷重は $\bar{T}_{z1} (= T_z) \cos \varphi_1^\circ$ となる。なお材端曲げの場合と同様に式 (68) の初期応力マトリックス M° を $M^\circ - S_c^\circ$ と修正せねばならない。式 (85) より

$$S_c^\circ(3, 3) = -\bar{T}_{z1} (= -T_z) \cdot \sin \varphi_1^\circ \dots\dots\dots (106)$$

ほかの要素は零である。

図-10 から支持条件によってねじれ変形特性に大差があり、両端固定ばりでは解析した荷重の $(T_z L / EJ_x \leq 0.2)$ 範囲内ではねじれ角は小さくほぼ直線となっており微小変位理論と差はない。また単純支持桁では非線形性がみられるが、片持ちばりでは荷重が小さいためか非線形性ははっきりしない。

(5) 片持ちばりの直応力

図-11 は片持ちばりの自由端に集中

荷重を漸増させていったときの固定端とスパン中央での最大直応力の変化を示す。断面形は式 (90), (91) で定義した断面寸法をもつ標準断面であるがスパン L を $1/2$ とした。したがって、 $h = L/10$, $f/L = 1/40$ となる。

図で実線は固定端の、1点鎖線はスパン中央での σ_θ を表わす。固定端での荷重- σ_θ 曲線は微小変位理論と同様に直線に近いのは変位と変形が拘束されているためと考えられる。

スパン中央での σ_θ はフランジ上の点 (A), (B) ともに非線形性を示し、しかもいずれの点の σ_θ も正の応力の側へ傾いている。有限なねじれを受ける直棒の場合、極断面 2 次半径 $i_p = \sqrt{J_p / F}$ の外側では引張を内側では圧縮応力を受けることがわかっている¹⁸⁾。いまの場合、式 (87) で $h/L = 1/10$ であるから、これと式 (88) および $L_e = L/10$ を考慮すると

$$i_p^2 = \frac{J_x + J_y}{F} = \frac{EJ_x}{EFL_e^2} \left(1 + \frac{J_y}{J_x}\right) L_e^2 \\ = \frac{1}{\alpha_e/4} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) h^2 = 0.1839 h^2 \dots\dots\dots (107)$$

したがって、 $i_p \approx 0.43 h$ となり、上下フランジはともに i_p の外側にあるから、ねじれ変形の進行とともに上下フランジには引張応力が支配的になるのである。

6. 結 論

部材軸線が円弧をなす薄肉曲線 I 型桁を、非線形のみずみ-変位関係式に棒理論の仮定を適用して得られる変位場と応力場を基礎式とし、この基礎式に含まれる $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ (φ は断面ねじれ角) をテイラー展開することなく、仮想仕事の原理から剛性方程式を導き、種々の載荷状態と支持条件に対して数値解析を行った。

得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1) 断面内の任意点の部材軸方向変位 w において、

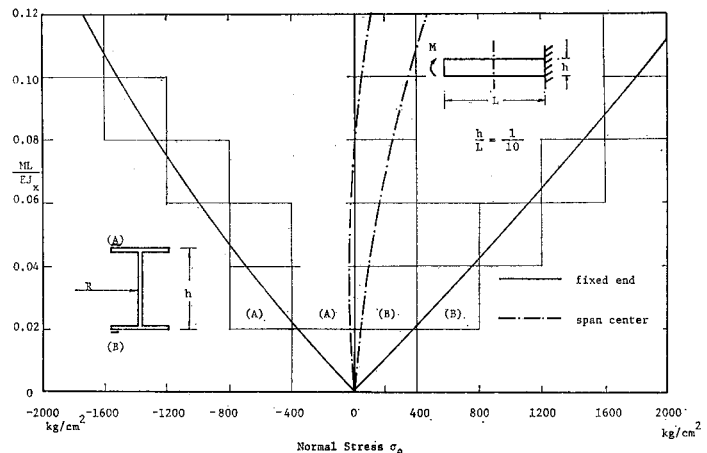


図-11

ねじれ率の非線形項は、断面最大寸法 B が部材長 L および軸線の曲率半径 R の $1/10$ 程度の場合、ほかの非線形項より 1 桁オーダーが高い微小量であり、I 型桁では無視できる。せん断ひずみにおいても同様である。

(2) 直ひずみに及ぼす曲げねじれ率の非線形項は上述の断面寸法のもとで、最低次の非線形項（接線回転角の 2 乗項）の $1/5 \sim 1/6$ であり I 型では無視できる。また母線ごとの曲率半径の差異を考慮することは、ねじれ率や曲げねじれ率の非線形項を考慮することと等価であり、この逆もいえる。

(3) 直ひずみにおけるねじれ率の 2 乗項、したがってひずみエネルギーではねじれ率の 4 乗項は有限ねじれの問題では重要な役割を果し、高次項という理由で無視できない。

(4) 剛性マトリックスや初期応力マトリックスの要素を構成する $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ の関数は、数値積分を利用することにより何ら困難なく積分できる。座屈荷重以上の荷重に対してはスパン中央半径方向にごく小さなねじれ定数をもつ伸縮バネを挿入することによって安定な解が得られる。

(5) ラグランジュ座標での解析であるから、ねじれ変形が大きくなって何らの座標変換も必要としない。部材座標系を用いる従来の方法では部材軸の剛体的回転に伴って、変形後の部材要素両端を結ぶ弦が規準となる空間固定座標系となす角の変化やねじれ角の変化による座標変換が余儀なく、しかもこれは一義的に定まらない（材端でのねじれ角が異なる）欠点がある。ラグランジュ表示の解析ではこの点不明確さはなくすっきりしている。

(6) 本論文で基礎とした変位場は横倒れ座屈のようにねじれ変形が主体となる現象の解析には適しているものであり、アーチの面内座屈や座屈後の挙動をラグランジュ座標系で追跡するためには、曲げに対して精密な変位場を用いるとよい。結局対象とする問題に応じて、ひずみ-変位関係式を吟味し、できるだけ簡潔で、かつ現象の特性を最小限表わし得る変位場を採用することが妥当であろう。

おわりに本研究をまとめるにあたり、問題解決のヒン

トともなった貴重な資料の提供をいただいた金沢工業大学西田 進氏には深く感謝申し上げます。

参考文献

- 1) Vlasov, V.Z. (奥村ほか共訳)：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967.
- 2) Dabrowski, R. : Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenen Profil, Der Stahlbau 33, pp. 364~372, 1964.
- 3) 小西・小松：薄肉曲線桁の基礎理論，土木学会論文集，pp. 35~48, No. 87, 1962.
- 4) 倉西 茂：一般薄肉断面の曲りばり解析，土木学会論文集，No. 108, pp. 7~12, 1964.
- 5) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，No. 110, pp. 30~51, 1964.
- 6) 渡辺 昇：曲線げたの理論と計算，技報堂，1967.
- 2) 西野・深沢：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲りばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，No. 247, pp. 9~19, 1976.
- 8) Schroede, F.H. : Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewunden Trägers mit großen Verformungen, Ingenieur-Archiv, 39. Band, pp. 87~103, 1970.
- 9) 遠田良喜：伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの 2 次の応力問題の解析，土木学会論文報告集，No. 210, pp. 1~11, 1973.
- 10) 薄木征三：変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈，土木学会論文報告集，No. 263, pp. 35~48, 1977.
- 11) 西野・倉方・長谷川・奥村：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 1~15, 1974.
- 12) 薄木・稼農・渡辺：有限なねじれを考慮した薄肉曲線部材の変形解析，土木学会論文報告集，No. 290, pp. 1~15, 1979.
- 13) 西田・吉田・福本：薄肉開断面曲りばりの大変形解析，第 24 回構造工学シンポジウム論文集，pp. 78~84, 1978.
- 14) 倉方・西野：薄肉曲線材の横座屈，第 30 回年次学術講演会講演概要集，第 I 部，pp. 282~284, 1975.
- 15) 依田・平島・井浦：薄肉空間曲線部材の有限変位理論および横座屈問題への応用，第 34 回年次学術講演会講演概要集，pp. 73~74, 1979.
- 16) 事口・久保・中井：薄肉曲線ばりの幾何学的非線形挙動と横倒れ座屈解析への応用，第 24 回構造工学シンポジウム論文集，pp. 69~75, 1978.
- 17) 前田・林：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 253, pp. 13~27, 1976.
- 18) 倉西正嗣：弾性学，pp. 310~313, 国際理工研究社，pp. 310~313, 1970.
- 19) Kollbrunner, C.F. und M. Meister : Knicken, pp. 177~181, Springer-Verlag, 1955.

(1979.12.19・受付)