

## 充実曲線棒材の有限変位場と応力場

FINITE DISPLACEMENT FIELD AND GOVERNING EQUATIONS  
OF SOLID CURVED BEAMS

倉方慶夫\*・西野文雄\*\*

By Yoshio KURAKATA and Fumio NISHINO

## 1. ま え が き

一般に棒材は扱いやすい問題のように見受けられるが、変形に対して種々の拘束条件が付加されるため、有限変位問題となるとその変位場を精確に構成することは面倒な問題となる。特に薄肉断面材ではなおさらである。それがため、棒材の有限変位問題は応力場（つり合い式、力学的境界条件など）と変位場（変位、変形の幾何学量など）がこれまで必ずしも同一レベルで扱われてきておらず、ある面では応力場に比べ変位場の精度が劣っていたといえるであろう。

このことを端的に物語る例としてねじりによる曲げ座屈の問題がある。この問題は Greenhill<sup>1)</sup> によって初めて扱われ、その後 Ziegler<sup>2)</sup> らによって修正を受けたが、このつり合い式や力学的境界条件は幾何学的考察によって求められている。これに対し、変位場をもとに仮想仕事の原理からつり合い式を誘導する方法が変位場と応力場を統一的に扱えることから最近では多く採用されているが、このねじりによる曲げ座屈の問題のつり合い式を誘導するに足る変位場は最近までなかった。これまで多くの研究はあるが、この問題を正しく扱える変位場は、おそらく著者<sup>3)</sup>、平嶋・井浦・依田<sup>4)</sup>および阿井<sup>5)</sup>の研究にあるだけであろう。

棒理論においては、部材軸上の変位や変形で部材一般点の変位や変形を表わし問題の一次元化を図るのであるが、それには次の 2 つの基本点を正しく扱っておかねばならない。その 1 つは部材軸上の変位と変形の表現であり、ここでは特に独立した 3 つの剛体的回転変位とそれに伴う部材軸の変形の表現に注意を要する。他の 1 つの基本点は部材軸の変位と変形を用いて部材一般点の変位と変形を表現することであり、ここでは断面形保持の仮

定が拘束条件として付加される。薄肉断面材の変位場はシェルの中央面の変形に対し、この拘束条件を付加したものであり、拘束条件が増すほどその条件を満足し得る変位場を構成することは面倒な問題となる。薄肉断面材の有限変位場でこの拘束条件を満足し得る変位場は、著者らの研究<sup>3)</sup>と阿井の研究<sup>5)</sup>以外には見当たらない。

有限変位場における棒理論を一般的に展開すると問題が複雑になるので、本稿では最も基本的な問題である部材軸上の変位と変形に着目した議論を行いたく、著者らの研究<sup>3)</sup>を、円形断面あるいはそれに類した断面のようにそり変位の無視できる棒材へ書き改めて報告したい。本稿の前半では曲線材の有限変位問題を一般的に扱うが、そののち直線材へ適用しねじりによる曲げ座屈問題を検討する。

本論に入る前に、ここで対象とした部材形状に関する前提条件と変形に関する仮定を次に記すように定め、さらに若干の用語の定義を行っておく。

- (i) 平面曲線材である。
- (ii) 部材断面は部材軸に沿って一定である。
- (iii) 部材断面は変位後も部材軸に直交する平面を保持し変形しないとみなせる。

部材断面の平面図形としての図心を連ねた曲線を図心軸とよぶことにするが、前提条件 (i) はその図心軸が変位前の状態においてある平面上にあることを前提としている。また前提条件 (i) は変位前において部材にねじり率がないことをも意味する。すなわち図心軸が存在する平面と断面主軸の交角は変位前においては一定とする。

一般に部材軸は部材の重心軸を意味する用語として用いられることが多いが、ここでは図心軸に平行に任意に定められた解析上の基準線を意味する用語として用いる。ここに平行な 2 曲線とは、それぞれ平行な平面上にあり等間隔を保つ曲線を意味するものとする。

本報告では始めのうち添字表記法を用いる。そのため添字に関する規約を定めておく。ラテン文字の添字の範

\* 正会員 工博 新日本技研(株)

\*\* 正会員 Ph.D. 東京大学教授 工学部土木工学科

囲は  $i, j, k, \dots=1, 2, 3$  であり、これに対しギリシャ文字の添字の範囲は  $\alpha, \beta, \gamma, \dots=1, 2$  とし、特にことわらない限り添字間に総和規約を適用する。また下付の添記号として 0 を用い、 $(\ )_0$  と表わすことがあるが、これは単に部材軸上の諸量であることを表わすための記号であり、前記のダミー・インデックスとしては添記号 0 は用いない。また上付の添字と相乗積を表わす記号を区別するため、相乗積を表わす場合には  $(x^i)^2$  のように括弧の肩付にべきを記すことにする。添字表記における微分記号は、

$$(\ )_{,i} = \partial(\ ) / \partial x^i$$

と表わす。

### 2. 変位前の基準状態

この章では、次に述べる右手系座標  $x^i$  を導入し、部材の変位前における形状などの状態を表わす諸量を定義する。

部材の図心軸と平行に任意の位置に部材軸を選び、これを  $x^3$  軸とする。 $x^3$  軸の従法線と主法線をそれぞれ  $x^1$ ,  $x^2$  軸とする。 $x^3$  軸は 図-1 に示すように平面  $A_1$  上の曲線軸である。したがって  $x^1$  軸はこの平面  $A_1$  と直交し、 $x^2$  軸は平面  $A_1$  上にある。

この  $x^i$  座標の共変基本ベクトルと反変基本ベクトルをそれぞれ  $g_i, g^i$  と表わす。特にその部材軸上 ( $x^1 = x^2 = 0$ ) のものを  $e_i, e^i$  と表わすと、直交座標であるから  $\delta_{ij}$  をクロネッカーの記号とすると、

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \quad e^i = e_i \dots\dots\dots (1 \cdot a, b)$$

である。また、

$$e_{i,3} = \mu_i^j e_j \dots\dots\dots (2)$$

と表わすと Frenet の公式により、

$$\begin{bmatrix} \mu_1^1 & \mu_1^2 & \mu_1^3 \\ \mu_2^1 & \mu_2^2 & \mu_2^3 \\ \mu_3^1 & \mu_3^2 & \mu_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_0 \\ 0 & -\kappa_0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

である。ここに  $\kappa_0$  は  $x^3$  軸の曲率であり、 $x^3$  軸の曲率半径を  $r_0$  と表わすと、

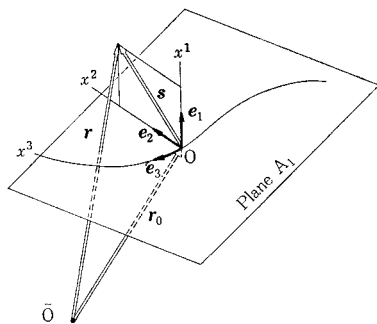


図-1 座標  $x^i$  と位置ベクトル

$$r_0 = 1/\kappa_0 \dots\dots\dots (4)$$

である。

任意の固定点  $\bar{O}$  から部材の一般点へ引いた位置ベクトルを  $r$  とし、特に  $x^3$  軸上の点  $O$  へ引いたものを  $r_0$  と表わす (図-1)。また  $x^3$  軸上の点  $O$  から、その点  $O$  と同一断面上の任意点へ引いた位置ベクトルを  $s$  とする。このとき、

$$r = r_0 + s, \quad s = x^\alpha e_\alpha \dots\dots\dots (5 \cdot a, b)$$

である。基本ベクトルと位置ベクトルの間には、

$$g_i = r_{,i}, \quad e_3 = r_{0,3} \dots\dots\dots (6 \cdot a, b)$$

の関係があるので、上式に式 (5) を代入すると、

$$g_\alpha = e_\alpha, \quad g_3 = \left(\frac{r}{r_0}\right) e_3 \dots\dots\dots (7 \cdot a, b)$$

を得る。ここに、

$$r = r_0 + x^2 \dots\dots\dots (8)$$

である。

計量テンソルの共変成分を  $g_{ij}$  と表わすと、

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j \dots\dots\dots (9)$$

であるから、上式に式 (7) を代入し、

$$\left. \begin{aligned} g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{33} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \\ g_{ij} = 0, \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10 \cdot a \sim c)$$

を得る。したがって  $g_{ij}$  の行列式を  $g$  とすると、

$$g = \det. |g_{ij}| = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \dots\dots\dots (11)$$

である。直交座標 ( $g_{ij} = 0, i \neq j$ ) の場合、計量テンソルの共変成分  $g_{ij}$  と反変成分  $g^{ij}$  の関係は、

$$\left. \begin{aligned} g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}, \quad (i \text{ not summed}) \\ g^{ij} = 0, \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12 \cdot a, b)$$

となる<sup>6)</sup>。ここに ( $i$  not summed) は添字  $i$  に関し総和規約を適用しないことを表わす。反変基本ベクトルと共変基本ベクトルの間には、

$$g^i = g^{ij} g_j$$

の関係があるから、上式に式 (12), (10) を代入し、

$$g^\alpha = g_\alpha, \quad g^3 = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 g_3 \dots\dots\dots (13 \cdot a, b)$$

となる。

### 3. 変位場に関する一般論

棒理論においては部材に沿う軸線の変位をパラメーターとして部材一般点の変位や変形を表わし、問題の一次元化が図られる。本章では基本パラメーターの選定とそれらを用いて一般点の変位や変形を表わす方法について記す。そのための表記上の約束や後の記述の便利のためにいくつかの諸量の定義を前もって行っておく。

部材の変位後の状態を記述するに  $x^i$  座標は部材と

もに変位し変形する物体固定座標として扱い、この変位後の座標の基本ベクトルを変位前の基本ベクトルの記号  $g_i, e_i$  に上付の  $\hat{\phantom{x}}$  を付けて  $\hat{g}_i, \hat{e}_i$  と表わす。これと同様に今後上付の  $\hat{\phantom{x}}$  は、変位前にそれと同種の量が定義されている場合、もしくは変位前にそれと同種の量を定義し得る場合（すなわち、変位後で定義された量から変位や変形項を除去しても一般にそれが零とならない場合）に変位前のものと区別して変位後の量であることを表わすのに用いる。したがって変位後の計量テンソルの共変成分は、式 (9) に対し、

$$\hat{g}_{ij} = \hat{g}_i \cdot \hat{g}_j \quad \dots\dots\dots(14)$$

と表わすことになる。これを用いひずみテンソル  $e_{ij}$  は、

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{ij} - g_{ij}) \quad \dots\dots\dots(15)$$

と定義される<sup>6)~8)</sup>。このほか、ここでは部材軸方向線素の通常の伸びひずみ  $\varepsilon$  として次の量を定義しておく。

$$\varepsilon = \frac{|\hat{g}_3| - |g_3|}{|g_3|} = \frac{r_0}{r} (\hat{g}_{33})^{1/2} - 1 \quad \dots\dots\dots(16)$$

以下順次この章では部材軸上の変位、変形と一般点の変位後の諸量の関係を求めていく。

(1) 仮定の数式化

変位後の基本ベクトルを用いて、1. に記した仮定 (iii) を表わすと次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta &= \delta_{\alpha\beta}, \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_3 = 0 \\ \hat{g}_\alpha &= \hat{e}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17 \cdot a \sim c)$$

すなわち変位後も部材軸上では3つの基本ベクトル  $\hat{e}_i$  は互いに直交し、さらに一般点においても断面方向の2つの基本ベクトル  $\hat{g}_\alpha$  は互いに直交する単位ベクトルを保つ。これに対し変位後一般に  $\hat{g}_\alpha$  と  $\hat{g}_3$  は直交せず、 $\hat{g}_3$  は変位前と値が変わる。

(2) 部材軸上の変位と変形

a) 部材軸上の変位ベクトルと部材軸の伸張変形

部材軸である  $x^3$  軸上の変位ベクトルを  $u$  とし、

$$u = u^i e_i \quad \dots\dots\dots(18)$$

と表わす。したがって  $x^3$  軸上の点の変位後の位置ベクトルは、

$$\hat{r}_0 = r_0 + u \quad \dots\dots\dots(19)$$

となり、これより、

$$\hat{e}_3 = \hat{r}_{0,3} = (\delta_3^i + u^i \|_3) e_i \quad \dots\dots\dots(20)$$

を得る。ここに  $u^i \|_3$  は変位前の  $x^3$  軸上の基本ベクトル  $e_i$  に関して定義される、 $x^3$  による共変微分を表わし、

$$\left. \begin{aligned} u^1 \|_3 &= u_{,3}^1, \quad u^2 \|_3 = u_{,3}^2 - \kappa_0 u^3 \\ u^3 \|_3 &= u_{,3}^3 + \kappa_0 u^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(21 \cdot a \sim c)$$

である。

部材軸上の変位後の計量テンソル  $\hat{g}_{33}$  を特に  $\hat{g}_0$  と表わすと、

$$\hat{g}_0 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = (u^1 \|_3)^2 + (u^2 \|_3)^2 + (1 + u^3 \|_3)^2 \dots\dots(22)$$

である。式 (16) で定義した通常の伸びひずみ  $\varepsilon$  の部材軸上の値を

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(x^1=0, x^2=0, x^3) \dots\dots\dots(23)$$

と表わすと、式 (16), (22) から次のようになる。

$$\varepsilon_0 = (\hat{g}_0)^{1/2} - 1 \quad \text{すなわち} \quad (\hat{g}_0)^{1/2} = 1 + \varepsilon_0 \quad \dots\dots(24)$$

b) 部材軸の角運動

ベクトル  $\hat{e}_i$  のうち  $\hat{e}_3$  は一般に単位ベクトルでない。そこで表記の都合上、変位前に部材軸の各点で、

$$\hat{b}_i = \hat{e}_i \quad \dots\dots\dots(25)$$

となるように部材軸に固定された単位ベクトル  $\hat{b}_i$  を考える。ベクトル  $\hat{b}_i$  は部材軸とともに変位、回転するが、変位後も直交する単位ベクトルを保つとする。式 (17) に示す仮定によりベクトル  $\hat{e}_i$  も直交する3つのベクトルであるから、

$$\hat{b}_\alpha = \hat{e}_\alpha, \hat{b}_3 = \frac{\hat{e}_3}{(\hat{g}_0)^{1/2}}, \hat{b}_i \cdot \hat{b}_j = \delta_{ij} \quad \dots\dots(26 \cdot a \sim c)$$

の関係がある。

図-2 にベクトル  $\hat{b}_i$  の回転運動を表わすが、ベクトル  $\hat{b}_i$  を法線ベクトルとする平面を平面  $A_i$ 、ベクトル  $\hat{b}_i$  を法線ベクトルとする平面を平面  $\hat{A}_i$  と表わしてある。この図に示す  $x^3$  軸のたわみ角  $\alpha_i$  は式 (26), (20) から、

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_\alpha &= \hat{b}_3 \cdot \hat{b}_\alpha = \frac{1}{(\hat{g}_0)^{1/2}} u^\alpha \|_3 \\ \cos \alpha_3 &= \hat{b}_3 \cdot \hat{b}_3 = \frac{1}{(\hat{g}_0)^{1/2}} (1 + u^3 \|_3) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(27 \cdot a, b)$$

となる。上式を式 (22) に代入し、

$$\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 \quad \dots\dots\dots(28)$$

である。

このようにベクトル  $\hat{b}_3$  の回転運動は  $x^3$  軸上の変位成分  $u^i$  によって表わせたが、ベクトル  $\hat{b}_i$  のすべての回転運動を表わすには、このほかにベクトル  $\hat{b}_\alpha$  の回転

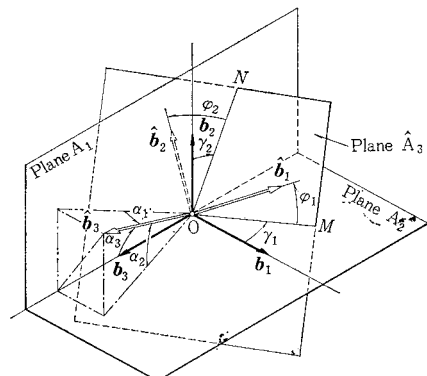


図-2 部材軸上の角変位

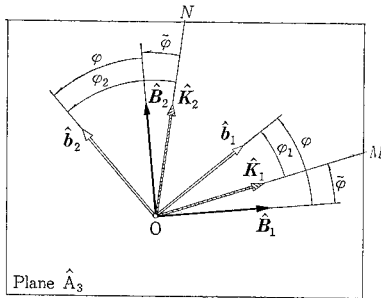


図-3 断面のねじり回転

運動を表わす変位パラメーターを導入する必要がある。図-2 に示すように平面  $\hat{A}_3$  と平面  $A_1, A_2$  との交線を  $\overline{OM}, \overline{ON}$  とし、それらの交線と  $\hat{b}_1, \hat{b}_2$  のなす角を  $\varphi_1, \varphi_2$  とすると一般に  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  である。 $\hat{b}_\alpha$  と  $b_\alpha$  のなす角を考えても添字  $\alpha=1, 2$  でその角は一般に異なる。そこで残る1つの変位パラメーターとして、 $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の平均値  $\varphi$  を採用し  $\hat{b}_i$  の角運動を表現することにする。

図-3 に示すように交線  $\overline{OM}, \overline{ON}$  上に  $\overline{OM}, \overline{ON}$  方向を向く単位ベクトル  $\hat{K}_1, \hat{K}_2$  を考え、図-2 に示すように  $\hat{K}_\alpha$  と  $b_\alpha$  のなす角を  $r_\alpha, \hat{K}_\alpha$  と  $\hat{b}_\alpha$  のなす角を  $\varphi_\alpha$  と表わすと、

$$\hat{K}_\alpha = \cos r_\alpha b_\alpha - \sin r_\alpha b_3, \quad (\alpha \text{ not summed}) \quad (29)$$

である。また  $\hat{K}_\alpha$  は平面  $\hat{A}_3$  上のベクトルであるから、 $\hat{K}_\alpha \cdot \hat{b}_3 = 0$  (30)

である。上式に式 (29) を代入し式 (27) の関係を用いると、角  $\alpha_i$  と  $r_\alpha$  の関係として、

$$\sin \alpha_\alpha \cos r_\alpha - \cos \alpha_3 \sin r_\alpha = 0, \quad (\alpha \text{ not summed}) \quad (31)$$

を得る。今後、 $\hat{b}_3$  が  $b_3$  に対し  $90^\circ$  以上も回転するような特別に大きな変位は扱わないものとし、角変位  $\alpha_3$  に対して次の条件を付す。

$$\pi/2 > \alpha_3 > -\pi/2 \quad (32 \cdot a)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \pi/2 > \alpha_\alpha > -\pi/2 \\ \pi/2 > r_\alpha > -\pi/2 \end{aligned} \right\} \quad (32 \cdot b, c)$$

である。このとき式 (31) から、

$$\tan r_\alpha = \frac{\sin \alpha_\alpha}{\cos \alpha_3} \quad (33)$$

を得る。また式 (28) を用いると式 (32) の条件のもと

$$\left. \begin{aligned} (\hat{B})^{1/2} \hat{C}_1^1 &= \left( \cos \alpha_1 + \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_2} \right) \cos \varphi - \left( \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} \right) \sin \varphi \\ (\hat{B})^{1/2} \hat{C}_1^2 &= - \left( \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1} \right) \cos \varphi + \left( \cos \alpha_2 + \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_1} \right) \sin \varphi \\ (\hat{B})^{1/2} \hat{C}_1^3 &= - \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3) \right\} \cos \varphi - \left\{ \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_3) \right\} \sin \varphi \\ (\hat{B})^{1/2} \hat{C}_2^1 &= - \left( \cos \alpha_1 + \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_2} \right) \sin \varphi - \left( \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} \right) \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

で式 (33) から、

$$\sin r_\alpha = \frac{\sin \alpha_\alpha}{\cos \alpha_\beta}, \quad \cos r_\alpha = \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_\beta}, \quad (\alpha \neq \beta) \quad (34 \cdot a, b)$$

を得る。上式を式 (29) に代入すると次のようである。

$$\hat{K}_\alpha = \frac{1}{\cos \alpha_\beta} (\cos \alpha_3 b_\alpha - \sin \alpha_\alpha b_3), \quad (\alpha \neq \beta) \quad (35)$$

$\hat{K}_1$  と  $\hat{K}_2$  は図-3 に示すように一般には直交しない。そこで  $\hat{K}_\alpha$  と同一平面上にあり、

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_\alpha \cdot \hat{B}_\beta &= \delta_{\alpha\beta} \\ \hat{B}_1 \cdot \hat{K}_1 &= \hat{B}_2 \cdot \hat{K}_2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (36 \cdot a, b)$$

の条件を満たす単位ベクトル  $\hat{B}_\alpha$  を考えると、それは次のように求まる。

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{(\hat{B})^{1/2}} \left\{ \left( \cos \alpha_1 + \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_2} \right) b_1 - \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1} b_2 - \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \cdot (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3) b_3 \right\} \quad (37 \cdot a)$$

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{(\hat{B})^{1/2}} \left\{ - \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} b_1 + \left( \cos \alpha_2 + \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_1} \right) b_2 - \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \cdot (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_3) b_3 \right\} \quad (37 \cdot b)$$

ここに、

$$\hat{B} = 2 \cdot \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \quad (38)$$

である。この結果、 $\hat{B}_\alpha$  と  $\hat{b}_\alpha$  のなす角は添字  $\alpha=1, 2$  について等しく、その角は  $\hat{K}_\alpha$  と  $\hat{b}_\alpha$  のなす角  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の平均値となっている。すなわち図-3 に示すように角変位  $\varphi$  の正の向きを定めると、

$$\hat{B}_1 \cdot \hat{b}_1 = \hat{B}_2 \cdot \hat{b}_2 = \cos \varphi, \quad \hat{B}_1 \cdot \hat{b}_2 = -\hat{B}_2 \cdot \hat{b}_1 = \sin \varphi$$

であり、これより、

$$\left. \begin{aligned} \hat{b}_1 &= \hat{B}_1 \cos \varphi + \hat{B}_2 \sin \varphi \\ \hat{b}_2 &= -\hat{B}_1 \sin \varphi + \hat{B}_2 \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (39 \cdot a, b)$$

を得る。上式に式 (37) を代入すると  $\hat{b}_\alpha$  と  $b_i$  の関係が求まるが、式 (27) とあわせて  $\hat{b}_i$  は次のように表わせる。

$$\hat{b}_i = \hat{C}_i^j b_j \quad (40)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} (\hat{B})^{1/2} \hat{C}_2^2 &= \left( \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1} \right) \sin \varphi + \left( \cos \alpha_2 + \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_1} \right) \cos \varphi \\ (\hat{B})^{1/2} \hat{C}_2^3 &= \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3) \right\} \sin \varphi - \left\{ \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_3) \right\} \cos \varphi \\ \hat{C}_3^1 &= \sin \alpha_1, \hat{C}_3^2 = \sin \alpha_2, \hat{C}_3^3 = \cos \alpha_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41 \cdot a \sim i)$$

である。これによって部材軸上の角運動は、部材軸上で選んだ変位パラメータ  $u^i$  と  $\varphi$  によって表わされたわけであるが、上式は大変複雑であるのでその近似式については **Appendix A** に記す。

$\hat{K}_\alpha$  と  $\hat{B}_\alpha$  の交角を 図-3 に示すように  $\tilde{\varphi}$  と表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \cos \tilde{\varphi} &= \hat{K}_1 \cdot \hat{B}_1 = \hat{K}_2 \cdot \hat{B}_2 = \frac{1}{2} (\hat{B})^{1/2} \\ \sin \tilde{\varphi} &= \hat{K}_2 \cdot \hat{B}_1 = -\hat{K}_1 \cdot \hat{B}_2 = \frac{1}{(\hat{B})^{1/2}} \tan \alpha_1 \tan \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42 \cdot a, b)$$

である。

c) 部材軸の曲率とねじり率

部材軸の伸張変形については式 (22), (24) で扱った。ここでは部材軸の曲がりやねじり変形を表わすものとして、次に定義する量  $\hat{\mu}_i^j$  を求める。

$$\hat{b}_{i,3} = \hat{\mu}_i^j \hat{b}_j \dots \dots \dots (43 \cdot a)$$

$\hat{b}_i$  は互いに直交する単位ベクトルであるから、上式より、

$$\mu_i^j = \hat{b}_{i,3} \cdot \hat{b}_j \dots \dots \dots (43 \cdot b)$$

となる。ここに  $\hat{b}_{i,3}$  は式 (40) から、

$$\hat{b}_{i,3} = \hat{C}_i^j \parallel_3 \hat{b}_j \dots \dots \dots (44)$$

であり、式 (21) の場合と同様に  $\hat{C}_i^j \parallel_3$  は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_i^1 \parallel_3 &= \hat{C}_{i,3}^1, \hat{C}_i^2 \parallel_3 = \hat{C}_{i,3}^2 - \kappa_0 \hat{C}_i^3 \\ \hat{C}_i^3 \parallel_3 &= \hat{C}_{i,3}^3 + \kappa_0 \hat{C}_i^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45 \cdot a \sim c)$$

である。式 (40), (44) を式 (43 \cdot b) に代入し、

$$\hat{\mu}_i^j = \hat{C}_i^k \parallel_3 \hat{C}_j^k \dots \dots \dots (46)$$

を得る。上式に式 (41), (45) を代入し、 $\hat{\mu}_i^j$  を  $\alpha_\alpha$  と  $\varphi$  で厳密に表わすことは大変煩雑であり困難であるので、その近似的扱いは **Appendix A** で行う。

式 (26 \cdot c) の両辺を  $x^3$  で微分すると

$$\hat{b}_{i,3} \cdot \hat{b}_j + \hat{b}_{j,3} \cdot \hat{b}_i = 0$$

であるから、上式と式 (43 \cdot b) から

$$\hat{\mu}_i^j = -\hat{\mu}_j^i \dots \dots \dots (47)$$

である。特に上式で  $i=j$  の場合には、

$$\hat{\mu}_i^i = 0, (i \text{ not summed})$$

となる。したがって9成分の  $\hat{\mu}_i^j$  のうち有意なものも  $\hat{\mu}_\alpha^3$  と  $\hat{\mu}_1^2$  の3成分となり、これらをそれぞれ  $x^3$  軸の曲率とねじり率の物理成分とよぶことにする。これに対し、

$$\hat{e}_{\alpha,3} = \hat{\lambda}_{0\alpha}^i \hat{e}_i, \hat{\lambda}_{0\alpha}^i = \hat{e}_{\alpha,3} \cdot \hat{e}^i \dots \dots \dots (48 \cdot a, b)$$

で定義される  $\hat{\lambda}_{0\alpha}^3$  と  $\hat{\lambda}_{01}^2$  をそれぞれ単に曲率とねじり率とよぶことにする。

$\hat{e}_i$  は互いに直交するベクトルであり、このうち  $\hat{e}_\alpha$  は単位ベクトルであるので、式 (13) と同様に、

$$\hat{e}^\alpha = \hat{e}_\alpha, \hat{e}^3 = \frac{1}{\hat{g}_0} \hat{e}_3 \dots \dots \dots (49 \cdot a, b)$$

となる。したがって式 (48) に式 (49), (26) および (43 \cdot b) を代入すると、

$$\hat{\lambda}_{0\alpha}^3 = \frac{1}{(\hat{g}_0)^{1/2}} \hat{\mu}_\alpha^3, \hat{\lambda}_{0\alpha}^\beta = \hat{\mu}_\alpha^\beta \dots \dots \dots (50 \cdot a, b)$$

となる。

$\hat{\mu}_i^j$  の変位に伴う増分を  $\Delta \hat{\mu}_i^j$  と表わすと、式 (3) から  $\mu_1^3$  や  $\mu_1^2$  は零であるから、

$$\hat{\mu}_1^3 = \Delta \hat{\mu}_1^3, \hat{\mu}_2^3 = \kappa_0 + \Delta \hat{\mu}_2^3, \hat{\mu}_1^2 = \Delta \hat{\mu}_1^2 \dots \dots \dots (51 \cdot a \sim c)$$

である。

(3) 部材一般点の変位と変位後の基本ベクトル

部材断面は変位後も平面を保持し変形しないとしているので、部材一般点の変位置の位置ベクトルは、

$$\hat{r} = \hat{r}_0 + x^\alpha \hat{e}_\alpha \dots \dots \dots (52)$$

と表わせる。一般点の変位ベクトルを  $v$  とし、

$$v = \hat{v}^i \hat{e}_i \dots \dots \dots (53)$$

と展開する。

$$v = \hat{r} - r$$

であるから、上式に式 (52), (18), (19), (40), (25), (26) を代入すると、一般点の変位成分  $\hat{v}^i$  は次のように求まる。

$$\hat{v}^i = u^i + x^\alpha (\hat{C}_\alpha^i - \delta_\alpha^i) \dots \dots \dots (54)$$

変位後の一般点の基本ベクトルは、

$$\hat{g}_i = \hat{r}_{,i}$$

であるが、 $\hat{g}_\alpha$  についてはすでに式 (17 \cdot c) で  $\hat{e}_\alpha$  との関係を示してある。上式に式 (52), (20), (48 \cdot a) を代入し、

$$\hat{g}_3 = (\delta_3^i + x^\alpha \hat{\lambda}_{0\alpha}^j) \hat{e}_j \dots \dots \dots (55)$$

を得る。

(4) 変位後の計量テンソルとひずみテンソル

変位後の計量テンソルと基本ベクトルの関係は式 (14) で与えられる。これに式 (17), (22), (55) および (50) の関係を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \hat{g}_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta}, \hat{g}_{3\alpha} = \hat{g}_{3\alpha} = x^\beta \hat{\lambda}_{0\beta}^\alpha = x^\beta \hat{\mu}_\beta^\alpha \\ \hat{g}_{33} &= \hat{g}_0 (1 + x^\alpha \hat{\lambda}_{0\alpha}^3)^2 + (x^1 \hat{\lambda}_{01}^2)^2 + (x^2 \hat{\lambda}_{02}^1)^2 \end{aligned} \right\} /$$

$$= \left( \frac{r}{r_0} + \varepsilon_0 + x^\alpha D \hat{u}_\alpha^3 \right)^2 + (x^1 \hat{u}_1^3)^2 + (x^2 \hat{u}_2^3)^2 \left. \vphantom{\left( \frac{r}{r_0} + \varepsilon_0 + x^\alpha D \hat{u}_\alpha^3 \right)^2} \right\} \dots\dots\dots (56 \cdot a \sim c)$$

を得る。

式 (15) に上式および式 (10) を代入すると、ひずみテンソルは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= 0, e_{\alpha 3} = e_{3\alpha} = \frac{1}{2} x^\beta \hat{u}_\beta^\alpha \\ e_{33} &= (\varepsilon_0 + x^\alpha D \hat{u}_\alpha^3) \left\{ \frac{r}{r_0} + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 + x^\alpha D \hat{u}_\alpha^3) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (x^1)^2 + (x^2)^2 \} (\hat{u}_1^3)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57 \cdot a \sim c)$$

式 (16) に示す部材軸方向線素の通常の伸びひずみ  $\varepsilon$  とひずみテンソル  $e_{33}$  の関係は次のようである。

$$e_{33} = \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \varepsilon \dots\dots\dots (58)$$

また、ひずみテンソル  $e_{ij}$  の物理成分を  $\bar{e}_{ij}$  とすると

$$\bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{(g_{ii}g_{jj})^{1/2}}, \quad (i, j \text{ not summed}) \dots (59)$$

と定義される<sup>7)</sup>。上式に式 (10) を代入し、

$$\bar{e}_{\alpha 3} = \bar{e}_{3\alpha} = \frac{r_0}{r} e_{3\alpha}, \quad \bar{e}_{33} = \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 e_{33} \dots (60 \cdot a, b)$$

### 4. 二軸曲げを受ける曲線材の 2 次の有限変位理論

3. の変位場を厳密に扱うことは実質上不可能に近い。

**Appendix A** で行ったように  $\sin \alpha_\alpha$  の 3 次項までを考慮した近似式においても、この変位場を用いて仮想仕事の原理からつり合い式を誘導することはかなり複雑な問題である。しかし実際上の問題を考えると、それほど高次の非線形項を考慮する必要のない問題が多いと思える。そこでここでは次に記す近似化のためのいくつかの仮定のもとに、2 次の非線形項までを考慮した近似解析(ただし  $\varphi$  そのものは任意の有限量とする)を行う。

まず、ここで用いる仮定を 1. に記した棒理論の基本仮定 (i) ~ (iii) の続き番号で表わす。

(iv) ひずみは 1 に比べ十分小さい微小ひずみである。

$$1 \gg |\varepsilon|, \quad 1 \gg |e_{ij}| \dots\dots\dots (61 \cdot a, b)$$

(v) たわみ角  $\alpha_\alpha$  は有限ではあるが、1 に比べ比較的小さく、その正弦の 2 次項である ( $\sin \alpha_\alpha \cdot \sin \alpha_\beta$ ) は 1 に比べ十分小さいものとする。

$$1 \gg |\sin \alpha_\alpha \cdot \sin \alpha_\beta| \dots\dots\dots (62)$$

断面寸法を  $D$  とするとき  $D \hat{u}_1^2$  は一般点での軸方向線素のたわみ角の増分を表わすので、上記と同様に、

$$1 \gg (D \hat{u}_1^2)^2 \dots\dots\dots (63)$$

とする。ただし細長い部材を考えるとねじり率は比較的小さくとも回転変位  $\varphi$  は有限であり得るので、 $\varphi$  そのものは任意の有限量とする。

(vi) 以上の (iv), (v) を前提とする比較の変位が小さい有限変位問題を扱うので、変位場においては、たわみ角  $\alpha_\alpha$  や  $x^3$  軸上の変形量  $\varepsilon_0, D \hat{u}_j^i$  に関し、それらの微係数も含めて 3 次以上の非線形高次項の影響は、1 次、2 次の項に比べ小さく無視できるものとする。回転変位  $\varphi$  は任意の有限量としているので、このことは、“変位パラメーター  $u^i, \varphi$  のうち、 $\varphi$  そのものは除外して、変位パラメーターとその微係数に関し 3 次以上の非線形項を無視する”とも表現できる。

微小変位問題では、変位が微小であるという前提のもとに、変位パラメーター  $u^i$  と  $\varphi$  に関する非線形項を無視するが、ここではそれより 1 つオーダーの高い 2 次の有限変位理論としての変位場と応力場を求めることを目的とする。ただし仮定 (v) に記したように回転変位  $\varphi$  そのものは任意の有限量とする。また、解析上の注意点として、仮想仕事の原理によりつり合い式などを導く場合、変分演算前に仮定 (iv) を適用すると有意な 2 次の非線形項が一部失われるので、次の変位場においては仮定 (iv) を適用しないでおく。

このほか、表記法として、これまでは添字表記法を用いてきたが、今後は 3. で一般論を行った変位場の応用例となるので、通常の表記法を主体として表わす。

#### (1) 変位場

表記法の変更に伴い、添字表記で用いた座標や変位、変形に関する記号を表-1 に示す通常表記の記号に改める。このほか、

$$\hat{g}_i, \hat{e}_i, \hat{b}_i, \hat{g}_{ij}, e_{ij}$$

などは、添字を

$$\text{添字 } 1, 2, 3 \rightarrow \text{添字 } x, y, z$$

と改める。また上付の  $\hat{}$  や前付の  $d(\ )$  については、通常表記においても、これまでと同様に扱うほか、

表-1 添字表記と通常表記の記号の対応

	添字表記	通常表記
座 標	$x_1, x_2, x_3$	$x, y, z$
変 位	$u^1, u^2, u^3$ $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3$ $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	$u_0, v_0, w_0$ $u, v, w$ $\varphi, \varphi_x, \varphi_y$ $\alpha, \beta, \gamma$
変 形	$\varepsilon_0, \varepsilon$ $\hat{\mu}_1^3, \hat{\mu}_2^3, \hat{\mu}_3^3$ $\hat{\lambda}_{01}^3, \hat{\lambda}_{02}^3, \hat{\lambda}_{01}^2$	$\varepsilon_{20}, \varepsilon_z$ $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_\varphi$ $\hat{\varepsilon}_x, \hat{\varepsilon}_y, \hat{\varepsilon}_\varphi$
応力テンソルの物理成分	$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ $\sigma_{01}, \sigma_{02}$ など	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ $\tau_{zx}, \tau_{zy}$ など
外 力	$\hat{p}^1, \hat{p}^2, \hat{p}^3$ $\sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}$	$\hat{p}_{zd}, \hat{p}_{yd}, \hat{p}_{zd}$ $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$

$$\kappa_0, r_0, r, \varphi, \hat{g}_0$$

についても、添字表記の場合と同じ記号を用いる。微分記号については、

$$(\cdot)_{,3} \rightarrow (\cdot)'$$

と改める。

式 (21), (22) から、

$$\hat{g}_0 = (u_0')^2 + (v_0' - \kappa_0 w_0)^2 + (1 + w_0' + \kappa_0 v_0)^2 \dots\dots\dots (64)$$

である。式 (24) に上式を代入し平方根を展開し、3 次以上の非線形項を無視すると、

$$\varepsilon_{z0} = (\hat{g}_0)^{1/2} - 1 = w_0' + \kappa_0 v_0 + \frac{1}{2} \{ (u_0')^2 + (v_0' - \kappa_0 w_0)^2 \} \dots\dots\dots (65)$$

となる。

部材軸のたわみ角  $\alpha, \beta$  は、式 (27) から、

$$\sin \alpha = \frac{u_0'}{(\hat{g}_0)^{1/2}}, \quad \sin \beta = \frac{v_0' - \kappa_0 w_0}{(\hat{g}_0)^{1/2}} \dots\dots\dots (66 \cdot a, b)$$

であるが、仮定 (iv) により今後は、

$$\sin \alpha = \alpha, \quad \sin \beta = \beta \dots\dots\dots (67 \cdot a, b)$$

と表わす。

一般点の変位  $u, v, w$  は、式 (54) に **Appendix A** の式 (A・2) を代入し、次のようになる。

$$u = u_0 + x \left\{ (\cos \varphi - 1) - \frac{1}{2} \alpha (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \right\} + y \left\{ -\sin \varphi + \frac{1}{2} \alpha (\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi) \right\} \dots\dots\dots (68 \cdot a)$$

$$v = v_0 + x \left\{ \sin \varphi - \frac{1}{2} \beta (\beta \sin \varphi + \alpha \cos \varphi) \right\} + y \left\{ (\cos \varphi - 1) - \frac{1}{2} \beta (\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi) \right\} \dots\dots\dots (68 \cdot b)$$

$$w = w_0 - x (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) - y (\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi) \dots\dots\dots (68 \cdot c)$$

同様に、曲率成分  $\hat{u}_x, \hat{u}_y$  とねじり率  $\hat{u}_\varphi$  は **Appendix A** の式 (A・3) から、 $\alpha, \beta$  に関する 3 次項を無視して、

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_x &= - \left( \alpha' - \frac{1}{2} \kappa_0 \alpha \beta \right) \cos \varphi \\ &+ \left\{ (\kappa_0 - \beta') - \frac{1}{2} \kappa_0 \alpha^2 \right\} \sin \varphi \\ \hat{u}_y &= \left\{ (\kappa_0 - \beta') - \frac{1}{2} \kappa_0 \alpha^2 \right\} \cos \varphi \\ &+ \left( \alpha' - \frac{1}{2} \kappa_0 \alpha \beta \right) \sin \varphi \\ \hat{u}_\varphi &= \varphi' + \kappa_0 \alpha - \frac{1}{2} (\beta' \alpha - \alpha' \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots (69 \cdot a \sim c)$$

となる。式 (56) において仮定 (vi) を  $\hat{u}_\varphi$  に適用すると

$$(\hat{g}_{zz})^{1/2} = \frac{r}{r_0} + \varepsilon_{z0} + x \Delta \hat{u}_x + y \Delta \hat{u}_y + \frac{1}{2} \frac{r_0}{r} (\rho \hat{u}_\varphi)^2 \dots\dots\dots (70)$$

となる。ここに、式 (51) から

$$\Delta \hat{u}_x = \hat{u}_x, \quad \Delta \hat{u}_y = \hat{u}_y - \kappa_0 \dots\dots\dots (71 \cdot a, b)$$

であり、また、

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots (72)$$

と表わした。式 (70) を式 (16) に代入し、部材軸方向線素の通常の伸びひずみ  $\varepsilon_z$  は次のようになる。

$$\varepsilon_z = \frac{r_0}{r} (\varepsilon_{z0} + x \Delta \hat{u}_x + y \Delta \hat{u}_y) + \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{r} \rho \hat{u}_\varphi \right)^2 \dots\dots\dots (73)$$

ひずみテンソルは、式 (57), (58) から

$$\left. \begin{aligned} e_{xz} = e_{zx} &= -\frac{1}{2} y \hat{u}_\varphi, \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} x \hat{u}_\varphi \\ e_{zz} &= \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_z \right) \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (74 \cdot a \sim c)$$

であり、他のひずみテンソルは零である。

## (2) つり合い式と境界条件

この節では、はじめのうち再び添字表記法を用いて記述する。

部材に分布して作用する外力 (体積力) と両端断面に外力として作用する表面力を受けつり合っている部材に対し、仮想仕事の原理は次のように表わせる<sup>9)</sup>。

$$\iiint_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV - \iiint_V \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \left[ \bar{n}_z \iint_A \bar{\sigma} \cdot \delta \mathbf{v} dA \right]_{z^1=z_1}^{z^2=z_2} = 0 \dots\dots\dots (75)$$

ここに、

- $\sigma^{ij}$ :  $x^i$  座標系における応力テンソル
- $\mathbf{p}$ : 変位前の単位体積当りの分布外力
- $\bar{\sigma}$ : 変位前の単位表面積当りの部材端表面外力
- $\bar{n}_z$ : 変位前の状態における部材端断面の外向き単位法線ベクトルの  $e_3$  方向成分
- $z_1, z_2$ : 部材両端断面の  $x^3$  座標
- $dV = (g)^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3, dA = dx^1 dx^2$    
  $\dots\dots\dots (76 \cdot a, b)$

である。

変位前の基準状態において、断面は  $x^3$  軸に直交する平面であるから、 $z_1 < z_2$  とすると、

$$\bar{n}_z = \begin{cases} -1, & (z = z_1) \\ 1, & (z = z_2) \end{cases} \dots\dots\dots (77)$$

である。また、外力ベクトルの成分を

$$\mathbf{p} = \hat{p}^i \mathbf{e}_i, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{3i} \mathbf{e}_i \dots\dots\dots (78 \cdot a, b)$$

と表わす。

Appendix B の式 (B・5) で応力テンソルとその物理成分  $\bar{\sigma}_{ij}$  の関係を定義したが、それより、

$$\sigma^{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{(\hat{g}_{ii})^{1/2}(\hat{g}_{jj})^{1/2}}, \quad (i, j \text{ not summed}) \quad (79)$$

である。上式および式 (53), (78) を式 (75) に代入し、さらに、

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \delta \hat{g}_{ij} \quad (80)$$

の関係をを用いると、 $e_{33}$ ,  $e_{31} = e_{13}$ ,  $e_{32} = e_{23}$  以外のひずみテンソルは零であることおよび応力テンソルの対称性から、式 (75) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{r_0}{r} \{ \bar{\sigma}_{33} \delta(\hat{g}_{33})^{1/2} + \bar{\sigma}_{31} \delta(\hat{g}_{13}) \\ & + \bar{\sigma}_{32} \delta(\hat{g}_{23}) \} dV - \iiint_V \rho^i \delta \bar{\sigma}^i dV \\ & - \left[ \bar{n}_z \int_A \bar{\sigma}^i \delta \bar{\sigma}^i dA \right]_{z^1=z_1}^{z^2=z_2} = 0 \quad (81) \end{aligned}$$

これ以後、通常の表記法で記述することにし、応力テンソルの物理成分と外力の記号を表-1 の通常表記の記号に改めることにする。

式 (81) に式 (70) を代入し、さらに式 (80) の関係を用いて、式 (74・a, b) を代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \int_A \left\{ \sigma_z \left( \delta \varepsilon_{z0} + x \delta \hat{u}_x + y \delta \hat{u}_y + \frac{r_0}{r} \rho \hat{u}_\varphi \delta \hat{u}_\varphi \right) \right. \\ & \left. + (\tau_{zx}y + \tau_{zy}x) \delta \hat{u}_\varphi \right\} dAdz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \int_A \left( \frac{r}{r_0} \right) (\rho_x \delta u + \rho_y \delta v + \rho_z \delta w) dAdz \\ & - \left[ \bar{n}_z \int_A (\bar{\tau}_{zx} \delta u + \bar{\tau}_{zy} \delta v + \bar{\sigma}_z \delta w) dA \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (82) \end{aligned}$$

となる。上式に式 (68) を代入し、断面に関する積分を遂行すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} (N \delta \varepsilon_{z0} + M_x \delta \hat{u}_x + M_y \delta \hat{u}_y + T \delta \hat{u}_\varphi) dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \rho_x \delta u_0 + \rho_y \delta v_0 + \rho_z \delta w_0 \right. \\ & - \left( m_x - \frac{1}{2} m_{\varphi\beta} \right) \delta \alpha - \left( m_y + \frac{1}{2} m_{\varphi\alpha} \right) \delta \beta \\ & + m_t \delta \varphi \left. \right\} dz - \left[ \bar{n}_z \left\{ \bar{Q}_x \delta u_0 + \bar{Q}_y \delta v_0 + \bar{N} \delta w_0 \right. \right. \\ & - \left( \bar{M}_x - \frac{1}{2} \bar{T}_{\varphi\beta} \right) \delta \alpha - \left( \bar{M}_y + \frac{1}{2} \bar{T}_{\varphi\alpha} \right) \delta \beta \\ & \left. \left. + \bar{T} \delta \varphi \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (83) \end{aligned}$$

ここに、断面力は、

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad M_x = \int_A \sigma_z x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_z y dA \quad (84 \cdot a \sim e)$$

$$T_s = \int_A (\tau_{zx}y + \tau_{zy}x) dA, \quad K = \int_A \sigma_z \frac{r_0}{r} \rho^2 dA \quad (84 \cdot a \sim e)$$

であり、さらに、

$$T = T_s + K \hat{\rho}_\varphi \quad (85)$$

と表わした。

外力項については次のようである。

$$\begin{aligned} & \rho_x = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_x dAdA, \quad \rho_y = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_y dAdA, \\ & \rho_z = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_z dAdA \\ & m_{xx} = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_x x dAdA, \quad m_{xy} = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_x y dAdA \\ & m_{yx} = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_y x dAdA, \quad m_{yy} = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_y y dAdA \\ & m_{zx} = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_z x dAdA, \quad m_{zy} = \int_A \frac{r}{r_0} \rho_z y dAdA \quad (86 \cdot a \sim i) \end{aligned}$$

と表わし、

$$\begin{aligned} & m_{z\alpha} = m_{zx} \cos \varphi - m_{zy} \sin \varphi \\ & m_{z\beta} = m_{zy} \cos \varphi - m_{zx} \sin \varphi \\ & m_{\alpha\alpha} = m_{xx} \cos \varphi - m_{xy} \sin \varphi \\ & m_{\alpha\beta} = m_{xy} \cos \varphi + m_{xx} \sin \varphi \\ & m_{\beta\alpha} = m_{yx} \cos \varphi - m_{yy} \sin \varphi \\ & m_{\beta\beta} = m_{yy} \cos \varphi + m_{yx} \sin \varphi \\ & m_\varphi = -(m_{xy} - m_{yx}) \cos \varphi - (m_{xx} + m_{yy}) \sin \varphi \quad (87 \cdot a \sim g) \end{aligned}$$

とし、さらに、

$$\begin{aligned} & m_x = m_{z\alpha} + m_{\alpha\alpha} - m_{\beta\alpha\beta} \\ & m_y = m_{z\beta} + m_{\alpha\beta\alpha} + m_{\beta\beta\beta} \\ & m_t = m_\varphi + m_{z\beta\alpha} - m_{z\alpha\beta} \quad (88 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

と表わした。同様に部材端外力についても次のように表わす。

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_x = \int_A \bar{\tau}_{zx} dA, \quad \bar{Q}_y = \int_A \bar{\tau}_{zy} dA, \quad \bar{N} = \int_A \bar{\sigma}_z dA, \\ & \bar{M}_{xx} = \int_A \bar{\tau}_{zx} x dA, \quad \bar{M}_{xy} = \int_A \bar{\tau}_{zx} y dA, \\ & \bar{M}_{yx} = \int_A \bar{\tau}_{zy} x dA, \quad \bar{M}_{yy} = \int_A \bar{\tau}_{zy} y dA, \\ & \bar{M}_{zx} = \int_A \bar{\sigma}_z x dA, \quad \bar{M}_{zy} = \int_A \bar{\sigma}_z y dA \quad (89 \cdot a \sim i) \end{aligned}$$

とし、

$$\begin{aligned} & \bar{M}_{z\alpha} = \bar{M}_{zx} \cos \varphi - \bar{M}_{zy} \sin \varphi \\ & \bar{M}_{z\beta} = \bar{M}_{zy} \cos \varphi + \bar{M}_{zx} \sin \varphi \\ & \bar{M}_{\alpha\alpha} = \bar{M}_{xx} \cos \varphi - \bar{M}_{xy} \sin \varphi \\ & \bar{M}_{\alpha\beta} = \bar{M}_{xy} \cos \varphi + \bar{M}_{xx} \sin \varphi \\ & \bar{M}_{\beta\alpha} = \bar{M}_{yx} \cos \varphi - \bar{M}_{yy} \sin \varphi \\ & \bar{M}_{\beta\beta} = \bar{M}_{yy} \cos \varphi + \bar{M}_{yx} \sin \varphi \quad (90 \cdot a \sim g) \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_\varphi = & -(\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{yx}) \cos \varphi \\ & -(\bar{M}_{xx} - \bar{M}_{yy}) \sin \varphi \end{aligned} \right\} + \frac{1}{2} (T' - \kappa_0 M_\alpha + m_\varphi) \alpha \Big\}' - \kappa_0 \{N - (M_\alpha' + m_x) \alpha - (M_\beta' + m_y) \beta - \kappa_0 T \alpha\} + p_y = 0, (\delta v_0) \dots \dots \dots (96 \cdot b)$$

とおき、さらに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_x = & \bar{M}_{z\alpha} + \bar{M}_{\alpha\alpha} - \bar{M}_{\beta\beta} \\ \bar{M}_y = & \bar{M}_{z\beta} + \bar{M}_{\alpha\beta} + \bar{M}_{\beta\beta} \\ \bar{T} = & \bar{T}_\varphi + \bar{M}_{z\beta\alpha} - \bar{M}_{z\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots (91 \cdot a \sim c)$$

と表わした。

式 (83) の演算を進める前に、変分量  $\delta\alpha, \delta\beta$  の演算について注意しておく。式 (65)~(67) から、

$$\alpha = \frac{u_0'}{1 + \varepsilon_{z0}}, \quad \beta = \frac{v_0' - \kappa_0 w_0}{1 + \varepsilon_{z0}} \dots \dots \dots (92 \cdot a, b)$$

であるから、上式両辺の変分をとると、

$$\delta\alpha = \frac{1}{1 + \varepsilon_{z0}} (\delta u_0' - \alpha \delta \varepsilon_{z0})$$

$$\delta\beta = \frac{1}{1 + \varepsilon_{z0}} \{ \delta (v_0' - \kappa_0 w_0) - \beta \delta \varepsilon_{z0} \}$$

となる。ここで仮定 (iv) の微小ひずみの前提条件により 1 に対し  $\varepsilon_{z0}$  を無視し、また仮定 (vi) により 2 次の非線形項までを考慮した解析を目的としているので、変分量の係数としては変位、変形量の 1 次項までを考慮すると、上式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha = & \delta u_0' - \alpha \delta (w_0' + \kappa_0 v_0) \\ \delta\beta = & \delta (v_0' - \kappa_0 w_0) - \beta \delta (w_0' + \kappa_0 v_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (93 \cdot a, b)$$

この演算で注意すべきは、変分演算の前に微小ひずみの前提を導入し、1 に対し  $\varepsilon_{z0}$  を無視すると上式の右辺第 2 項が失われることである。

式 (83) の変分を受ける変位、変形量に式 (65)~(69) を代入し、 $\delta\alpha, \delta\beta$  には式 (93) を用い部分積分を遂行すると、その被積分項と境界項の変分量の係数から微小棒要素のつり合い式と両端断面の力学的境界条件が求まる。その結果を次に示すが、それらのつり合い式や境界条件にかかる変分量を参考として括弧の中に記しておく。また、以下の式では、

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha = & M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi \\ M_\beta = & M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (94 \cdot a, b)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_\alpha = & \hat{m}_x \cos \varphi - \hat{m}_y \sin \varphi \\ \hat{m}_\beta = & \hat{m}_y \sin \varphi + \hat{m}_x \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (95 \cdot a, b)$$

と表わしている。

[つり合い式]

$e_x$  方向の力の成分のつり合い式

$$\left\{ M_\alpha' + N\alpha - \kappa_0 M_\beta \alpha + T(\kappa_0 - \beta') + m_x - \frac{1}{2} (T' - \kappa_0 M_\alpha + m_\varphi) \beta \right\}' + p_x = 0, (\delta u_0) \dots \dots \dots (96 \cdot a)$$

$e_y$  方向の力の成分のつり合い式

$$\left\{ M_\beta' + N\beta + \kappa_0 M_\alpha \alpha + T\alpha' + m_y \right.$$

$e_z$  方向の力の成分のつり合い式

$$\left\{ N - (M_\alpha' + m_x) \alpha - (M_\beta' + m_y) \beta - \kappa_0 T \alpha \right\}' + \kappa_0 \left\{ M_\beta' + N\beta + \kappa_0 M_\alpha \alpha + T\alpha' + m_y + \frac{1}{2} (T' - \kappa_0 M_\alpha + m_\varphi) \alpha \right\} + p_z = 0, (\delta w_0) \dots \dots \dots (96 \cdot c)$$

$\hat{e}_z$  まわりのモーメントのつり合い式

$$T' - (M_\alpha \hat{m}_\beta - M_\beta \hat{m}_\alpha) + m_t = 0, (\delta \varphi) \dots (96 \cdot d)$$

[力学的境界条件]

$$\bar{n}_z \bar{Q}_x = M_\alpha' + N\alpha - \kappa_0 M_\beta \alpha + T(\kappa_0 - \beta') + m_x, (\delta u_0) \dots \dots \dots (97 \cdot a)$$

$$\bar{n}_z \bar{Q}_y = M_\beta' + N\beta + \kappa_0 M_\alpha \alpha + T\alpha' + m_y + \frac{1}{2} (T' - \kappa_0 M_\alpha + m_\varphi) \alpha, (\delta v_0) \dots \dots \dots (97 \cdot b)$$

$$\bar{n}_z \bar{N} = N - (M_\alpha' + m_x) \alpha - (M_\beta' + m_y) \beta - \kappa_0 T \alpha, (\delta w_0) \dots \dots \dots (97 \cdot c)$$

$$\bar{n}_z \left( \bar{M}_x - \frac{1}{2} \bar{T}_\varphi \beta \right) = M_\alpha - \frac{1}{2} T \beta, (\delta \alpha) \dots \dots \dots (97 \cdot d)$$

$$\bar{n}_z \left( \bar{M}_y + \frac{1}{2} \bar{T}_\varphi \alpha \right) = M_\beta + \frac{1}{2} T \alpha, (\delta \beta) \dots \dots \dots (97 \cdot e)$$

$$\bar{n}_z \bar{T} = T, (\delta \varphi) \dots \dots \dots (97 \cdot f)$$

応力表示のつり合い式と境界条件はこのようであるが、これらを変位表示する場合には非線形次数に注意を払う必要がある。すなわち、この 4. では仮定 (vi) に記したように、回転変位  $\varphi$  そのものは除外して変位パラメータとその微係数に関する 3 次以上の非線形項を無視した変位場に立脚しているので、式 (96) や (97) を変位表示した場合に現われる 3 次以上の非線形項は一般に意味がないと考えねばならない。

断面力と変位の関係は後に扱うが、断面力は変形量に比例するので、 $\varphi$  そのものを除いた変位パラメータとその微係数の 1 次以上の項 (以下、簡単に変位パラメータの 1 次項とよぶ) に比例する。また、外力と断面力は比例するので、外力項も断面力と同様に変位パラメータの 1 次相当以上の項として扱う。したがって、式 (85), (88), (91) を含め、式 (96) と (97) のつり合い式や境界条件においては、 $\alpha, \beta, \hat{m}_\alpha, \hat{m}_\beta, \hat{m}_\varphi$  などの変位、変形の幾何学量は必ず断面力や外力項との積で現われるので、それらの幾何学量では変位パラメータの 1 次項 (あくまでも、ここでは  $\varphi$  そのものは除外して扱う) ま

を考慮すればよいことになる。

式 (95) に式 (69) を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}_\alpha &= -\left(\alpha' - \frac{1}{2}\kappa_0\alpha\beta\right) \\ \hat{\mu}_\beta &= (\kappa_0 - \beta') - \frac{1}{2}\kappa_0\alpha^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(98\cdot a, b)$$

となるが、上式を式 (96), (97) に代入する場合、先に記したように変位パラメーターの1次項までを考慮すればよいので、上式中右辺の非線形項は不要である。したがって、たとえば、式 (98) を式 (96・d) に代入すれば  $M_\alpha\alpha^2$  や  $M_\beta\alpha\beta$  のような3次以上の非線形項を無視して、式 (96・d) は次のようになる。

$$T' \{M_\alpha(\kappa_0 - \beta') - M_\beta\alpha'\} + m_t = 0 \dots\dots\dots(99)$$

ここで、式 (96) 中で破線でアンダーラインを付した項に着目するが、これらの項の ( $T' - \kappa_0 M_\alpha + m_\varphi$ ) は式 (99) 中で断面力に変位、変形項のかかった2次項を除いた項 (式 (88・c) を参照) である。本来は式 (96) で破線でアンダーラインを付した項の ( ) の中に入る式は式 (99) の左辺であるが、前節の変位場で3次以上の非線形項を無視したために、式 (99) の左辺の1次項しか現われなかったものである。すなわち、それら破線でアンダーラインを付した項は式 (99) の左辺に  $\alpha$  や  $\beta$  をかけて断面力に変位、変形の2次項のかかった3次項を無視したものである。したがって、式 (99) の関係があるので、式 (49) 中で破線でアンダーラインを付した項は零として消してよいものである。式 (97・b) の右辺の破線でアンダーラインをした項についても同様である。

式 (97・d, e) で破線でアンダーラインを付した項も、式 (97・f) の関係に  $\alpha$  または  $\beta$  をかけて3次項を無視したものであり (式 (91・c) を参照)、前記と同様にこれらの破線でアンダーラインを付した項は零として消してよいものである。

実線でアンダーラインをした項については 6. において考察する。

(3) 断面力と変位の関係

棒材における直応力と直ひずみの関係は、部材軸方向の応力に比べ断面方向の直応力は十分小さいこと、および微小ひずみを前提として、ここでは、

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \dots\dots\dots(100)$$

と表わす<sup>9)</sup>。ここに、 $\sigma_z$  は直応力、 $\varepsilon_z$  は通常の伸びひずみであり、 $E$  はヤング率である。

また、せん断応力に関しても、微小ひずみを前提とし、一般化されたフックの法則から応力テンソルの物理成分とひずみテンソルの物理成分の関係に変換して表わすと次のようになる。下式で  $G$  はせん断弾性係数である。

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -G\left(\frac{r_0}{r}\right)y\hat{\mu}_\varphi, \quad \tau_{zy} = G\left(\frac{r_0}{r}\right)x\hat{\mu}_\varphi \\ &\dots\dots\dots(101) \end{aligned}$$

式 (100), (101) および式 (73) を式 (84) に代入し、部材の断面値を

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_A \frac{r_0}{r} dA, \quad J_x = \int_A \frac{r_0}{r} x dA, \\ J_y &= \int_A \frac{r_0}{r} y dA, \quad J_s = \int_A \frac{r_0}{r} (x^2 + y^2) dA \\ I_{xx} &= \int_A \frac{r_0}{r} x^2 dA, \quad I_{yy} = \int_A \frac{r_0}{r} y^2 dA \\ I_{xy} &= \int_A \frac{r_0}{r} xy dA, \quad I_{\rho 0} = \int_A \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \rho^2 dA \\ I_{\rho x} &= \int_A \left(\frac{r_0}{r}\right) x \rho^2 dA, \quad I_{\rho y} = \int_A \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 y \rho^2 dA \\ I_{\rho \rho} &= \int_A \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \rho^4 dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(102\cdot a\sim k)$$

と表わすとき、断面力と変位の関係式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N &= E\left(F\varepsilon_{z0} + J_x\Delta\hat{\mu}_x + J_y\Delta\hat{\mu}_y + \frac{1}{2}I_{\rho 0}\hat{\mu}_\varphi^2\right) \\ M_x &= E\left(J_x\varepsilon_{z0} + I_{xx}\Delta\hat{\mu}_x + I_{xy}\Delta\hat{\mu}_y + \frac{1}{2}I_{\rho x}\hat{\mu}_\varphi^2\right) \\ M_y &= E\left(J_y\varepsilon_{z0} + I_{xy}\Delta\hat{\mu}_x + I_{yy}\Delta\hat{\mu}_y + \frac{1}{2}I_{\rho y}\hat{\mu}_\varphi^2\right) \\ K &= E\left(I_{\rho 0}\varepsilon_{z0} + I_{\rho x}\Delta\hat{\mu}_x + I_{\rho y}\Delta\hat{\mu}_y + \frac{1}{2}I_{\rho \rho}\hat{\mu}_\varphi^2\right) \\ T_s &= GJ_s\hat{\mu}_\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(103\cdot a\sim e)$$

5. 軸力とねじりによる曲げ座屈 (直線材)

最近の 2, 3 の研究を除き、棒材の有限変位問題を扱った既往の研究報告においては、変位場において2次の非線形項で欠ける点があったため、Greenhill の問題のつり合い式を変位場から仮想仕事の原理によって導くことができないでいたことは初めに述べた。この Greenhill の問題を扱い得れば、その変位場の正当性も保証されると思えるので、ここでは前記の曲線材の変位場を直線材に適用し、Greenhill の問題を含めた軸力およびねじりによる曲げ座屈を一般的に扱う。直線材を対象とするので、

$$\kappa_0 = 0 \dots\dots\dots(104)$$

である。そのほか、この章では座屈前と座屈後のつり合い状態を、それぞれ (0) 系と (1) 系のつり合い状態とよび、それぞれの状態での諸量には肩付に (0), (1) を付して ( )<sup>(0)</sup>, ( )<sup>(1)</sup> と表わす。また、これまで一般の状態での諸量を表わすのに用いた記号 ( ) は座屈に伴

うそれら諸量の変化量を表わすものとする。たとえば、変位パラメーター  $u_0$  については、

$$u_0 = u_0^{(1)} - u_0^{(0)}$$

であり、この章では上式の  $u_0$  は座屈に伴う  $x$  軸方向 ( $i_x$  方向) の変位の増分である。

このほか、部材軸 ( $z$  軸) は部材の重心軸と一致するように選ぶものとする。

すでに有限変位場でのつり合い式が 4. で誘導されているので、それを利用することを念頭において (0) 系と (1) 系の場の諸量を記述していく。

(1) 座屈前の諸量

曲げ座屈の問題であるから、座屈前のつり合い状態では曲げ変形は生じてはならないので、断面および外力に関して次の条件を付す。

i) 断面は二軸対称断面とする注1)。したがって、  

$$I_{xp} = I_{yp} = J_x = J_y = 0 \dots\dots\dots(105)$$

ii) 式 (86), (89) に示す外力成分のうち、次のものは作用しないものとする。

$$\left. \begin{aligned} p_x^{(0)} = p_y^{(0)} = m_{zx}^{(0)} = m_{zy}^{(0)} = 0 \\ \bar{Q}_x^{(0)} = \bar{Q}_y^{(0)} = \bar{M}_{zx}^{(0)} = \bar{M}_{zy}^{(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(106 \cdot a, b)$$

iii) このほか、幾何学的境界条件は部材に曲げを与えるものではないとする。

これらの前提条件により座屈前の変位パラメーターのうち  $u_0^{(0)}$  と  $v_0^{(0)}$  は生じない。

$$u_0^{(0)} = v_0^{(0)} = 0 \dots\dots\dots(107)$$

したがって、たわみ角と曲率も零である。

$$\alpha^{(0)} = \beta^{(0)} = 0, \Delta \hat{u}_x^{(0)} = \Delta \hat{u}_y^{(0)} = 0 \dots\dots(108 \cdot a, b)$$

座屈前の変位場では変位パラメーターのうち  $w_0^{(0)}$  と  $\varphi^{(0)}$  のみが生じている。

断面力に関しては、式 (108 \cdot b) により、  

$$M_x^{(0)} = M_y^{(0)} = 0 \dots\dots\dots(109)$$

であり、一般に軸力  $N^{(0)}$  とねじりモーメント  $T^{(0)}$  だけが生じている。

(2) 座屈後の諸量

曲げ座屈の問題であるから、座屈に伴う変位パラメーターの増分としては  $u_0$  と  $v_0$  だけを考えればよく、座屈後の (1) 系の場では変位パラメーターは、

$$\left. \begin{aligned} u_0^{(1)} = u_0, v_0^{(1)} = v_0 \\ w_0^{(1)} = w_0^{(0)}, \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(110 \cdot a \sim d)$$

である。したがって、たわみ角は変位パラメーターの増

分の3次以上の非線形項を無視し、かつ微小ひずみ ( $\gg \varepsilon_{z0}^{(0)} = w_0^{(0)'} \prime$ ) を前提とすれば、

$$\alpha^{(1)} = \alpha = u_0', \beta^{(1)} = \beta = v_0' \dots\dots\dots(111 \cdot a, b)$$

である。また曲率については式 (69 \cdot a, b) から、

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_x^{(1)} = \hat{u}_x = -\alpha' \cos \varphi^{(0)} - \beta' \sin \varphi^{(0)} \\ \hat{u}_y^{(1)} = \hat{u}_y = -\beta' \cos \varphi^{(0)} + \alpha' \sin \varphi^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(112 \cdot a, b)$$

である。

断面力に関しても、座屈前に生じていた断面力  $N^{(0)}$  と  $T^{(0)}$  の座屈に伴う増分は考えなくてよく、座屈に伴う増分は  $M_x$  と  $M_y$  だけを考えればよい。これより (1) 系の場での断面力は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(1)} = M_x, M_y^{(1)} = M_y \\ N^{(1)} = N^{(0)}, T^{(1)} = T^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(113 \cdot a \sim d)$$

したがって、式 (94) の合成曲げモーメントは、

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha^{(1)} = M_\alpha = M_x \cos \varphi^{(0)} - M_y \sin \varphi^{(0)} \\ M_\beta^{(1)} = M_\beta = M_y \cos \varphi^{(0)} + M_x \sin \varphi^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(114 \cdot a, b)$$

である。

(3) 座屈の支配方程式

ここで対象としている分岐座屈問題は 4. のつり合い式をそのまま利用でき、式 (95 \cdot a, b) および式 (96 \cdot a, b, d, e) に (1) 系の場における諸量、式 (111) ~ (114)、および式 (104), (106) を代入すると座屈の支配方程式が次のように求まる。ただし、座屈は外力の変化を伴うことなく、つり合い系が移行する問題であるから、外力に関しては (0) 系のままである。

つり合い式

$$\left. \begin{aligned} \{ M_\alpha' - T^{(0)} \beta' + (N^{(0)} + m_{\alpha\alpha}^{(0)}) \alpha \\ + (m_t^{(0)} + m_{\beta\alpha}^{(0)}) \beta \}' = 0 \\ \{ M_\beta' + T^{(0)} \alpha' + (N^{(0)} + m_{\beta\beta}^{(0)}) \beta \\ - (m_t^{(0)} - m_{\alpha\beta}^{(0)}) \alpha \}' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(115 \cdot a, b)$$

力学的境界条件式

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha' - T^{(0)} \beta' + (N^{(0)} + m_{\alpha\alpha}^{(0)}) \alpha \\ + (m_t^{(0)} + m_{\beta\alpha}^{(0)}) \beta = 0 \\ M_\beta' + T^{(0)} \alpha' + (N^{(0)} + m_{\beta\beta}^{(0)}) \beta \\ - (m_t^{(0)} - m_{\alpha\beta}^{(0)}) \alpha = 0 \\ M_\alpha = \bar{n}_z (\bar{M}_{\alpha\alpha}^{(0)} \alpha + \bar{M}_{\beta\alpha}^{(0)} \beta) \\ M_\beta = \bar{n}_z (\bar{M}_{\beta\beta}^{(0)} \beta + \bar{M}_{\alpha\beta}^{(0)} \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(116 \cdot a \sim d)$$

断面力と変位の関係は、式 (103) に式 (105), (112) を代入した結果を式 (114 \cdot a, b) にさらに代入すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha = -E(I_{xx} \cos^2 \varphi^{(0)} + I_{yy} \sin^2 \varphi^{(0)}) \alpha' \\ - E(I_{xx} - I_{yy}) \sin \varphi^{(0)} \cos \varphi^{(0)} \beta' \\ M_\beta = -E(I_{xx} \sin^2 \varphi^{(0)} + I_{yy} \cos^2 \varphi^{(0)}) \beta' \end{aligned} \right\}$$

注1) 式 (102) における  $I_{xp}, I_{yp}$  が零にならないと、式 (103 \cdot b \sim d) によりねじりと曲げが連成してしまう。二軸対称断面であれば、式 (105) が保証され式 (106) の外力条件ではねじりと曲げが連成しないので前提 i) をおいたが、式 (105) が成立するなら二軸対称断面である必要はない。

$$-E(I_{xx}-I_{yy})\sin\varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)}\alpha' \dots\dots\dots(117\cdot a, b)$$

(4) 等ねじりと等軸力を受ける円形断面棒の座屈

Greenhill の問題<sup>1), 2)</sup> との対応を調べるために、等ねじりと等軸力を受ける円形断面棒へ適用してみる。円形断面なので、

$$I=I_{xx}=I_{yy} \dots\dots\dots(118)$$

であり、その結果、式 (117) は次のようになる。

$$M_\alpha = -EI\alpha', M_\beta = -EI\beta' \dots\dots\dots(119)$$

また、上式および式 (111) を式 (115), (116) に代入すると変位表示のつり合い式と境界条件が求まるが、部材中間部に分布外力は作用しないものとする、それらは次のようである。

(つり合い式)

$$\left. \begin{aligned} (-EIu_0'''' - T^{(0)}v_0'' + N^{(0)}u_0')' &= 0 \\ (-EIv_0'''' + T^{(0)}u_0'' + N^{(0)}v_0')' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(120\cdot a, b)$$

(力学的境界条件式)

$$\left. \begin{aligned} -EIu_0'''' - T^{(0)}v_0'' + N^{(0)}u_0' &= 0 \\ -EIv_0'''' + T^{(0)}u_0'' + N^{(0)}v_0' &= 0 \\ -EIu_0'' = \bar{n}_z(\bar{M}_{\alpha\alpha}^{(0)}u_0' + \bar{M}_{\beta\alpha}^{(0)}v_0') \\ -EIv_0'' = \bar{n}_z(\bar{M}_{\beta\beta}^{(0)}v_0' + \bar{M}_{\alpha\beta}^{(0)}u_0') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(121\cdot a\sim d)$$

ここに、部材端外力は式 (90) から、

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\alpha}^{(0)} &= \bar{M}_{xx}^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - \bar{M}_{xy}^{(0)}\sin\varphi^{(0)} \\ \bar{M}_{\alpha\beta}^{(0)} &= \bar{M}_{xy}^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + \bar{M}_{xx}^{(0)}\sin\varphi^{(0)} \\ \bar{M}_{\beta\alpha}^{(0)} &= \bar{M}_{yx}^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - \bar{M}_{yy}^{(0)}\sin\varphi^{(0)} \\ \bar{M}_{\beta\beta}^{(0)} &= \bar{M}_{yy}^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + \bar{M}_{yx}^{(0)}\sin\varphi^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(122\cdot a\sim d)$$

である。

特にここで問題を簡単にするために、この棒の材質は方向性がありねじり剛性が特別に大きく、そのため座屈前の断面のねじり回転  $\varphi^{(0)}$  は、

$$\varphi^{(0)} = 0 \dots\dots\dots(123)$$

とみなせるとすると、式 (122) は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{\alpha\alpha}^{(0)} &= \bar{M}_{xx}^{(0)}, \bar{M}_{\alpha\beta}^{(0)} = \bar{M}_{xy}^{(0)} \\ \bar{M}_{\beta\alpha}^{(0)} &= \bar{M}_{yx}^{(0)}, \bar{M}_{\beta\beta}^{(0)} = \bar{M}_{yy}^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(124\cdot a\sim d)$$

ここでこの部材端外力について考えてみる。図-4 に

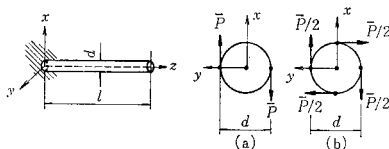


図-4 Quasitangential トルク (a) と Semitangential トルク (b)

示す片持りの自由端 ( $z=l$ ) に作用する外力として 図-4 (a), (b) の 2 つの外力状態を想定する。このとき、座屈前の棒に働くねじりモーメント  $T^{(0)}$  は、式 (123) を前提とすると、式 (90・g), (91・c), (96・f) から、図-4 (a), (b) いずれの場合も次のようである。

$$T^{(0)} = \bar{T}^{(0)} = \bar{T}^{(0)} = \bar{P}d \dots\dots\dots(125)$$

しかし自由端の力学的境界条件、式 (121・c, d), では次のように差が生ずる。やはり式 (123) を前提として、

図-4 (a) の場合、

$$\left. \begin{aligned} -EI(u_0'')_{z=l} &= 0 \\ -EI(v_0'')_{z=l} &= \bar{P}d(u_0')_{z=l} = T^{(0)}(u_0')_{z=l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(126\cdot a, b)$$

図-4 (b) の場合、

$$\left. \begin{aligned} -EI(u_0'')_{z=l} &= -\frac{1}{2}\bar{P}d(v_0')_{z=l} \\ &= -\frac{1}{2}T^{(0)}(v_0')_{z=l} \\ -EI(v_0'')_{z=l} &= \frac{1}{2}\bar{P}d(u_0')_{z=l} \\ &= \frac{1}{2}T^{(0)}(u_0')_{z=l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(127\cdot a, b)$$

となる。式 (126), (127) はそれぞれ Ziegler<sup>2)</sup> のいう、quasitangential トルクと semitangential トルクの状態である。また 図-4 (a) の外力状態で  $\varphi^{(0)} \neq 0$  とすれば、pseudtangential トルクの状態も表現できる。

これに対し Greenhill のねじりによる曲げ座屈の基本式<sup>1)</sup> では、端部における外力の作用状態にかかわらず、常に次の力学的境界条件を暗黙のうちに前提としている<sup>2)</sup>。

$$\begin{aligned} -EI(u_0'')_{z=l} &= -T^{(0)}(v_0')_{z=l} \\ -EI(v_0'')_{z=0} &= T^{(0)}(u_0')_{z=l} \end{aligned}$$

しかし、このような境界条件は、どのような外力状態を考えても、式 (121・a, b) から求めることはできない。本稿は仮想仕事の原理を用いて基本式の誘導を行っており、当然のことながら保存力を前提としているのであるから、Greenhill の考えた上記の境界条件は、Ziegler<sup>2)</sup> がいうように、非保存系の問題なのである。Greenhill はこの点に気付かなかったようである。ただし部材両端のたわみ角  $\alpha, \beta$  が拘束されている ( $\alpha = \beta = 0$ ) 場合に限り保存系の問題となり得る。

本稿の変位場の精度の証明のために、Greenhill に端を発したねじりによる曲げ座屈の問題に適用してみたが、その結果は上記に示したように幾何学的考察によって求められているのとまったく同じ結果を得ることができ、変位場の正当性は証明し得たものと思う。

## 6. 考 察

本稿で目的とした理論展開は以上で終えたが、その結果は 5. のねじりによる曲げ座屈の問題で示したように、従来の研究で懸案であった問題点を十分解決し得るものであったと思う。以下、本稿と従来の研究との対比を行いながら、少しでも棒材の有限変位理論の整理を行いたい。

### (1) 座標と回転運動の表式について

微小変位問題でも本来はそうなのであるが、特に有限変位問題においては、用いる座標の定義を明確にしておく必要がある。この点で混乱のある論文もあるように見受けられる。

部材軸の不伸張を仮定したエラスティカの問題においては、古くは空間固定座標（オイラー表現）が用いられた例はあるが、一般の有限変位問題の場合は空間固定座標ではうまく表現できず、物体固定座標（ラグランジュ表現）が用いられる。その場合、直線材（ $\kappa_0=0$ ）で微小ひずみ（ $\epsilon_{z0} \ll 1$ ）を前提とすると、式(66)から部材軸のたわみ角は、

$$\sin \alpha = u_0', \quad \sin \beta = v_0' \quad \dots\dots\dots(128 \cdot a, b)$$

となるのに対し、空間固定座標では、

$$\tan \alpha = u_0', \quad \tan \beta = v_0' \quad \dots\dots\dots(129 \cdot a, b)$$

となる。前田・林ら<sup>10)</sup>は、この式(129)を用いていながら一方ではラグランジュ表現におけるひずみと変位の関係を用いるという矛盾した使い方をしている。

そのほか、この座標の問題に起因するわけではないと思えるが、前田・林の論文における式(68)~(72)にかけての結論は本稿の結果と一致しない。その論文の式(72)においてそりのない断面の変位式を与えているが、それを本稿の記号を用いて表わすと、次のようである。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - \varphi y - \frac{1}{2} \{ \varphi^2 x + (u_0')^2 x + u_0' v_0' y \} \\ v &= v_0 + \varphi y - \frac{1}{2} \{ \varphi^2 y + (v_0')^2 y + u_0' v_0' x \} \\ w &= w_0 - u_0' x - v_0' y - \frac{1}{2} \varphi (v_0' x - u_0' y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(130 \cdot a \sim c)$$

本稿の式(68)における  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  を級数に展開し、変位パラメーター  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi$  に関する 3 次以上の非線形項を無視すると、式(68・a, b)と式(130・a, b)は一致する。しかし、式(68・c)と式(130・c)は一致しないのである。

前田・林は部材軸の剛体回転を表わすパラメーターとして、 $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  なる量を導入しているが、それらの量と部材軸上の変位パラメーターの関係を分明にしていな

い。そのため、本稿で定義した  $\varphi$  と前田・林らの  $\varphi_0$  が同じものかどうかかわからないのであるが、どのような  $\varphi$  を考えても、既往の論文(9), (11)の軸方向変位式(本論文の式(68・c)と同じ)は  $\varphi$  が微小の場合にしか成立しないとした前田・林の結論には達しない。

前田・林は既往の論文(9), (11)において、本稿で示すなら式(68・a, b)の  $\alpha$ ,  $\beta$  に関する 2 次項が欠落していると指摘しているが、それは確かにそのとおりである。それは著者らの先の論文(9)でいうなら、変位式を求めるにひずみ変位の関係式のうち、 $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\tau_{xy}$  (論文(9)の式(2・1 a, b, d))で  $w$  の微係数の 2 次項を意味なく落としたことによる。そのため座屈問題でいうなら、曲げ座屈やねじり座屈のほとんどは扱えるものの、ねじりによる曲げ座屈のような特殊な問題は扱えないでいる。このほか、論文(11)~(15)も同様の問題を含んでいる。

著者が知る限りでは、部材軸の回転運動を正しく表わしているものは著者らの論文<sup>9)</sup>, Schroeder<sup>16)</sup>, 平嶋・井浦・依田<sup>4)</sup>, 阿井<sup>5)</sup> および事口・久保・中井<sup>17)</sup> だけである。Schroeder の部材軸の回転運動の表式を本稿の記号と図を用いて説明すると、それは次のように 2 つの剛体回転を組み合わせて部材軸の角運動を表現したものである。

① 図-2 におけるベクトル  $\hat{b}_i$  と  $\hat{b}_3$  が共存する平面に直交するベクトル  $E (= \hat{b}_3 \times b_3)$  を回転軸として、まずベクトル  $b_i (i=1 \sim 3)$  を剛体的に  $\alpha_i$  だけ回転させる。

② 上記の状態を断面のねじり回転  $\varphi=0$  の状態と定め、次にベクトル  $\hat{b}_3$  を回転軸として角  $\varphi$  だけ各ベクトルを剛体的に回転させる。

また、阿井<sup>5)</sup> は断面のねじり回転を測る基準を変位後の部材軸の主法線としており、Schroeder<sup>16)</sup>, 本稿<sup>9)</sup> および阿井<sup>5)</sup> の三者を比べても、三者三様の方法をとっている。しかし Schroeder は部材軸のねじり率の計算に間違いがあり、平嶋・井浦・依田<sup>4)</sup> はそれらを正したものである。また、事口・久保・中井<sup>17)</sup> も Schroeder と同様の方法によるものであるが、やはりねじり率の表式などに問題があるようで、ねじりによる曲げ座屈の問題は正しく扱えないようである。

### (2) 微小変位式を用いることの是非について

微小変位場の 変位式を有限変位場のひずみ-変位の関係に代入し有限変位場でのひずみとし、このような変位場をもとに仮想仕事の原理から有限変位場でのつり合い式を求めようとする試みがいくつか報告されている<sup>18)~20)</sup>。また、これに類したものとして、断面不変の前提条件を放棄しようとする研究報告<sup>21)</sup>もある。このようにすれば立式は容易になるものの、意味のない断面方向

の直ひずみなどを付随的に計算してしまうので、そのような変位場をもとに仮想仕事の原理からつり合い式を求めると棒理論として物理的な意味づけのできない項が含まれてくる可能性がある。著者らは変位場の重要性についてたびたび議論してきたが<sup>22), 23)</sup>、このような変位場を用いることには疑問をもっている。

このような手法を用いる場合、前記のようにして求めたひずみの中で有意な項と無意な項を取捨選択すれば、限定された問題に対しては簡便法として有効な手法ではあるが、ともすると誤った結論を導くことも考えられ、この手法で一般式を求めることはできないと考える。たとえば、座屈値において座屈前の変位や変形の影響を考慮することはできないし、特に問題であるのは力学的境界条件も含めて外力項のもつ非線形性を組み込めないことである。すなわち、たとえば本稿の式 (121・c, d) の右辺の項などを評価できないでいる。

築地<sup>20)</sup>は Ziegler のいう Semitangential トルクの状態を求めたとしているが、上記の理由でこれには問題があるように思う。築地の求めた結果のうち、本稿の式 (116・c, d) あるいは式 (121・c, d) に相当する境界条件を本稿の記号で表わすと次のようである（築地は微小変位式を用いているので  $\varphi^{(0)}=0$  の状態と考える）。

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx}u_0'' + \frac{1}{2}T^{(0)}v_0' &= 0 \\ EI_{yy}v_0'' - \frac{1}{2}T^{(0)}u_0' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(131\cdot a, b)$$

上式をみる限り式 (127) と同じであり、Semitangential トルクの状態に相当する。しかし、築地は上式の左辺第 2 項を外力項からではなく内力項から導いており、この点で本稿との違いがある。そのため築地の結果は 図—4 (a), (b) いずれの外力状態でも Semitangential トルクの状態になってしまうのである。

(3) せん断力のもつ非線形性について

式 (96), (97) で実線でアンダーラインをした項は、せん断力のもつ非線形項である。せん断力は曲げモーメントのような一般化された断面力<sup>24)</sup>ではなく（曲げせん断に対するせん断変形を無視している）、本論文の表式中では具体的な形では現われてこないが、変位後の  $\hat{i}_x, \hat{i}_y$  方向を向く断面力をそれぞれ  $Q_x, Q_y$  と表わすと、

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= M_\alpha' - \kappa_0 M_\beta \alpha + T(\kappa_0 - \beta') + m_x \\ Q_y &= M_\beta' + \kappa_0 M_\alpha \alpha + T\alpha' + m_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(132\cdot a, b)$$

である。

実線でアンダーラインをしたせん断力のもつ非線形項は、式 (83) の仮想仕事の演算で生ずる式 (93) の変分演算の右辺第 2 項、 $\delta(v_0' + \kappa_0 v_0)$ 、にかかわる項として、

つり合い式や力学的境界条件の中に現われてくる。したがって式 (92) において変分演算前に微小ひずみ ( $\epsilon_{z0} \ll 1$ ) の前提条件を適用し、式 (92) を

$$\alpha = u_0', \beta = v_0' - \kappa_0 v_0 \dots\dots\dots(133\cdot a, b)$$

とした後に  $\delta_\alpha, \delta_\beta$  の変分をとると欠落してしまう項である。なお、式 (97・c) は本来

$$\bar{n}_z N = N \cos \gamma - Q_x \sin \alpha - Q_y \sin \beta \dots\dots(134)$$

と表わされるべきものであるが、3 次以上の非線形項を無視した変位場に立脚しているので、式 (134) に式 (132) を代入して 3 次以上の非線形高次項を無視した形のものとなっている。他の実線でアンダーラインをした項も同様である。

このせん断力のもつ非線形項については著者らの一軸曲げの論文<sup>25)</sup>で多少の検討を行っており、これらの項を含めたものは一軸曲げの論文<sup>25)</sup>の式 (3・2), (3・22) に相当し、含めないものはその論文の式 (6・2), (6・13) に相当するものである。しかしその論文中でも多少の考察を行ったように、これらの項を含めて計算を行ったとしても実用上の問題では数値的には意味のある項とはならないように思える。

7. 結 語

部材軸の角運動の表現方法には Schroeder<sup>16)</sup>あるいは阿井<sup>3)</sup>の方法などがあるが、本稿では従来のこの種の問題における観念になるべく近い形で表現するように努めたつもりである。

本稿では断面のそり変位は扱わなかったが、著者らはそり変位がある場合についても精確な変位場を求めている<sup>3)</sup>。ここでは通常のそり関数のほかにも 2 つのそり関数様のものが非線形項の係数として現われること、また断面にせん断力があるとそり変位に伴いせん断力が曲げモーメント成分を作り出すことなどを明らかにしている<sup>注 2)</sup>。これらのことは実用上数値的には有意なものとはならないかもしれないが、また幾何学的に考えれば当然のことなのであるが、変位場の精度の傍証となるものであるし、理論的には興味のある問題であるので近いうちに報告させていただきたい。

先にも記したが、本稿は著者らの 5 年前の研究<sup>3)</sup>から抜粋してそり変位のない部材へ適用し書き改めたものである。その研究をまとめるにあたっては、埼玉大学・秋山成興教授、筑波大学・西岡 隆助教授から有益な助言ならびに励ましをいただいた。名古屋工業大学・長谷川彰夫助教授には、当時大学院で論文作成中にもかかわらず貴重な時間をさいて議論に乗っていただき、弾性学の

注 2) 文献 26) でほんの概要であるが、横座屈問題としてこれらの点を報告している。

基本問題について有益な情報をもたらしていただいた。また、当時大学院生であった名古屋工業大学・後藤芳顕助手、法政大学・阿井正博講師にも議論の相手をしていただき、両氏の新鮮な頭脳と感覚に触れることができたのは幸いであった。著者の都合で報告が大変遅れてしまったが、ここに改めて感謝の意を表わす次第である。

なお、本研究は文部省科学研究費の補助を受けて行ったものである。

**Appendix A 部材軸の回転成分  $\hat{C}_i^j$  と曲率・ねじり率の物理成分  $\hat{\mu}_j^i$  の近似式**

式(41)の  $\hat{C}_i^j$  は  $\alpha_i$  や  $\varphi$  に関し大変非線形性が強く、実際問題として、これを厳密に扱うことは困難である。また、この  $\hat{C}_i^j$  を用いて式(46)から  $\hat{\mu}_j^i$  を計算することは、それ以上に困難な問題である。そこでここでは、たわみ角  $\alpha$  が比較的小さいことを前提として、次に示す仮定のもとに  $\sin \alpha_\beta$  に関する高次の非線形微小項を無視した近似式を求める。

(i) たわみ角  $\alpha_\beta$  の正弦  $\sin \alpha_\beta$  の4つ以上の積で表わされる  $\sin \alpha_\beta$  の4次以上の非線形高次項は、1や  $\sin \alpha_\beta$  の3次以下の項に比べ小さく無視できる。

(ii) したがって  $\hat{\mu}_j^i$  の計算においては、 $\alpha_{\beta,3}$  や  $\sin \alpha_\beta$  に関する3次項までを有効とし、これらの4次以上の非線形高次項を無視する。

このように、たわみ角は有限ではあるが比較的小さいことを前提とするものの、角変位  $\varphi$  そのものには制限を設けずに任意の有限量として扱う。

**(1)  $\hat{C}_i^j$  の近似式**

上記の前提のもとで式(38)は、  

$$\hat{B} = 4 \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

となり、式(41)の部材軸の回転成分は、  

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1^1 &= (1 - \sin^2 \alpha_1/2) \cos \varphi - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \varphi/2 \\ \hat{C}_1^2 &= -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \varphi/2 + (1 - \sin^2 \alpha_2/2) \sin \varphi \\ \hat{C}_1^3 &= -\sin \alpha_1 \cos \varphi - \sin \alpha_2 \sin \varphi \\ \hat{C}_2^1 &= -(1 - \sin^2 \alpha_1/2) \sin \varphi - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \varphi/2 \\ \hat{C}_2^2 &= \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \varphi/2 + (1 - \sin^2 \alpha_2/2) \cos \varphi \\ \hat{C}_2^3 &= \sin \alpha_1 \sin \varphi - \sin \alpha_2 \cos \varphi \\ \hat{C}_3^1 &= \sin \alpha_1, \hat{C}_3^2 = \sin \alpha_2, \\ \hat{C}_3^3 &= 1 - (\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 2 \cdot a \sim j)$$

となる。

**(2)  $\hat{\mu}_j^i$  の近似式**

式(A・2)を式(46)に代入し、 $\alpha_{\beta,3}$  や  $\sin \alpha_\beta$  に関

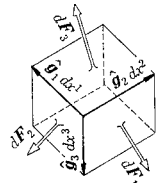
する4次以上の項を無視すると、曲率やねじり率の物理成分の近似式として次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}_1^3 &= -\{\alpha_{1,3} - (\kappa_0 - \alpha_{2,3}) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2/2\} \cos \varphi \\ &\quad + \{(\kappa_0 - \alpha_{2,3}) - \alpha_{1,3} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2/2 \\ &\quad - \kappa_0 \sin^2 \alpha_1/2\} \sin \varphi \\ \hat{\mu}_2^3 &= \{(\kappa_0 - \alpha_{2,3}) - \alpha_{1,3} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2/2 \\ &\quad - \kappa_0 \sin^2 \alpha_1/2\} \cos \varphi \\ &\quad + \{\alpha_{1,3} - (\kappa_0 - \alpha_{2,3}) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2/2\} \sin \varphi \\ \hat{\mu}_1^2 &= \varphi_{,3} + \kappa_0 \sin \alpha_1 - (\alpha_{2,3} \sin \alpha_1 - \alpha_{1,3} \sin \alpha_2)/2 \\ &\quad \dots\dots\dots (A \cdot 3 \cdot a \sim c) \end{aligned} \right\}$$

**Appendix B 応力テンソルの物理成分**

平行六面体の付図-1に示す面に作用する応力は、

$$\left. \begin{aligned} dF^i &= \sigma^i dA_i, \\ &\quad (i \text{ not summed}) \\ dA_1 &= (g)^{1/2} dx^2 dx^3, \\ dA_2 &= (g)^{1/2} dx^3 dx^1, \\ dA_3 &= (g)^{1/2} dx^1 dx^2 \\ &\quad \dots\dots\dots (B \cdot 1 \cdot a \sim d) \end{aligned} \right\}$$



付図-1 微小六面体要素に働く応力

と表わされる<sup>8)</sup>。ここに、

$$\sigma^i = \sigma^{ij} \hat{g}_j \dots\dots\dots (B \cdot 2)$$

であり、 $\sigma^{ij}$  は応力テンソルである。上記の  $dA_i$  は一般に変形前の実面積を表わさず、直交座標の場合は実面積  $d\tilde{A}_i$  は次のようになる。

$$d\tilde{A}_i = (g^{ii})^{1/2} dA_i, (i \text{ not summed}) \dots (B \cdot 3)$$

また、 $\hat{g}_i$  は一般には単位ベクトルでないので、それを単位化して式(B・1・a)を

$$\left. \begin{aligned} dF^i &= \left\{ \tilde{\sigma}_{i1} \frac{\hat{g}_1}{(\hat{g}_{11})^{1/2}} + \tilde{\sigma}_{i2} \frac{\hat{g}_2}{(\hat{g}_{22})^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\sigma}_{i3} \frac{\hat{g}_3}{(\hat{g}_{33})^{1/2}} \right\} d\tilde{A}_i, (i \text{ not summed}) \\ &\quad \dots\dots\dots (B \cdot 4) \end{aligned} \right\}$$

と表わしたときの  $\tilde{\sigma}_{ij}$  (変形前の実単位面積について定義される応力) を応力テンソルの物理成分とよぶことにする。このとき  $\sigma^{ij}$  と  $\tilde{\sigma}_{ij}$  の関係は次のようになる。

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma^{ij} (g_{ii})^{1/2} (\hat{g}_j)^{1/2}, (i, j \text{ not summed}) \dots\dots\dots (B \cdot 5)$$

**参 考 文 献**

- 1) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd. Ed., McGraw-Hill, 1961.
- 2) Ziegler, H. : Principles of Structural Stability, Blaisdell Publishing Company, 1968.
- 3) 倉方慶夫 : 薄肉断面をもつ曲線部材の有限変位理論, 東京大学工学系研究科博士論文, 昭和51年3月.
- 4) 平嶋政治・井浦雅司・依田照彦 : 初期曲率・ねじり率を有する薄肉空間曲線材の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No. 292, 1972.12.
- 5) 阿井正博 : 一次元構造要素の幾何学的非線形問題につい

- て，東京大学工学系研究科博士論文，昭和54年3月。
- 6) Flügge, W. : Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, 1972.
  - 7) Fung, Y.C. : Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, 1965.
  - 8) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd. Ed., Pergamon Press.
  - 9) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 1~15, 1974.5.
  - 10) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 253, pp. 13~27, 1976.9.
  - 11) 結城皓曠・前田幸雄：薄肉断面構造の3次元挙動の解析，土木学会論文報告集，No. 224, 1974.4.
  - 12) Roik, K., J. Carl und J. Lindner : Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandige stäbe, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1972.
  - 13) Namita, Y. : Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung anf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Transaction of JSCE, No. 155, pp. 32~41, 1968.7.
  - 14) 遠田良喜：伝達マトリックス法による薄肉断面曲線ばりの2次の応力問題の解析，土木学会論文報告集，No. 210, pp. 1~11, 1973.2.
  - 15) 薄木征三：変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈，土木学会論文報告集，No. 263, pp. 35~48, 1977.7.
  - 16) Schroeder, F.H. : Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewunden Träger mit großen Verformungen, Ingenieur-Archiv, 39-Band, S. 87~103, 1970.
  - 17) 事口寿男・久保元生・中井 博：薄肉曲線ばりの幾何学的非線形挙動と横倒れ座屈解析への応用，第24回構造工学シンポジウム，構造の非線形問題，1978年2月。
  - 18) 川井忠彦：座屈問題解析，コンピューターによる構造工学講座，II-6-B，培風館，1974.10.
  - 19) 坂井藤一：薄肉開断面材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導，土木学会論文報告集，No. 221, pp. 1~15, 1974.1.
  - 20) Tsuiji, T. : Buckling of columns under axial load and torsions, Proceeding of JSCE, No. 223, pp. 77~84, 1974.10.
  - 21) 高島秀雄：空間曲線をもつ薄肉開断面材の解析，日本建築学会論文報告集，第267号，pp. 69~81, 昭和53年5月。
  - 22) 倉方慶夫・長谷川彰夫・西野文雄：築地恒夫著“軸力および保存ねじりモーメントによる柱の座屈(英文)”への討議，土木学会論文報告集，No. 240, pp. 137~140, 1975.8.
  - 23) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫：坂井藤一著“薄肉断面材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導”への討議，土木学会論文報告集，No. 238, pp. 111~113, 1975.6.
  - 24) Vlasov, V.Z. (奥村ほか共訳)：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1976.
  - 25) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 237, pp. 11~26, 1975.5.
  - 26) 倉方慶夫・西野文雄：薄肉曲線材の横座屈，土木学会第30回年次学術講演会講演概要集，I-138, 昭和50年10月。

(1979.11.27・受付)