

## 土石流における粒子間応力と流動特性

## GRAIN STRESSES AND FLOW PROPERTIES OF DEBRIS FLOW

椿 東一郎\*・橋本晴行\*\*・末次忠司\*\*\*

By Tōichirō TSUBAKI, Haruyuki HASHIMOTO and Tadashi SUETSUGI

## 1. 緒 言

土石流は、広範囲の粒径の砂礫粒子を高濃度に含有する粒子と水の固-液系を形成し、段波状を呈しながら、固・液一体となって流動する現象である。このような流動状態においては、粒子は適度に分散化し、これを粒子間応力が支えているのが土石流の特徴である。この応力については、Bagnold<sup>1)</sup>は回転2重円筒を用いた先駆的な実験を行い、粒子の衝突に関する物理的考察を加えて、粒子間応力に関する半実験式を提案した。高橋<sup>2)</sup>はこの式を土石流に適用して土石流段波の諸特性などを解析しているが、詳細な流動特性を研究するためには、粒子間応力の発生機構とその表示式を求めることが重要な課題となる。

最近、粒状体力学の分野において、主として間隙水を含まない粒状体の gravity flow の濃度・速度分布および質量輸送量を解明するため、粒子間応力に関する理論的な研究がなされている。たとえば Mctigue<sup>3)</sup>は粒状体の2次元せん断流における運動量交換のメカニズムとして、粒子の相対速度に起因する2体粒子の完全弾性衝突のモデルを考え、Bagnoldと同様に速度勾配の2乗に比例する応力を理論的に求めた。また、Goodman・Cowin<sup>4)</sup>や Savage<sup>5)</sup>は粒状体流における応力テンソルを形式的に粒子の濃度、濃度勾配および変形速度の関数として多項式展開を行い、式中における諸係数を、極限としての静止状態におけるクーロンの法則や Bagnold の最密状態に近い実験結果などから決めようとしてみた。さらに、金谷<sup>6),7)</sup>の研究は粒状体の構成方程式をマイクロな粒子運動を考慮して解析したところに大きな特徴がある。その

モデルは、移動・回転する粒子がその周辺粒子と接触する複雑な性状を、1個の粒子のまわりに球状壁を想定し、粒子が壁面とランダムな完全弾性衝突を繰り返すと仮定したものである。このように粒子間応力の理論については多様な方法論が展開されているが、いずれも多くの仮定を内蔵しながら、実験的な検証がまったくなされていない点に問題がある。

一方、土石流を対象とする固-液系について、大同<sup>8)</sup>は最近 Bagnold と同様な実験を行い、主として金谷の方法を進展させて、土石流の粒子間応力に関する理論を提示している。また著者ら<sup>9)</sup>も独立に Mctigue とほぼ同様な観点から粒子間の摩擦をも考慮した弾性衝突モデルによって粒子間応力を解析したが、濃度による応力の増大関係を説明するため、Bagnold による衝突回数の仮定を用いたことなどの難点が残されている。

以上のことから、粒子間応力の研究にあたっては、高濃度粒子流における粒子間の接触機構を実験的に把握し、できるだけ実験的に裏づけられた仮定に基づいて解析を進めることが必要である。本文においては、まず高速で進行する段波状土石流の流動層において、粒子間の接触角分布や粒子相互が接触して分離するまでの相対移動について詳細な観測を行った。その結果、上層粒子はその相対速度のため下層粒子の限られた領域において衝突し、反発することなく接触状態を保ちながら相対移動を行った後、分離することが明らかにされた。これらのことは、土石流のような高濃度の固-液系においては完全弾性衝突の仮定は適合しないこと、および多体粒子系としての取扱いを必要とすることを示すものである。次に粒子間応力を粒子相互の衝突に起因する衝突応力と等方的な接触応力に分け、前者については前述の実験結果を繰り込んだ2体粒子の衝突理論から出発し、さらに隣接する粒子の接触点を介して運動量が周囲に伝達されていく機構をモデル化して、粒子の慣性が卓越する領域における粒子間応力の式を求めた。また、この式を土石流

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

\*\* 正会員 工修 九州大学助手 工学部水工土木学科

\*\*\* 学生会員 九州大学大学院工学研究科修士課程水工土木学専攻

に適用してその濃度・速度分布や輸送濃度などの流動特性について検討している。

## 2. 粒子の衝突・接触機構に関する実験

土石流における粒子間応力を解析するためには、粒子が隣接粒子と衝突・接触してから分離するまでのミクロな粒子相互の干渉機構を実験的に明確にすることが必要である。そのための実験 Run A においては、平均粒径  $d_m=1.74$  cm, 密度  $\sigma=1.25$  g/cm<sup>3</sup> の人工軽量骨材(メサライト)を敷厚 8 cm で水路に敷きつめ、あらかじめ浸透流により堆積層を水で飽和させた後、上流端から急激に給水して段波状土石流を発生させた。実験に用いた水路は長さ 7 m, 幅 15 cm の可変勾配水路で、水路傾斜角  $\theta_0$ , 初期浸透流量  $q_i$ , 給水量  $q_{w0}$  および発生した段波の進行速度  $U_f$ , 波高  $H_f$ , 輸送濃度  $C_{TP}$  は表-1 に示すようである。

Run A では、接触機構を調べるためアクリライトの側壁からローカム製 16 mm 高速度カメラを使用し、100 コマ/s のコマ送り速度で上流端から 5 m 位置を中心とする 25 cm 区間を流れる土石流を撮影した。使用した粒子の径は大きく、強力な照明を用いたため得られた映像はかなり鮮明で、粒子の接触開始から分離に至る間の接触角や相対的な移動状況などをフィルムモーションアナライザーによって解析した。

### (1) 接触角の分布特性

ほぼ球形に近い粒子の接触角を、図-1 に示すように

表-1 実験 Run A の要目

$\theta_0$	$q_{w0}$ (cm <sup>3</sup> /s)	$q_i$ (cm <sup>3</sup> /s)	$U_f$ (cm/s)	$C_{TP}$	$H_f$ (cm)	$T_c$ (s)
5°	203	16	52.8	0.341	10	0.259
7°	201	19	57.1	0.417	11	0.293
9°	206	24	68.4	0.466	14	0.302

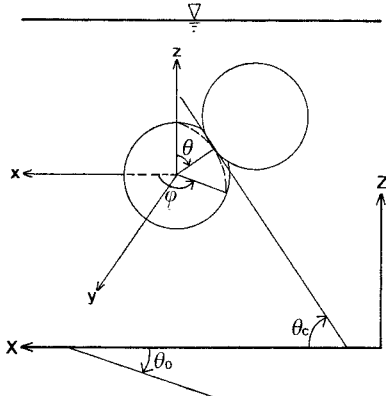


図-1 接触角と球面座標の定義

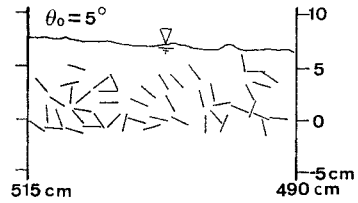


図-2 流動層における接触角の例

接触粒子の接点における接線が水路床となす角  $\theta_c$  で定義する。水路の側壁からその角度が正しく撮影されるのは、粒子表面を球面座標で表示するときの方位角  $\varphi$  が  $\varphi=0, \pi$  の近傍で接触しているものに限定される。撮影されたおのおののフィルムにおける粒子は側壁によって水路幅方向の動きが制約されるため、 $\varphi=0, \pi$  の近傍で接触している粒子が多く、その接触角の一例を示したものが図-2である。これらの図から接触角の頻度分布を求めた結果が図-3であって、同図には初期堆積層における接触角の頻度分布も示されている。堆積層の頻度分布はほぼ一様であるが、土石流中における接触角分布は比較的  $\theta_c > 0$  の領域に偏っている。

次に、0.02 秒ごとの連続したフィルムを用い、ある瞬間に注目した粒子の接触角を過去から未来にわたって追跡した例を図-4に示した。この図から、粒子の接触角は接触した瞬間(生成接触角<sup>10)</sup>  $\theta_{c*}$  とよぶ)から離れたときの接触角(分離接触角<sup>11)</sup>  $\theta_{c*}'$  とよぶ)までいくつかのパターンをとって変化することがわかる。したがって、図-3の接触角の分布は生成接触角から分離接触角までのさまざまな接触角を含んだものである。

図-4の追跡図から水路勾配ごとに生成接触角と分離接触角を 50 個程度求め、両者の頻度分布を求めたものが図-5である。明らかに粒子の大部分は  $\theta_c > 0$  の領域で接触し、 $\theta_c \leq 0$  の領域で分離することが注目され

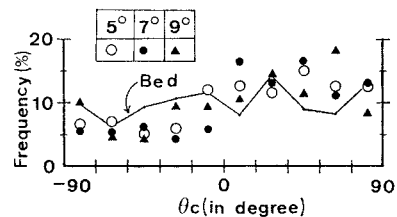


図-3 接触角の頻度分布(実線:初期堆積層)

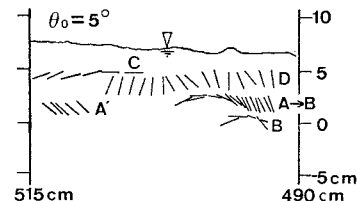


図-4 接触角の変化の例

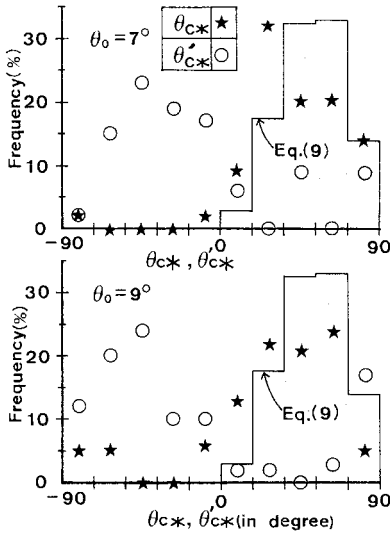


図-5 生成接触角と分離接触角の頻度分布

る。両者の最大値はそれぞれ  $\theta_{c*} \cong 45^\circ$ ,  $\theta_{c*' } \cong -45^\circ$  付近にある。

(2) 粒子相互の接触から分離までの相対移動形式

接触してから分離するまで観察可能な粒子の平均接触継続時間  $T_c$  は表-1 に記したように 0.26~0.30 秒程度であるが、その間の相対移動を図-4 に示した接触角の変化図に基づいて次のように分類しよう。すなわち、

[A] 並行接触：接触角が平均接触継続時間のほぼ 1/3 にあたる 0.1 秒間以上一定な  $\theta_c$  を保ち、相対的位置の変化しない型で、そのうちの半数以上はその後次の [B] 型に移行する。

[B] 乗り上げ接触：正の  $\theta_c$  が減少して、上層粒子が相対的に乗り上げていく型で、 $\theta_{c*} = 0^\circ \sim 72^\circ$  の範囲で起こり、特に  $\theta_{c*} = 18^\circ \sim 36^\circ$  で頻度が高い。

[A'] 並行分離：一定な  $\theta_c$  の継続時間が 0.1 秒未満で、その後分離する型。その頻度はきわめて小さい。

[C] 落ち込み接触： $\theta_c \leq 0$  の  $\theta_c$  が減少して上層粒子が相対的に落ち込む型で、 $\theta_{c*} = 0^\circ \sim -18^\circ$  の範囲で起こるが、頻度は小さい。

[D] 正面衝突接触： $\theta_{c*} = \pm 90^\circ$  付近で発生し、上層粒子が相対的に落ち込む場合や、 $\theta_c$  が  $\pm 90^\circ$  を境に、正と負を交互に繰り返す型。

[E] その他：注目粒子が水路幅方向に移動したり、撮影区間の外へ移動することにより接触角の判定が不能となるもので、その頻度はきわめて小さい。

接触開始から分離に至る相対移動の形式を上記のように分類し、それらの頻度分布を生成接触角別に示したものが図-6 である。明らかに [A], [B], [D] タイプが

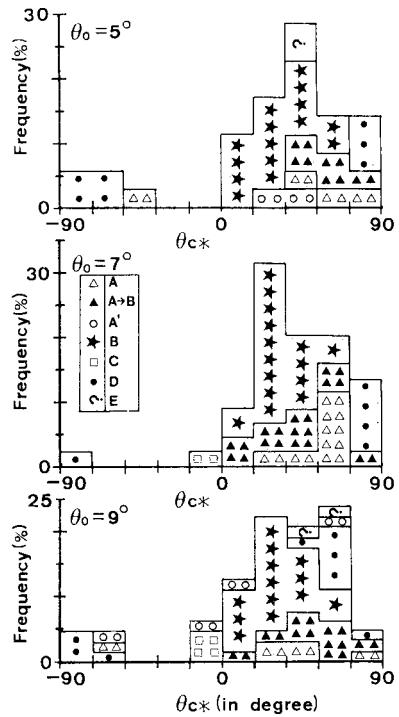


図-6 相対移動の生成接触角別頻度分布

卓越し、その他のタイプは無視して差し支えない程度である。さらに [A] タイプの半数以上は [B] タイプに移行する ([A→B] 型とする) から、接触した粒子の大部分は上層粒子の相対的の乗り上げによって  $\theta_c \leq 0$  の領域に移行する。残りの  $\theta_{c*} = 90^\circ$  付近で接触した粒子は最終的には上層粒子の相対的の落ち込みによって  $\theta_c \leq 0$  の領域に移行して分離する。

結局粒子は相互に接触後上記のような相対移動を行うので、反発現象は観察されない。したがって各粒子は接触した状態で連なり、多体粒子系を形成している。

(3) 実験結果の考察

高濃度粒子流における粒子間応力に関する従来の研究は、粒子の衝突・反発現象に起因する運動量変化に着目して解析されてきた。しかしながら、上記の実験結果は、少なくとも水-粒状体系の高濃度粒子流に関する限り、これらの前提を否定するものである。したがって以下において、実験結果に関する若干の考察とそれに基づく粒子間応力についての基本的な考え方を述べたい。

水路床に沿って流れ方向に  $x$  軸、それに垂直上向きに  $z$  軸をとる。また粒径  $d$  の注目粒子を  $o$  粒子とよび、図-7 に示すように粒子表面を球面座標  $(d/2, \theta, \varphi)$  で表示し、接近してきた  $i$  粒子が図の P 点で  $o$  粒子に接触を開始するものとする。

接触の開始を衝突とみなすと、 $i$  粒子は  $o$  粒子に衝突

した後、反発することなく [A], [B], [D] タイプの相対移動を行いながら互いに接触している。したがって衝突前後における  $i$  粒子の  $o$  粒子に対する相対速度を  $u_i, u_i'$  とおき、 $o$  粒子の中心から衝突点 P に向かう単位ベクトルを  $n$  とすると、衝突後の接触条件として、

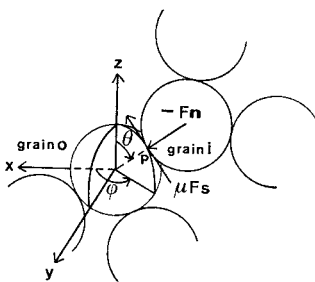


図-7 衝突の模式図

$$u_i' \cdot n = 0 \dots\dots\dots (1)$$

が成立する。ここに  $n$  は、

$$n = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \dots\dots\dots (2)$$

衝突に際しては、法線方向衝突力  $F$  が作用することは当然であるが、衝突するときの角度に無関係にすべりを伴うものとする。動摩擦係数を  $\mu$  としてさらに大きさ  $\mu F$  の摩擦力が作用する。すべりの方向の単位ベクトルを  $s$  とすると、 $s$  は以下のようなものである。衝突直前の  $i$  粒子の  $o$  粒子に対する相対的な単位入射ベクトルを  $v_i$  とすると、 $s$  は  $v_i$  を P 点における接平面へ正射影してできるベクトルと同じ向きである。したがって  $n, v_i, s$  は同一平面内に存在し、かつ  $n \perp s$  であるから、

$$v_i = (v_i \cdot n)n + (v_i \cdot s)s \dots\dots\dots (3)$$

となる。両辺に  $v_i$  との内積をとれば、

$$v_i \cdot s = \{1 - (v_i \cdot n)^2\}^{1/2} \dots\dots\dots (4)$$

となり、(3)、(4) の両式より  $s$  は、

$$s = \frac{v_i - (v_i \cdot n)n}{\{1 - (v_i \cdot n)^2\}^{1/2}} \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。2次元流では  $v_i = (1, 0, 0)$  のように近似され、式 (2) の  $n$  を用いて上式は次式となる。

$$s = \left\{ (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)^{1/2}, -\frac{\sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta}{(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)^{1/2}}, \frac{\cos \varphi \sin \theta \cos \theta}{(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)^{1/2}} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

また、2次元流では、図-5 より明らかなように、注目する  $o$  粒子に対して相対的に速い上層の  $i$  粒子は  $o$  粒子の  $[0 \leq \theta \leq \pi/2, \pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2]$  の領域 (第II象限とよぶ) で衝突し、相対的に遅い下層の  $i$  粒子は  $o$  粒子の  $[\pi/2 \leq \theta \leq \pi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2]$  の領域 (第IV象限とよぶ) で衝突するとみなされる。

次に衝突回数について考える。 $o$  粒子が単位時間当たり  $\theta \sim \theta + d\theta, \varphi \sim \varphi + d\varphi$  の間の角で衝突する回数  $dn$  は、単位体積当たりの粒子数を  $N$  として、

$$dn = -(d^2 \sin \theta d\theta d\varphi n \cdot u_i) N \dots\dots\dots (7)$$

で与えられる。2次元流の場合、衝突前の粒子間の相対

速度は巨視的な速度  $u(z)$  を用いて、

$$u_i = \left( d \cos \theta \frac{du}{dz}, 0, 0 \right) \dots\dots\dots (8)$$

のように近似されるから式 (7) は、

$$dn \propto \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi d\theta d\varphi$$

となる。したがって  $\varphi$  が一定のとき、 $\theta \sim \theta + d\theta$  の間の衝突頻度は次式で与えられる。

$$\int_{\theta}^{\theta+d\theta} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \Big/ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \sin^3(\theta+d\theta) - \sin^3 \theta \dots\dots\dots (9)$$

図-5 の柱状図は  $d\theta = 18^\circ$  とした場合の生成接触角、すなわち衝突角の頻度分布を上式から計算したもので、実験結果にはほぼ適合している。

終りに、粒子相互に作用し合う力を、接触した瞬間に働く衝突力と分離するまでに作用する接触力とに分ける。そして両者を求めるための若干の準備がなされたが、次章において解析的に取り扱う。

### 3. 粒子間応力の解析

前章で述べたように、土石流のような高濃度粒子流は各粒子が接触した状態で連結しているのが特徴である。粒状体の変形実験における Field<sup>12)</sup> の実験式が土石流に適用できるものとすれば、粒子 1 個当たりの接点数  $n_c$  は粒子の体積濃度を  $C$  として、 $n_c = 12C$  程度と考えられる。したがって、図-7 に示した  $o, i$  粒子の衝突においては、 $i$  粒子はその運動量が変化すると同時に、 $i$  粒子に接触している粒子 (2次粒子とよぶ) の運動量も、さらに2次粒子に接触している3次粒子の運動量も変化する。・・・このようにして衝突時には、衝突に関与した粒子の接点を介して次々と運動量が伝達されていく。したがって衝突応力を求めるにあたり、まず2体粒子の衝突を解析した後、上述した運動量の伝達を考慮しなければならない。一方、接触力は、後で述べるように、濃度分布によって生じる静的な力であると考える。

#### (1) 衝突応力

##### a) 2体粒子の衝突理論

2体粒子の衝突においては、図-7 に示すように質量  $m$  の単一粒子 ( $i$  粒子) がその相対速度で固定粒子 ( $o$  粒子) に衝突するものとする。衝突による  $i$  粒子の運動量変化は、前章に述べた記号を用いて、次式

$$m(u_i' - u_i) = (n - \mu s) \int_0^{t_c} F dt \dots\dots\dots (10)$$

によって与えられる。ここに  $t_c$  は衝突時間である。衝突後の接触条件式 (1) を考慮して、式 (10) の両辺に  $n$  との内積をとると、衝突点における接平面の法線  $n$  とすべりの方向  $s$  は直交するから、

$$\int_0^{t_c} F dt = -m(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}) \dots\dots\dots (11)$$

となる。式 (10), (11) から  $i$  粒子の運動量変化は、

$$m(\mathbf{u}_i' - \mathbf{u}_i) = -m(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} - \mu \mathbf{s}) \dots\dots\dots (12)$$

で与えられ、 $o$  粒子は式 (12) と大きさが同じで、逆向きの力積を受ける。

まず、 $o$  粒子が上層粒子から受ける平均の衝突力  $\mathbf{F}_o$  を求める。 $\mathbf{F}_o$  は式 (7) で与えられる衝突回数  $dn$  を用いて次式

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o &= - \int m(\mathbf{u}_i' - \mathbf{u}_i) dn \dots\dots\dots (13) \\ &= - \int_0^{\pi/2} \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=3\pi/2} mN(n - \mu \mathbf{s})(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n})^2 d^2 \sin \theta d\theta d\varphi \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。2次元流の場合、上層粒子が $o$ 粒子に衝突する範囲は第II象限  $\theta=0 \sim \pi/2$ ,  $\varphi=\pi/2 \sim 3\pi/2$  であり、 $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}_i$  はそれぞれ式 (2) および式 (8) で与えられるから、これらを式 (14) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o &= - \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=3\pi/2} mN(n - \mu \mathbf{s}) \left( d \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{du}{dz} \right)^2 d^2 \sin \theta d\theta d\varphi \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

さらに式 (2), (6) の  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  を代入する。その際単位体積中の粒子数  $N \left( = C / \left( \frac{\pi}{6} d^3 \right) \right)$  を最密充填濃度  $C_*$  で表示する次の式

$$N = \beta C / (C_* d^3) \dots\dots\dots (16)$$

を用いる (本実験で用いたメサライト, 砂の  $C_*$  は 0.6 程度であるから, 係数  $\beta$  の値は  $\beta = 1.15$  である)。以上の手順で式 (15) の積分を行うと、若干の計算の後、 $o$  粒子が上層粒子から受ける衝突力  $\mathbf{F}_o$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o &= \beta m d \frac{C}{C_*} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \left( \frac{\pi}{24} + 0.154 \mu, 0, \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{24} + 0.111 \mu \right) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

次に、本論である衝突応力を求める。粒子流における粒子間応力は、粒子流中にとられた有限な面積  $A$  の平面  $S$  を考え、その  $S$  によって切られる粒子群のどちらか一方の側の部分に働く力の合力を平面の面積  $A$  で除したもので定義される<sup>13)</sup>。したがって、 $z$  軸に垂直な面積  $A$  の面  $S_z$  をとり、この面に働く応力について考える。 $S_z$  によって切られる粒子切断面が粒子の中心となす角の半分を 図-8 に示すように  $\theta'$  とすると、切断される粒子は  $\theta' = 0 \sim \pi$  の範囲にある。また、 $\theta'$  の角度で切られる単一粒子に 図の上方から働く力  $\mathbf{F}_z$  の式形は、式 (14) から、2次元流では  $\theta' = \pi/2$  を境にして若干異なり、それぞれ次のように表示される。

$0 \leq \theta' \leq \pi/2$  のとき、衝突は第2象限中の  $\theta = 0 \sim \theta'$

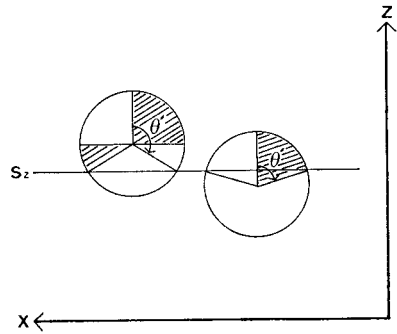


図-8 平面  $S_z$  による  $\theta'$  の説明図

の間で起こり、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z(\theta') &= - \int_{\theta=0}^{\theta'} \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=3\pi/2} mNd^4 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \\ &\quad \cdot \mathbf{F}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \dots\dots\dots (18) \\ \mathbf{F}(\theta, \varphi) &= (n - \mu \mathbf{s}) \cos^2 \theta \sin^3 \theta \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

また、 $\pi/2 \leq \theta' \leq \pi$  のとき、衝突は 図-8 に斜線で示した第2象限の全域と第4象限の一部で起こり、粒子の中心に関する力積の反対称性から、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z(\theta') &= - \int_{\theta=0}^{\pi-\theta'} \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=3\pi/2} mNd^4 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \\ &\quad \cdot \mathbf{F}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる。さらに  $\theta' \sim \theta' + d\theta'$  の間の角度で  $S_z$  によって切り取られる粒子数は  $AN(d/2) \sin \theta' d\theta'$  であるから、 $S_z$  に働く応力  $\tau_z$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \tau_z &= \int_{\theta'=0}^{\pi} \mathbf{F}_z(\theta') AN(d/2) \sin \theta' d\theta' / A \\ &= - \int_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=3\pi/2} d\varphi \left( \int_{\theta'=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\theta'} + \int_{\theta'=\pi/2}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi-\theta'} \right) \\ &\quad \cdot mN^2 \frac{d^5}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \mathbf{F}(\theta, \varphi) d\theta \sin \theta' d\theta' \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

また、 $x$  軸に垂直な面積  $A$  の平面  $S_x$  に働く応力  $\tau_x$  は、 図-9 に示すように  $\theta'$  をとると

$$\tau_x = - \int_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} d\varphi \left( \int_{\theta'=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\theta'} + \int_{\theta'=\pi/2}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi-\theta'} \right)$$

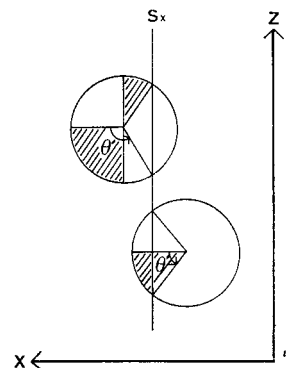


図-9 平面  $S_x$  による  $\theta'$  の説明図

$$\cdot mN^2 \frac{d^2}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \mathbf{F}(\theta, \varphi) d\theta \sin \theta' d\theta' \dots\dots\dots (21)$$

$N$  に式 (16) を代入し、 $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$  中の  $\mathbf{n}, \mathbf{s}$  については式 (20) の計算では式 (2), (6) を、式 (21) では、

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \varphi)$$

$$\mathbf{s} = (-\sin \theta, \cos \theta \sin \varphi, -\cos \theta \cos \varphi)$$

をそれぞれ用いて、かなり面倒な積分計算を行った結果をまとめると、粒子間衝突応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{jk} &= \beta^2 \frac{m}{d} \left( \frac{C}{C_*} \right)^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 A_{jk} \\ &\left( \begin{array}{cc} A_{xx} & A_{xz} \\ A_{zx} & A_{zz} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} -0.0898 - 0.089\mu & 0.0762 - 0.076\mu \\ 0.0762 + 0.102\mu & -0.0898 + 0.067\mu \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

**b) 接触粒子による運動量の伝達**

注目する  $o$  粒子に  $i$  粒子 (1次粒子とよぶ) が衝突するとき、1次粒子に接触している2次粒子、2次粒子に接触している3次粒子、・・・に次々と運動量が伝達されていくはずである。このとき、各粒子の運動方程式は、 $j$  次粒子の速度を  $\mathbf{u}_j$  とおいて、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} m d\mathbf{u}_1/dt &= (\mathbf{n} - \mu\mathbf{s})\mathbf{F} + \sum_{iN_2} \mathbf{E}_{2,1} \\ m d\mathbf{u}_2/dt &= \mathbf{E}_{1,2} + \sum_{iN_3} \mathbf{E}_{3,2} \\ &\dots\dots\dots \\ m d\mathbf{u}_l/dt &= \mathbf{E}_{l-1,l} + \sum_{iN_{l+1}} \mathbf{E}_{l+1,l} \\ m d\mathbf{u}_{l+1}/dt &= \mathbf{E}_{l,l+1} + \sum_{iN_{l+2}} \mathbf{E}_{l+2,l+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $\mathbf{E}_{j,j+1}$  は、1次粒子が衝突するとき、 $j$  次粒子から接点を介して ( $j+1$ ) 次粒子へ作用する力、 $jN_{j+1}$  は注目する  $j$  次粒子に接触している ( $j+1$ ) 次粒子の数で、前に述べたように濃度  $C$  の関数である。

上式において、作用・反作用の法則より、 $\mathbf{E}_{j,j+1} = -\mathbf{E}_{j+1,j}$  である。そして次の関係が仮定されよう。

$$F > \sum_{iN_2} |\mathbf{E}_{2,1}|, |\mathbf{E}_{1,2}| > \sum_{iN_3} |\mathbf{E}_{3,2}|, \dots,$$

$$|\mathbf{E}_{l,l+1}| > \sum_{iN_{l+2}} |\mathbf{E}_{l+2,l+1}| \dots\dots\dots (24)$$

式 (23) の辺々を足し合わせ、式 (24) を考慮すれば、

$$m \left( \frac{d\mathbf{u}_1}{dt} + \sum_{iN_2} \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} + \dots + \sum_{iN_l} \dots \sum_{iN_{l+1}} \frac{d\mathbf{u}_{l+1}}{dt} \right)$$

$$= (\mathbf{n} - \mu\mathbf{s})\mathbf{F} + \sum_{iN_2} \sum_{iN_3} \dots \sum_{iN_{l+2}} \mathbf{E}_{l+2,l+1}$$

$$\approx (\mathbf{n} - \mu\mathbf{s})\mathbf{F} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 $j$  次の単一粒子から、それに接触する ( $j+1$ ) 次粒子群へ、接点を介して伝達される運動量の割合を  $\epsilon$  とし、きわめて粗い近似として次式の関係を保定する。

$$\sum_{iN_2} \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} \Big/ \frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = \sum_{iN_3} \frac{d\mathbf{u}_3}{dt} \Big/ \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = \dots$$

$$= \sum_{iN_{l+1}} \frac{d\mathbf{u}_{l+1}}{dt} \Big/ \frac{d\mathbf{u}_l}{dt} = \epsilon \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $0 < \epsilon < 1$  である。この仮定のもとに、式 (25) から

$$m(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^l) \frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = (\mathbf{n} - \mu\mathbf{s})\mathbf{F} \dots\dots\dots (27)$$

となる。ここで  $l \rightarrow \infty$  とおくと、上式の左辺は  $[m/(1 - \epsilon)] d\mathbf{u}_1/dt$  となり、次の関係

$$\frac{m}{1 - \epsilon} (\mathbf{u}_1' - \mathbf{u}_1) = (\mathbf{n} - \mu\mathbf{s}) \int_0^{t_c} \mathbf{F} dt \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。ここに  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1'$  はそれぞれ  $i$  粒子の衝突前後における速度である。これを2体粒子の式 (10) と比較すると、粒子接触による運動量の伝達効果は、粒子1個の質量  $m$  の代わりに、次式

$$M = m/(1 - \epsilon) \dots\dots\dots (29)$$

で与えられる質量  $M$  を用いることに相当する。さらに運動量伝達率  $\epsilon$  は、濃度  $C$  が最密充填濃度  $C_*$  に近くなるほど1に近づくと考えられるので、 $C = C_*$  の近傍でテーラー展開して

$$\epsilon = 1 + \frac{\partial \epsilon}{\partial C} (C - C_*) + \dots \approx 1 + \frac{1}{k_M} \frac{C - C_*}{C_*}$$

とおくと、結局

$$M = m \frac{k_M}{1 - C/C_*} \dots\dots\dots (30)$$

となる。以上の考察にはいくつかの仮定が導入されているが、基本的な考え方としては妥当であると考えられる。したがって、衝突応力の式は式 (22) における  $m$  の代わりに式 (30) の  $M$  を用いたものとなる。

**(2) 接触応力**

接触応力すなわち衝突後の粒子相互の接触に起因する応力は接点を介して現われるので、衝突点を除いた接点の粒子まわりの頻度分布と接触力に規定される。まず図-3に示した流動層における接触角の頻度分布は若干  $\theta_c > 0$  の領域に片寄っているが、衝突点は  $\theta_c > 0$  の領域に集中するから、衝突点を除いた接点の分布は近似的に一樣であるとみなされる。次に、接触力は接点における法線成分  $F'$  と接線成分  $\mu F'$  とからなる。 $F'$  が接触角にかかわりなく一定であると仮定すれば、前者は垂直応力に、後者はせん断応力に関連する。しかし激しい流動状態の土石流では、接触力の接線成分の寄与は衝突応力に比べて小さく無視することができよう。図-8および式 (20) を参照して、 $F'$  から接触垂直応力  $p$  への変換は次式で与えられる。

$$p = \int_0^\pi \left[ \int_0^{\theta'} \frac{n_c F'}{\pi d^2} \cos \theta \pi \frac{d^2}{2} \sin \theta d\theta \right] \frac{d}{2} N \sin \theta' d\theta'$$

$$= \frac{1}{6} n_c d F' N = \beta \frac{n_c F'}{6 d^2} \frac{C}{C_*} \dots\dots\dots (31)$$

上式における  $n_c F'$  の厳密な評価はきわめて困難であるが、ここでは簡単に以下のように考える。もし土石流における粒子の衝突が完全弾性衝突であると仮定するなら

ば、衝突によって発生する応力だけで粒子の水中重量の垂直成分を受け持つはずである。しかし、実際は、前章に述べたように、衝突は非弾性的であり、その結果、衝突に付随的に接触力が発生している。したがって、 $F'$  は衝突応力では受け持ちきれない余分な水中重量によって生じた力であって、Goodman・Cowin<sup>4)</sup> などが導入した、濃度に関する等方的な応力に対応するものであろう。

したがって、 $\beta n_c F' / (6 d^2)$  をまとめて、 $p=0$  である流動層の表面濃度  $C_s$  を基準にして、その近傍でテーラ一展開すると、次の関係式が得られる。

$$p = K_p \frac{C}{C_*} \frac{C - C_s}{C_s} \dots\dots\dots (32)$$

上式を  $p = K_p' (C - C_s) / C_s$  と書き直すと、 $K_p' = K_p C / C_*$  は従来の連続体における体積弾性係数に相当するものと思われる。

以上のことから、粒子間応力  $\sigma_{jk}$  をテンソルで表示すると、次のようである。

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} &= \tau_{jk} - p \delta_{jk} \\ &= \beta^2 \frac{m}{d} k_M \frac{(C/C_*)^2}{1 - C/C_*} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 A_{jk} \\ &\quad - K_p \frac{C}{C_*} \frac{C - C_s}{C_s} \delta_{jk} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

ここに、 $\delta_{jk}$  はクロネッカーのデルタである。

なお、土石流における  $K_p$  の式形は上述の考察から、流動層の厚さを  $h$  とすると次元的に  $K_p \propto (\sigma - \rho) gh \cos \theta_0$  の形をもつことが予想される。比例係数については後述の土石流の実験結果を参照して決める。

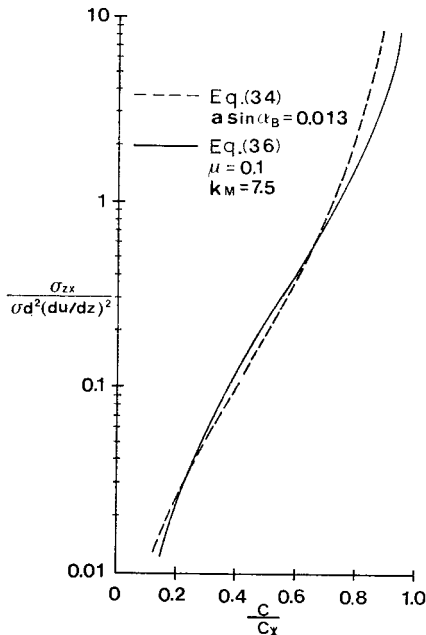


図-10 本理論式 (36) と Bagnold の式 (34) との比較

(3) Bagnold<sup>1)</sup> の実験との比較

Bagnold は回転 2 重円筒内に密度  $\rho$  のニュートン流体と粒径  $d=0.132 \text{ cm}$  の中立粒子 ( $\sigma = \rho$ ) とを封入し、外筒を回転させて高濃度の固-液系せん断流を実現させた。そして、滑らかな内筒のゴム壁に作用するせん断応力と圧力を測定し、水の影響を除いて、粒子の慣性が卓越する領域における粒子間応力について次式を提示している。

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= a \sin \alpha_B \sigma d^2 \left\{ \left( \frac{C_*}{C} \right)^{1/3} - 1 \right\}^{-2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \\ &= \sigma_{zz} \tan \alpha_B \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

ここに、 $a, \tan \alpha_B$  は実験的に決められた定数で、 $a = 0.042, \tan \alpha_B = 0.32$  である。

また大同<sup>8)</sup> は数種類の粒径の粒子を用いて Bagnold と同様な実験を行い、緒言で述べた理論式中の定数を同氏の実験から決めた結果は、次式のようなものである。

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{1}{6} K^2 \sigma d^2 \left\{ \left( \frac{C_*}{C} \right)^{1/3} - 1 \right\}^{-1} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \tan \phi \\ &= \sigma_{zz} \tan \phi \\ K &= 0.38, \tan \phi = 0.7 \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

さて、式 (35) による  $\sigma_{zx}$  は式 (34) のものに比べて、数値的にはほぼ 1 桁小さい値となる。両者の差異の原因は明らかでないが、土石流実験には Bagnold の式がほぼ適合することから、式 (34) と本文中で導いた次式

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= (0.0762 + 0.102 \mu) \frac{\pi}{6} \beta^2 k_M \sigma d^2 \\ &\quad \cdot \frac{(C/C_*)^2}{1 - C/C_*} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

とを比較し、隣接粒子による運動量の波及効果に関する係数  $k_M$  を概算してみよう。後述するように動摩擦係数  $\mu$  の値は  $\mu = 0.1$  の程度であるから、 $k_M = 7.5$  とすると 図-10 に示すように両式はほとんど一致する。

4. 土石流の流動特性

(1) 土石流の流動に関する実験

a) 実験の方法

土石流における粒子の濃度・速度分布や土石流段波の進行速度  $U_f$ 、波高  $H_f$  および輸送濃度  $C_{TP}$  を調べるため、長さ 7 m、幅 15 cm あるいは 20 cm の水路に底質材料として表-2 に記したメサライトおよび砂をそれぞれ 10 cm の厚さに敷き、土石流段波を発生させた。Run B に用いたメサライトは若干の吸水性をもつため、実験には常時水中に浸したものを使用し、密度  $\sigma$  は飽和吸水状態にある粒子で測定した値である。さらに表中

表-2 土石流実験の要目

	B (cm)	d <sub>m</sub> (mm)	$\sqrt{\frac{d_{94}}{d_{16}}}$	$\sigma$ (g/cm <sup>3</sup> )	C <sub>*</sub>	tan φ	θ <sub>oi</sub>	θ <sub>o*</sub>	q <sub>w0</sub> (cm <sup>2</sup> /s)	θ <sub>o</sub>	U <sub>f</sub> (cm/s)	H <sub>f</sub> (cm)
Run B	15	8.2	1.25	1.6	0.59	0.78	5.7°	11.5°	200	4°~12°	70~90	5~12
Run C1	15	4.6	1.18	2.59	0.58	0.73	11.5°	19.3°	200	12°~23°	100~150	3~11
Run C2	20											

の φ は河床材料の水中安息角であり、θ<sub>oi</sub> は高橋<sup>13)</sup>による土石流の発生限界勾配式

$$\tan \theta_{oi} = \frac{C_* (\sigma - \rho)}{C_* (\sigma - \rho) + \rho (1 + h_0/d)} \tan \phi, \quad h_0/d = 1.4 \dots \dots \dots (37)$$

より求めたもので、ここに h<sub>0</sub> は表面流の水深である。また θ<sub>o\*</sub> は全層流動の勾配である。なお土石流実験においては、あらかじめ堆積層を浸透流で飽和させた後、所定の給水を行ったが、浸透流の水位を堆積層上面と一致させるように努めた。そのため現象の再現性は良好であった。

粒子の濃度分布と速度分布を測定するために、上流より x=5 m の位置において、16 mm 高速度カメラを使用し、アクリライトの側壁を通して、土石流の流動層を 100~200 コマ/s のコマ送り速度で撮影した。粒子の速度は、各粒子が 10 コマの間に移動する距離をフィルムモーションアナライザーによって読み取って求めた。濃度分布は、平野・岩元<sup>14)</sup>に従って側壁に接している粒子数を測定して求めた。すなわち、給水と同時に少量の白色水性ペイント水溶液を上流端から混入させ、側壁に接触して流れる粒子だけが鮮明に撮影されるようにする。そして流動層の部分を数等分し、分割された面積 A の側壁に接触する粒子数 N<sub>A</sub> を読み取り、 $C = C_* (N_A/A)^{3/2} d^3/\beta$  を用いて、濃度 C に換算した。また、輸送濃度 C<sub>TP</sub> は、水路下流端において、先端部到達後の約 1 秒間における土石流を採取して求めた。なお、段波の進行速度 U<sub>f</sub> は、それが等速化したとみなし得る x=2~6 m 区間の通過時間から求めた。

b) 実験の結果

Run B の実験において求められた濃度分布 C/C<sub>b</sub> の実験値を 図-11 に示した。ここに、C<sub>b</sub> は底面濃度、η = z/h における h は流動層の厚さである。側壁で測定され、上の換算式で求められた濃度 C の精度は明らかでなく、測定値の散らばりも大きいが、定性的傾向としては一般に濃度勾配が存在し、θ<sub>o</sub> が θ<sub>o\*</sub> 付近では一様分布に近いが、θ<sub>o</sub> の減少とともに濃度勾配は顕著になる。

図-12, 13 は段波状土石流の段丘肩、および後続流における速度分布の数列を示したものである。この図から、流動層の流れの特徴は、堆積層との境界付近で上方に凸で、ほぼ中央部において変曲点をもつ速度分布形を

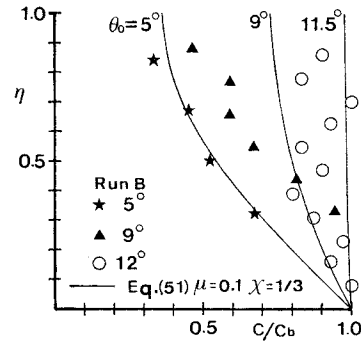


図-11 濃度分布の実測値と計算値

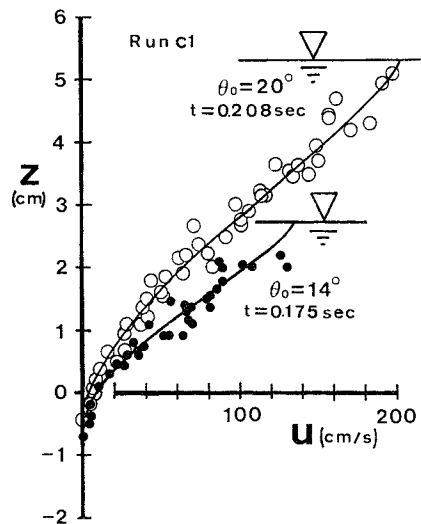
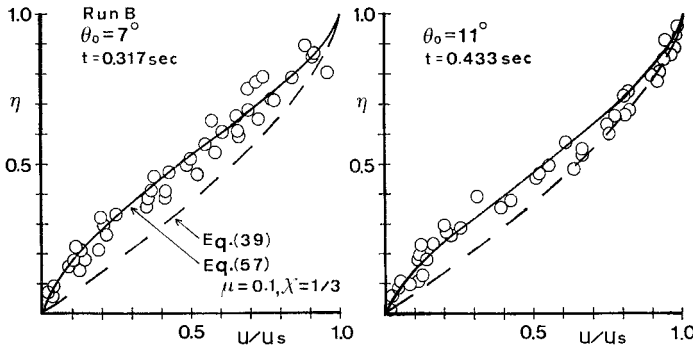


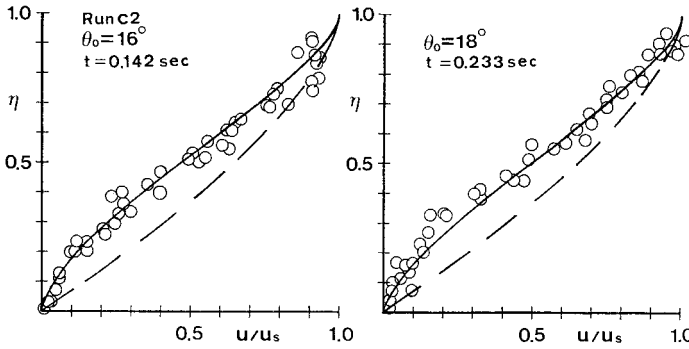
図-12 速度分布の実測値と回帰曲線

示すことである。同様な傾向は高橋<sup>15)</sup>の実験においても認められる。このような速度分布においては、表面速度 u<sub>s</sub>、流動層の厚さ h の決定が問題となる。したがって、本文では 図-12 に示したように、多数の実測値をもとに回帰曲線を引き、表面との交点をもって表面速度とし、さらにその表面速度の 1% 程度の速度をもつ位置を境界面とみなすことにした。図-13 (a)~(d) はこのようにして求めた u/u<sub>s</sub> の実測値を η = z/h に対してプロットしたもので、t は撮影地点における段波先端通過後の時間である。同図のうち、(a), (b) は段丘肩付近の u/u<sub>s</sub> をそれぞれメサライト、砂について示したもので、(c) は段丘肩付近と後続流の速度分布が同様な傾向であ

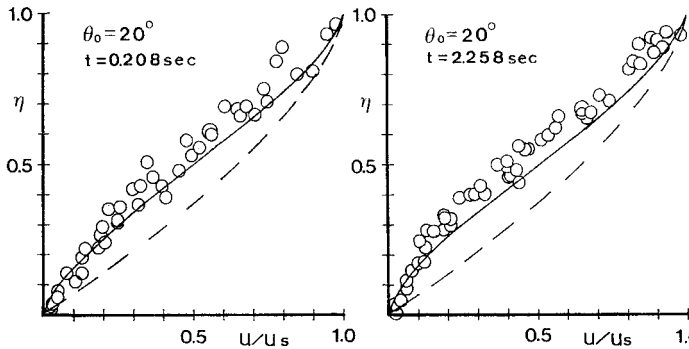




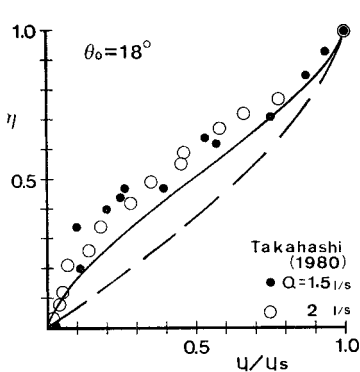
(a) 段丘肩付近 (Run B)



(b) 段丘肩付近 (Run C)



(c) 段丘肩, 後続流 (Run C)



(d) 高橋<sup>15)</sup>の実験における速度分布

図-13 速度分布  $u/u_s$  と  $\eta = z/h$  との関係

ることを示すものである。また、(d) は高橋<sup>15)</sup>の実験結果を  $u/u_s$  と  $\eta$  との関係に直したものである。なお、図-14 に水路末端で測定された段波先端部の輸送濃度  $C_{TP}$  と水路勾配  $\tan \theta_0$  との関係を示している。

さて、従来のダイラタント流動式においては、式 (34) で示されるせん断応力が水・粒子混相流の質量力の流れ方向成分とつり合い、垂直応力が粒子の水中重量の垂直成分とつり合うものとして解析されている<sup>2), 16)</sup>。その結果の一部を要約すると、濃度分布は  $x$  方向に一様で、断面平均濃度  $\bar{C}$  は次式

$$\bar{C} = \frac{\tan \theta_0}{\{(\sigma - \rho)/\rho\}(\tan \alpha_B - \tan \theta_0)} \dots \dots \dots (38)$$

となり、速度分布は、

$$u/u_s = 1 - (1 - \eta)^{3/2} \dots \dots \dots (39)$$

で与えられる。ここに、 $\tan \alpha_B$  は粒子の衝突に関連した角度で、堆積層の安息角  $\phi$  で近似されている。

上述のダイラタント流動式を実験結果と比較するため、式 (39) の曲線を 図-13 に、さらに濃度分布を一様として、 $\bar{C} = C_{TP}$  とみなした式 (38) を 図-14 に、いずれも破線で示している。

さて、式 (39) による速度分布形は水路勾配に無関係に下に凸の形をもつが、測定された速度分布 図-13 は前述した特徴をもち、式 (39) とはかなり傾向が異なる。また、図-14 の  $C_{TP}$  と  $\tan \theta_0$  との関係図においては、特に砂の場合、 $C_{TP} \leq 0.45$  の範囲で  $\bar{C} = C_{TP}$  とみな

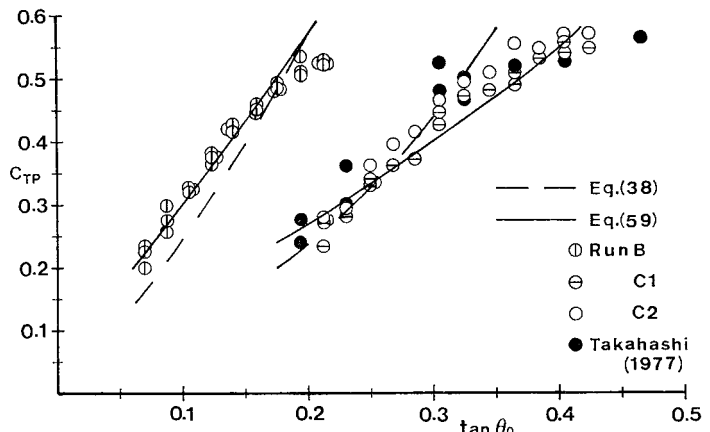


図-14 輸送濃度と水路勾配との関係

した式 (38) がほぼ適合するようにみえる。しかしながら、実際には濃度分布が存在するため、 $\bar{C} > C_{TP}$  であり、両者の差は水路勾配が小さいほど増大するものと考えられる。

これらのことから、高橋などの従来の理論は複雑な現象を簡潔な式を用いてうまく表わしてはいるが、土石流における濃度・速度分布などを説明するためには、さらに詳細な検討が必要である。

(2) 土石流の濃度・速度分布の解析

2次元等流状態における土石流の流動を規定する基礎式は、流れ方向については固・液両相をまとめて取り扱い、流れに垂直方向については固相のみについて考えると、それぞれ次式で与えられる。

x方向：

$$\{\sigma C + \rho(1-C)\}g \sin \theta_0 + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + (1-C) \frac{\partial \sigma_{zx}^w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \{\rho(1-C) \overline{u_w' w_w'}\} = 0 \dots \dots \dots (40)$$

z方向：

$$-(\sigma - \rho) C g \cos \theta_0 + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + I_z = 0 \dots \dots \dots (41)$$

従来、土石流では、粒子間応力  $\sigma_{zx}$  に比べて水流による粘性応力  $\sigma_{zx}^w$  および水流の乱れによるレイノルズ応力  $-\rho \overline{u_w' w_w'}$  の寄与は微小であるとして無視されてきたが、本文においてもこの仮定を踏襲することにする。また式 (41) における  $I_z$  は衝突時の付加質量力や、粒子と流体との速度差に起因する抵抗力などを含む。後者は微小であると考えられるため無視する。前者の付加質量力を考慮するためには、 $\sigma_{zz}$  の式 (33) における粒子の質量  $m$  の代わりに、付加質量を加えた  $m\{1 + \rho/(2\sigma)\}$  で置き換えればよい。

以上の仮定のもとに、式 (40)、(41) を積分すると、前章で求めた諸式を加えて、粒子の速度  $u$  と濃度  $C$  を規定する連立方程式は次式となる。

$$\sigma_{zx} = \int_z^h \{\sigma C + \rho(1-C)\} g \sin \theta_0 dz \dots \dots \dots (42)$$

$$\sigma_{zz} = - \int_z^h (\sigma - \rho) C g \cos \theta_0 dz \dots \dots \dots (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx} &= \tau_{zx} = K_M \sigma d^2 \frac{(C/C_*)^2}{1-C/C_*} \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \\ K_M &= \frac{\pi}{6} (0.0762 + 0.102 \mu) \beta^2 k_M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

$$\sigma_{zz} = \tau_{zz} - p, \quad p = K_p \frac{C}{C_*} \frac{C - C_a}{C_s} \dots \dots \dots (45)$$

ここで、 $\tau_{zx}/\tau_{zz} = -\alpha$  とおくと、

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zz}} = - \frac{r}{1 + \rho/(2\sigma)} = -\alpha \dots \dots \dots (46)$$

$$r = (0.0762 + 0.102 \mu) / (0.0898 - 0.067 \mu) \dots \dots \dots (47)$$

となる。上の式 (42)、(43)、(45) および式 (46) から、濃度勾配は次式となる。

$$\frac{K_p}{C_s(\sigma - \rho) g h \cos \theta_0} \frac{dC}{d\eta} = - \frac{\alpha - \tan \theta_0}{\alpha} \cdot C_* \frac{C - C_a}{2C - C_s} \dots \dots \dots (48)$$

ここに  $\eta = z/h$  であり、 $C_a$  は式 (45) で  $p=0 (K_p=0)$  とした場合の一樣濃度に相当し、次式

$$C_a = \frac{\tan \theta_0}{\{(\sigma - \rho)/\rho\} (\alpha - \tan \theta_0)} \dots \dots \dots (49)$$

で表わされる。移動床における土石流の境界条件は、速度分布が 図-12 に示されるように、流れが底面付近の粒子を引きずる形をもち、底面  $z=0$  で  $u=0$ 、その近傍で  $du/dz=0$  であるから、 $z=0$  で  $C=C_*$  とみなされる。以下簡単のため

$$\frac{K_p}{C_s(\sigma - \rho) g h \cos \theta_0} = \chi, \quad \frac{\alpha - \tan \theta_0}{\alpha} = \psi \dots \dots (50)$$

とおき、 $\chi$  を実験結果との比較により決められる定数と仮定して、式 (48) を積分すると、濃度  $C$  は次式

$$\eta = \left( 2 \frac{C_* - C}{C_*} - \frac{2C_a - C_s}{C_*} \ln \frac{C - C_a}{C_* - C_a} \right) \frac{\chi}{\psi} \dots \dots \dots (51)$$

で与えられる。したがって、表面濃度  $C_s$  は式 (51) において  $\eta=1$  で  $C=C_s$  とおいて、

$$\frac{C_s - C_a}{C_* - C_a} = \exp \left\{ \left( 2 \frac{C_* - C_s}{C_*} - \frac{\psi}{\chi} \right) C_* / (2C_a - C_s) \right\} \dots \dots \dots (52)$$

となる。断面平均濃度  $\bar{C}$  は式 (51) を積分して、

$$\bar{C} = C_a + (C_* - C_s) \frac{\chi}{\psi} \dots \dots \dots (53)$$

速度分布は式 (42)、(44) と式 (48) を使い、摩擦速度を  $u_* = \sqrt{gh \sin \theta_0}$  とすると、若干の計算の後、次式

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{u}{u_*} \right) = \frac{h}{d} \left( K_M \frac{\sigma}{\rho} \frac{\psi}{\chi} C_* \right)^{-1/2} \frac{(1 - C/C_*)^{1/2}}{C/C_*} \cdot \left[ (C - C_s) \left\{ \frac{\sigma - \rho}{\rho} (C + 2C_a) + 2 \right\} + \left( 1 + \frac{\sigma - \rho}{\rho} C_a \right) (2C_a - C_s) \ln \frac{C - C_a}{C_s - C_a} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (54)$$

が得られる。上式において、底面  $\eta=0$  で  $C=C_*$  より  $d(u/u_*)/d\eta=0$ 、表面  $\eta=1$  においても速度勾配は 0 となり、表面の境界条件を満たしていることがわかる。さらに式 (48) を用いて  $u/u_*$  を濃度  $C$  で表示し、 $\eta=0$ 、 $C=C_*$  で  $u/u_*=0$  なる境界条件を用いると

$$\frac{u}{u_*} = \frac{h}{d} \left\{ \frac{\sigma}{\rho} K_M \left( \frac{\psi}{\chi} C_* \right)^3 \right\}^{-1/2} \int_C^{C_*} F(C) dC \dots \dots \dots (55)$$

となる。ここに、

$$F(C) = \frac{2C - C_s}{C - C_a} \frac{(1 - C/C_*)^{1/2}}{C/C_*}$$

$$\cdot \left[ (C - C_s) \left\{ \frac{\sigma - \rho}{\rho} (C + 2C_a) + 2 \right\} + \left( 1 + \frac{\sigma - \rho}{\rho} C_a \right) (2C_a - C_s) \ln \frac{C - C_a}{C_s - C_a} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (56)$$

である。表面速度  $u_s$  は式 (55) で  $C = C_s$  とおいたときの  $u$  であるから、 $u/u_s$  は、

$$\frac{u}{u_s} = \int_C^{C_*} F(C) dC / \int_{C_s}^{C_*} F(C) dC \dots\dots\dots (57)$$

で与えられる。また  $\bar{u}$  を断面平均の粒子速度として、流速係数  $\bar{u}/u_*$  は式 (55) の断面平均値を計算して次式となる。

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{h}{d} \left\{ \frac{\sigma}{\rho} K_M \left( \frac{\psi}{\chi} C_* \right)^5 \right\}^{-1/2} \int_{C_s}^{C_*} \frac{2C - C_s}{C - C_a} \cdot \left( \int_C^{C_*} F(C) dC \right) dC \dots\dots\dots (58)$$

さらに、輸送濃度  $C_{TP}$  は、水の流速を  $u_w$  として、次式

$$C_{TP} = \int_0^1 C u d\eta / \int_0^1 \{ C u + (1 - C) u_w \} d\eta$$

で定義されるが、近似的に  $u = u_w$  とみなすと

$$\begin{aligned} C_{TP} &= \int_0^1 C u d\eta / \int_0^1 u d\eta \\ &= \int_{C_s}^{C_*} \frac{C(2C - C_s)}{C - C_a} \left( \int_C^{C_*} F(C) dC \right) dC / \int_{C_s}^{C_*} \frac{2C - C_s}{C - C_a} \left( \int_C^{C_*} F(C) dC \right) dC \dots\dots (59) \end{aligned}$$

となる。上の諸式のうち、濃度分布の式 (51), (52), 速度分布  $u/u_s$  の式 (57) および輸送濃度  $C_{TP}$  の式 (59) を計算するためには、粒子の衝突時における摩擦係数  $\mu$  および式 (50) で定義された  $\chi$  の値を求めねばならない。 $\mu$  は式 (46), (47) から  $\tau_{zx}/\tau_{zz} = -\alpha$  を規定し、 $\alpha$  は式 (49) の  $C_a$  を規定する。また  $C_{TP}$  は  $C_a$  および  $\chi$  によって規定されるが、この理論の適用限界を与える  $C_{TP}$  の最大値

$$C_{TPM} = C_{aM} = C_*$$

が生じる勾配  $\tan \theta_{0M}$  は  $\alpha$  または  $\mu$  のみの関数である。ここに  $C_{aM}$  は  $C_a$  の最大値を意味する。したがって、図-14において  $C_{TPM} = C_*$  を与える  $\tan \theta_{0M}$  として、Run B では  $\tan \theta_{0M} \approx 0.21$ , Run C では  $\tan \theta_{0M} \approx 0.42$  とすると、式 (49) から逆算された  $\mu$  の値はいずれも  $\mu \approx 0.1$  となる。 $\chi$  については、図-14 の  $C_{TP}$  と  $\tan \theta_0$  との実験において、 $\mu = 0.1$  とおき、 $\chi$  の値を変化させて両者間の計算曲線を求め、全般的に実験値に適合する  $\chi$  を決めると、 $\chi = 1/3$  が得られた。図-14における実線は  $\mu = 0.1, \chi = 1/3$  とおいた計算曲線を示したものである。また、濃度分布の図-11, 速度分布の図-13 に記入した実線は、いずれも式 (51), (57) の計算曲線であって、実験値との適合は良好であるといえよう。

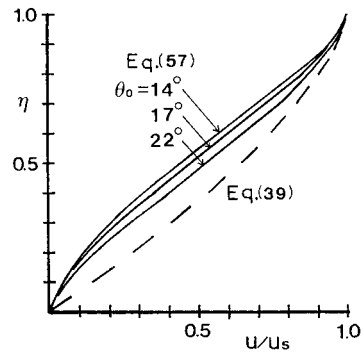


図-15 砂の速度分布の計算曲線

また、土石流においては、速度  $u/u_s$  と  $\eta$  との関係は水路勾配  $\tan \theta_0$  と粒子の密度  $\sigma$  によって変化する。図-15 は、砂についての計算結果を示したもので、破線は一様濃度のダイラタント流体の式 (39) である。

(3) 土石流段波の特性

濃度分布が一様なダイラタント流動式によれば、流速係数  $\bar{u}/u_*$  は次式で与えられる<sup>2), 16)</sup>。

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{2}{5\sqrt{a \sin \alpha_B}} \cdot \frac{h}{d} \left\{ C + (1 - C) \frac{\rho}{\sigma} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \left( \frac{C_*}{C} \right)^{1/3} - 1 \right\} \dots\dots\dots (60)$$

ここに、最近の土石流の実験結果によれば、 $a \sin \alpha_B \approx 0.02$  とされている<sup>17)</sup>。

一方、本研究においては  $\bar{u}/u_*$  の値は式 (58) で与えられるので、両式を土石流段波に適用して、段波の進行速度  $U_f$  および波高  $H_f$  を求める。式 (58) において、 $\bar{u}, h$  の代わりに、それぞれ  $U_f, H_f$  を用いると、

$$(U_f / \sqrt{g H_f \sin \theta_0}) d / H_f$$

は係数  $\mu, \chi$  および衝突応力における隣接粒子による運動量の波及効果に関する係数  $k_M$  をパラメーターとして含み、 $\sigma/\rho$  と  $C_{TP}$  (または  $\tan \theta_0$ ) の関数となる。この関係を示したものが図-16であって、上の3個の係数のうち、すでに  $\mu = 0.1, \chi = 1/3$  と決められているので、 $k_M = 5$  とおいた計算結果が図中に示した実線である。なお、上の  $k_M$  の値は Bagnold の半実験式から決めた  $k_M = 7.5$  に近い。

次に、土石流段波の単位幅流量は  $q_T = U_f H_f$  である。浸透流で飽和した堆積層においては、給水量を  $q_{w0}$  として、次の関係

$$\frac{q_T}{q_{w0}} = \frac{U_f H_f}{q_{w0}} = \frac{1}{1 - C_{TP}/C_*} \dots\dots\dots (61)$$

が成立する。式 (61) に式 (58) を代入して整理すると、次式

$$\frac{H_f (g \sin \theta_0)^{0.2}}{(d q_{w0})^{0.4}} = \left[ \frac{C_*}{C_* - C_{TP}} \left\{ \frac{\sigma}{\rho} K_M \left( \frac{\psi}{\chi} C_* \right)^5 \right\}^{1/2} \right] /$$

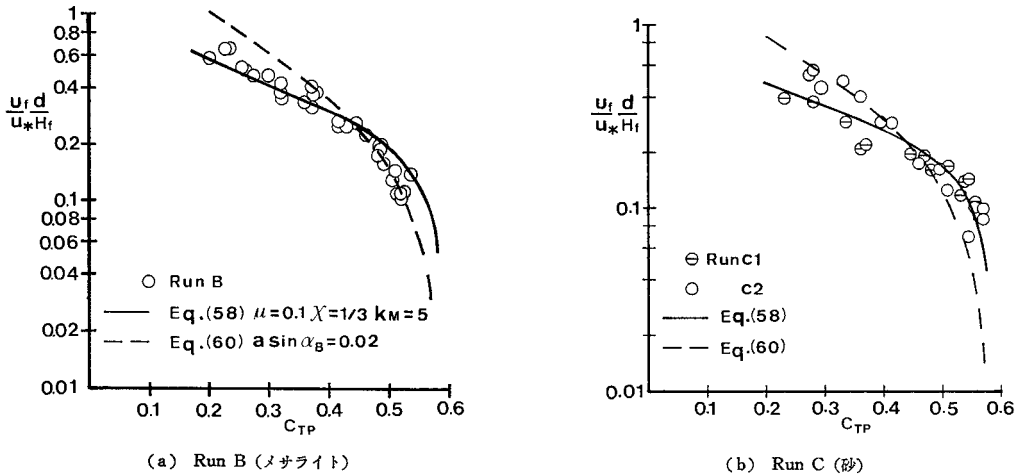


図-16 土石流段波の進行速度の無次元表示と  $C_{TP}$  との関係

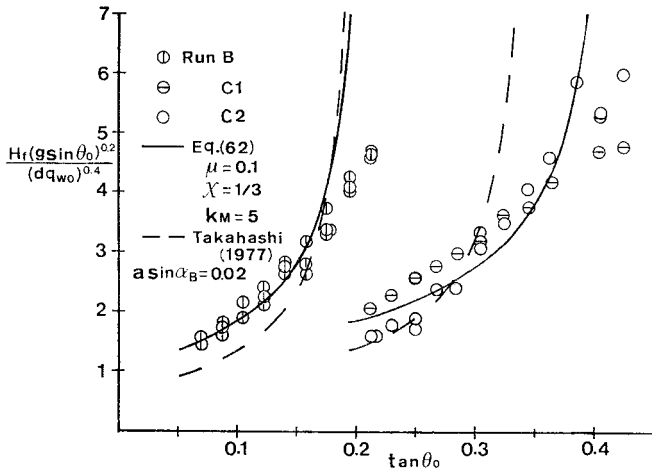


図-17 土石流段波の波高の無次元表示と水路勾配との関係

$$\left[ \frac{c_*}{c_s} \frac{2C - C_s}{C - C_a} \left( \int_c^{c_*} F(C) dC \right) dC \right]^{0.4} \dots (62)$$

が得られ、図-17 は実験値と計算値を示したものである。なお、実線は式(62)の計算曲線であり、破線は  $a \sin \alpha_B = 0.02$  とおいた場合の高橋のダイラント流動式による計算曲線である。高橋の流動式の簡明さに対して、本文の理論は複雑であるが、実験結果との一致はきわめて良好であるといえよう。

### 5. 結 語

以上、高濃度の固-液系を形成する土石流について、粒子相互が衝突・接触して分離するまでの過程についてのミクロな観察結果に基づいて、粒子間応力の表示式を求めた。さらに、この式を土石流に適用し、粒子の濃度・速度分布や輸送濃度について解析するとともに、土石流段波の流動特性について検討した。おもな結果を要

約すると、以下のようである。

(1) 土石流のような固-液系せん断流においては、粒子の大部分は、相対的に下層の粒子に対して、その限られた領域において接触を開始し、反発することなく下層粒子に乗り上げた後分離していく。したがって、従来の粒子間応力の解析で常用されてきた完全弾性衝突の仮定は土石流には適用できないこと、および土石流中の粒子は接触した状態で連なり合い、多体粒子系を構成していることが判明した。

(2) そこで、粒子間応力を接触開始の衝突応力と、その後の接触した状態における接触応力とに大別した。前者については、すべりを伴う2体粒子の非弾性衝突理論から出発し、さらに隣接する粒子の接点を介して運動量が周囲に伝達されていく機構をモデル化し、後者については、非弾性衝突で支えきれない粒子の水中重量に関連する等方的な応力と考えて解析を行い、粒子間応力の式(33)が求められた。衝突せん断応力は Bagnold の式とほぼ一致し(図-10)、衝突垂直応力と比例関係にある。

(3) 土石流の実験において測定された粒子の濃度分布は、いわゆる全層流動勾配付近において一様分布に近いが、水路勾配の減少とともに濃度勾配は顕著になる。また、速度分布は底面付近で上方に凸で、中央部に変曲点をもつ特徴のある分布形をもち、水路勾配によって若干変化する(図-12, 13)。これらの実験結果は、上の粒子間応力を土石流に適用して導かれる理論計算の結果ときわめてよく一致する。特に、濃度勾配の存在と特異な速度分布形は、従来のダイラント流動式では考慮されていない接触応力によるものである。さらに、土石流段波の輸送濃度、進行速度および波高の理論も実験結果

とよく一致し(図-14, 16, 17), 与えられた給水量, 河床条件および水路勾配のもとに, 土石流段波の特性を予測することができる。

なお, 本文の解析において, 接触応力に関する考察はかなり粗いものであり, また本文で無視した水流のレイノルズ応力や水と粒子との相対速度の影響など細部については, 多くの問題が残されている。今後土石流から掃流への移行現象に関連して研究を進めたいと考えている。

最後に, 実験およびデータ整理に際し, 藤田和夫技官, 戸田和彦氏(現・運輸省), 中村哲巳氏(現・建設技研)に多大の助力を受けた。また本研究の一部は文部省自然災害特別研究(1)「扇状地における洪水・土砂災害の発生とその防止・軽減に関する研究」(研究代表者, 京大防災研 芦田和男教授)の援助のもとになされた。記して謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) Bagnold, R.A. : Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 225, pp. 49~63, 1954.
- 2) 高橋 保 : 土石流の発生と流動に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 20号 B-2, pp. 405~435, 1977.
- 3) McTigue, D.F. : A model for stresses in shear flow of granular materials, Proc. U.S.-Japan Sem. on Continuum-Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, pp. 266~271, 1978.
- 4) Goodman, M.A. and S.C. Cowin : Two problems in the gravity flow of granular materials, J. Fluid Mech., Vol. 45, pp. 321~339, 1971.
- 5) Savage, S.B. : Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels, J. Fluid Mech., Vol. 92, pp. 53~96, 1979.
- 6) 金谷健一 : 粒状体の流動の基礎理論(第1報, 非圧縮性の流れ), 日本機械学会論文集(B編), 45巻, 392号, pp. 507~514, 1979.
- 7) 金谷健一 : 粒状体の流動の基礎理論(第2報, 発達した流れ), 日本機械学会論文集(B編), 45巻, 392号, pp. 515~522, 1979.
- 8) 大同淳之 : 粒子流の流動式, 第16回自然災害科学総合シンポジウム, pp. 215~218, 1979年9月.
- 9) 椿東一郎・橋本晴行・中村哲巳 : 土石流の流動特性, 昭和53年度土木学会西部支部研究発表会講演集, pp. 233~234, 1979年2月.
- 10) 小西純一 : 粒状体の変形機構について, 土木学会第31回年次学術講演会講演概要集, 1976.
- 11) 大槻正紀 : 粒状体の2次元変形について, 第9回土質工学研究発表会講演概要集, pp. 199~202, 1974.
- 12) Field, W.G. : Towards the statistical definition of a granular mass, Proc. 4th A. and N.Z. Conf. on Soil Mech., pp. 143~148, 1963.
- 13) 長尾高明 : 金谷健一氏の論文, 「粒状体の流動の基礎理論(第1報)」の討論, 日本機械学会論文集(B編), 45巻, 392号, pp. 507~514, 1979.
- 14) 平野宗夫・岩元 賢・猿渡裕明 : 固定床における土石流の流動特性について, 第15回自然災害科学総合シンポジウム, pp. 483~484, 1978年10月.
- 15) Takahashi, T. : Debris flow on prismatic open channel, A.S.C.E., Vol. 106, HY 3, pp. 381~396, 1980.
- 16) 大同淳之 : 砂れき流の抵抗法則, 第12回自然災害科学総合シンポジウム, pp. 225~226, 1975年10月.
- 17) 高橋 保 : 土石流の発生・流動に関する実験的検討, 「土石流の発生機構に関する研究」, 文部省科学研究費自然災害特別研究(計画研究)報告書, pp. 25~40, 1978.

(1981.2.12・受付)