

有限帯板法による薄板の有限変位解析

FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF THIN PLATES
BY FINITE STRIP METHOD前田 幸雄*・林 正**・森 寛 司***
By Yukio MAEDA, Masa HAYASHI and Kanji MORI

1. 緒 言

複雑な形状を有する構造物の解析には有限要素法は優れた解法であり、過去において種々の問題が解かれていた¹⁾。しかし、有限要素法を用いて構造全体の非線形解析を行えば計算時間は長大になり、計算費用の点から実用性の問題が残されている。

一方、有限帯板法は、一様断面を有する薄肉構造などのような単純な形状の構造物の全体解析に適したきわめて計算効率のよい解法であり、線形応力解析や線形座屈解析、固有振動解析などについて数多くの解析結果が報告されている^{2)~5)}。しかし、有限変位解析に用いた研究はきわめて数少なく、著者らが過去に発表^{6),7)}したもの以外には、上田ら⁸⁾が平板と桁の弾塑性有限変位解析に適用した例が見受けられる程度である。

有限変位問題ではすべての変位成分が連成し、解式には変位に関する3乗以上の非線形項が現われるので、有限帯板法において直交性を活用することができない。また、非線形剛性行列には二重級数項の項が含まれるので、剛性行列を解析的に求めることは容易でなく、有限帯板法を有限変位解析に用いた場合には、計算は線形解析⁹⁾のように簡単にならない。

このように、有限変位解析では有限帯板法の長所である計算の効率性が大幅に損なわれるために、有限帯板法の適用が疑問視されているようである。たとえば、平板の非線形解析について、非線形性が著しい場合には有限帯板法は有限要素法に比べて計算時間は有利にならないという報告⁹⁾がある。この文献では計算時間が長くなる原因についての考察はないが、著者らの経験^{6),7)}から判断すれば、文献6)、8)では剛性行列の計算に数値積分

の手法を用いたためと考えられる。文献7)の研究では、剛性行列を解析的に求めることにより、全計算時間を数分の一に短縮することができた。そこで、この解析手法をさらに発展させて、計算時間の短縮とともに解析精度の高い有限帯板法の開発を試みるものである。

本報告では、非線形問題への有限帯板法の適用性を調べるための基礎的研究を行ったものであり、内容は幾何学的非線形問題に限定した。解析では、計算の効率を高めるために変位に関する2次の非線形項までを含む剛性行列を解析的に定式化した。剛性行列の各要素をできるだけ容易に陽な形で求めるために、有限要素法¹⁾とは異なる定式化を用いている。剛性行列を解析的に求めたことによる利点は、計算時間が短くなることのほかに、積分演算で誤差が生じないこと、ひいては解の数値的安定性がよくなるので、座屈後の解析や飛移のような高度の非線形問題を解くことができる。

また、座屈後の解析を行うためには、通常有限帯板法で用いられている変位関数では解析精度が悪いと考えられたので、高次の変位関数や剛体変位を表わす級数項などを使用した。これらの関数は、文献4)、6)~8)で用いられているものである。

計算時間を短くするためには、解式とともに数値計算法がきわめて重要である。不安定現象が生じる問題の計算では、一般的に荷重増分法よりも変位増分法を用いる方がNewton-Raphson法の収束性がよくなるので、計算時間を大幅に短縮することができる。しかし、有限帯板法における一般化変位は級数展開された係数であるので物理的な意味をもたない。したがって、通常の変位増分法¹⁰⁾をそのまま用いることができないので、有限帯板法に適した変位制御の数値解法を開発した。

以上のような改良された有限帯板法を薄板の有限変位解析に適用して、解の精度、収束性、数値的安定性や計算効率について検討した結果を報告する。

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系
*** 正会員 工修 新日本製鐵(株)(研究当時 大阪大学大学院修士課程学生)

2. 節線変位と変位関数

(1) 帯板要素

帯板要素として、一定厚さの長方形の薄板を考える。帯板の寸法は、図-1 に示すように長さを l 、幅を b 、厚さを t とする。そして、右手直交座標系 (x, y, z) を、 x - y 平面が帯板の中央面に一致するように定め、中央面の x, y, z 軸方向の変位をそれぞれ u, v, w とし、 $y=0$ と b の中央面上の辺を、 i および j 節線とする。帯板要素は、 $x=0$ と l で単純支持されている場合を考える。なお、 i, j 節線における境界条件は、有限要素法と同じく任意な条件を与えることができる。

帯板の変形に関しては Kirchhoff の仮定¹⁾が成り立つものとし、有限変位の記述には (x, y, z) 座標で表わされた Lagrange 方式を用いる。

(2) 節線変位

帯板要素の節線変位には、並進変位 u, v, w のほかにこれらの変位成分の y に関する次式の微係数を採用する。

$$\phi = \partial u / \partial y, \psi = \partial v / \partial y, \theta = \partial w / \partial y \dots (1 \cdot a \sim c)$$

これらの 6 成分の節線変位を用いて、中央面上 ($x, y, z=0$) の変位 u, v, w は次式で表わされるものと仮定する。

$$u = \sum_m (f_1 u_{im} + f_2 \phi_{im} + f_3 v_{jm} + f_4 \psi_{jm}) U_m \dots (2 \cdot a)$$

$$v = \sum_m (f_1 v_{im} + f_2 \psi_{im} + f_3 v_{jm} + f_4 \psi_{jm}) V_m \dots (2 \cdot b)$$

$$w = \sum_m (f_5 w_{im} + f_6 \theta_{im} + f_7 w_{jm} + f_8 \theta_{jm}) W_m \dots (2 \cdot c)$$

ここに、 u_{im}, v_{im}, \dots は節線変位を x 軸方向に級数展開したときの係数であり、有限帯板法における一般化変位である。 $f_1 \sim f_8$ は y 軸方向の形状関数、 U_m, V_m, W_m は x 軸方向の展開関数である。添字 i, j は節線を、 m は級数の項数を表わす。

式 (1・a) と (1・b) の変位成分 ϕ と ψ はひずみ $\epsilon_{xy}, \epsilon_y$ の連続性を保持するために必要な成分であり、平板

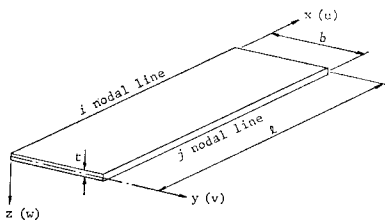


図-1 帯板要素

が面内曲げを受ける場合⁴⁾ やたわみ w が大きくなる有限変位問題では、解析精度の向上と計算の効率化に有効である。

(3) x 軸方向の展開関数

x 軸方向の展開関数として、一般に用いられている次式の三角関数を採用する。

$$U_m = \cos \alpha_m x, V_m = \sin \alpha_m x, W_m = \sin \alpha_m x \dots (3 \cdot a \sim c)$$

ここに、

$$\alpha_m = m\pi/l \quad (m=1, 2, \dots) \dots (4)$$

式 (3) の展開関数を用いた場合には帯板要素の両端 ($x=0, l$) で常に $v=w=0$ になり、I 型断面や箱型断面の薄肉構造では一般的に過剰の拘束を加えることになる。また、帯板の両端に x 軸方向の荷重が作用する場合には、荷重を受ける辺上の応力 σ_x の線形値が零になる解析上の矛盾が生じる。そこで、式 (3) の関数に次式の第 0 項をそれぞれ付け加えることにする。

$$U_0 = 1 - 2x/l, V_0 = 1, W_0 = 1 \dots (5 \cdot a \sim c)$$

この第 0 項は、文献 8) で用いられているものであり、 U_0 は x 軸方向の一定ひずみを、 V_0 と W_0 は剛体変位を表わす。式 (5) の関数を加えることにより、薄肉構造物の端部において点支持の境界条件を与えることができる利点もある。

また、 x 軸方向に面内荷重を受ける場合について、式 (3・a) の U_m の代りに次の関数についても検討する。

$$U_m = \sin 2 \alpha_m x \quad (m=1, 2, \dots) \dots (6)$$

(4) y 軸方向の形状関数

6 成分の節線変位を用いて式 (2) のような変位関数を仮定すれば、 y 軸方向の形状関数として、面内および面外変位についてそれぞれ 3 次の多項式を用いることができる。このような帯板要素に対して、式 (1・a) と (1・b) の ϕ と ψ を省略した最も標準的な帯板要素では、面内変位に対して 1 次、面外変位に対しては 3 次の多項式を用いることになる。6 成分を採用した帯板要素を (6-6) 要素、4 成分を用いた要素を (4-4) 要素とよぶことにする。なお、これらの帯板要素のほかに、板厚が急変する節線や隅角部等に用いることができる (4-6) 要素や (6-4) 要素を開発したが、本文では説明を省略する^{6), 7)}。

以上により、式 (2) の面外変位の形状関数 $f_5 \sim f_8$ はエルミートの内挿公式により式 (7) で、面内変位の形状関数 $f_1 \sim f_4$ は (6-6) 要素に対して式 (7)、(4-4) 要素に対して式 (8) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_1 = f_5 = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad f_2 = f_6 = b\eta(1 - \eta)^2 \\ f_3 = f_7 = 3\eta^2 - 2\eta^3, \quad f_4 = f_8 = b\eta^2(\eta - 1) \end{aligned} \right\} \dots (7 \cdot a \sim d)$$

$$f_1=1-\eta, f_2=0, f_3=\eta, f_4=0 \dots\dots(8 \cdot a \sim d)$$

ここに,

$$\eta=y/b \dots\dots\dots(9)$$

3. 有限帯板法の定式化

(1) ひずみの表示式

級数展開された節点変位の第 m 項の一般化変位を, 次式のようにベクトル \mathbf{d}_m で表わす.

$$\mathbf{d}_m = \{u_{im}, \phi_{im}, v_{im}, \psi_{im}, u_{jm}, \phi_{jm}, v_{jm}, \psi_{jm}, \omega_{im}, \theta_{im}, \omega_{jm}, \theta_{jm}\}^T$$

$$(m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(10)$$

ここに, 右肩の添字 T は転置記号である.

初期変位も同様に級数展開してベクトル表示すれば,

$$\mathbf{d}_m^0 = \{u_{im}^0, \phi_{im}^0, v_{im}^0, \psi_{im}^0, u_{jm}^0, \phi_{jm}^0, v_{jm}^0, \psi_{jm}^0, \omega_{im}^0, \theta_{im}^0, \omega_{jm}^0, \theta_{jm}^0\}^T$$

$$(m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(11)$$

また, 式 (7), (8) に示した y 軸方向の形状関数を用いて次のような 12 次の列ベクトル関数 \mathbf{f}_k を定める.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \mathbf{f}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{bmatrix}$$

$$\dots\dots\dots(12)$$

式 (2) に, 式 (10), (12) を用いれば次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} u &= \mathbf{f}_1^T \sum_m U_m \mathbf{d}_m, v = \mathbf{f}_2^T \sum_m V_m \mathbf{d}_m \\ w &= \mathbf{f}_3^T \sum_m W_m \mathbf{d}_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13 \cdot a \sim c)$$

同様に, 初期変位 u^0, v^0, w^0 は式 (11), (12) を用いて,

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \mathbf{f}_1^T \sum_m U_m \mathbf{d}_m^0, v^0 = \mathbf{f}_2^T \sum_m V_m \mathbf{d}_m^0 \\ w^0 &= \mathbf{f}_3^T \sum_m W_m \mathbf{d}_m^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14 \cdot a \sim c)$$

ここに, 級数項に関する総和は, $m=0, 1, 2, \dots$ とする.

帯板要素内の任意点 (x, y, z) のひずみは, 中央面上の変位と初期変位を用いて次式で表わされる.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial(v+2v^0)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega+2\omega^0)}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \dots\dots\dots(15 \cdot a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial(v+2v^0)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega+2\omega^0)}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \dots\dots\dots(15 \cdot b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial(v+2v^0)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega+2\omega^0)}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial(v+2v^0)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega+2\omega^0)}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega+2\omega^0)}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \dots\dots\dots(15 \cdot c)$$

式 (15) に式 (13), (14) を代入すると注 1)

$$\epsilon_x = \sum_m \left\{ U_m' \mathbf{f}_1^T - z W_m'' \mathbf{f}_3^T + \frac{1}{2} V_m' (\mathbf{f}_2^T \sum_k V_k' \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{f}_2^T + \frac{1}{2} W_m' (\mathbf{f}_3^T \sum_k W_k' \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{f}_3^T \right\} \mathbf{d}_m \dots\dots\dots(16 \cdot a)$$

$$\epsilon_y = \sum_m \left\{ V_m \mathbf{g}_2^T - z W_m \mathbf{h}_3^T + \frac{1}{2} V_m (\mathbf{g}_2^T \sum_k V_k \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{g}_2^T + \frac{1}{2} W_m (\mathbf{g}_3^T \sum_k W_k \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{g}_3^T \right\} \mathbf{d}_m \dots\dots\dots(16 \cdot b)$$

$$\tau_{xy} = \sum_m \left\{ U_m \mathbf{g}_1^T + V_m' \mathbf{f}_2^T - 2z W_m' \mathbf{g}_3^T + \frac{1}{2} V_m (\mathbf{f}_2^T \sum_k V_k' \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{g}_2^T + \frac{1}{2} V_m' (\mathbf{g}_2^T \sum_k V_k \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{f}_2^T + \frac{1}{2} W_m (\mathbf{f}_3^T \sum_k W_k' \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{g}_3^T + \frac{1}{2} W_m' (\mathbf{g}_3^T \sum_k W_k \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}) \mathbf{f}_3^T \right\} \mathbf{d}_m \dots\dots\dots(16 \cdot c)$$

ここに, プライムは x に関する微分を表わし, $\mathbf{g}_i, \mathbf{h}_3$ は次式で与えられる 12 次の列ベクトルである.

$$\mathbf{g}_i = \frac{d\mathbf{f}_i}{dy} \quad (i=1, 2, 3), \quad \mathbf{h}_3 = \frac{d^2\mathbf{f}_3}{dy^2} \dots\dots(17 \cdot a, b)$$

ひずみの 3 成分をベクトル $\boldsymbol{\epsilon}$ で表わして,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}\}^T = \{e_1, e_2, e_3\}^T \dots\dots\dots(18)$$

とおけば, 式 (16) のひずみを次式のように表わすことができる.

$$\epsilon_i = \sum_m \left\{ \mathbf{a}_{im}^T + \frac{1}{2} \sum_k \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\}^T [\mathbf{B}_{imk} + \mathbf{C}_{imk}] \right\} \cdot \mathbf{d}_m \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(19)$$

ここに, ベクトル \mathbf{a}_{im} と行列 $\mathbf{B}_{imk}, \mathbf{C}_{imk}$ は次式のよ
うな座標値のみの関数である.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{1m} &= U_m' \mathbf{f}_1 - z W_m'' \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{a}_{2m} &= V_m \mathbf{g}_2 - z W_m \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{a}_{3m} &= U_m \mathbf{g}_1 + V_m' \mathbf{f}_2 - 2z W_m' \mathbf{g}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot a \sim c)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{1mk} &= V_m' V_k' [\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_2^T] \\ \mathbf{B}_{2mk} &= V_m V_k [\mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T] \\ \mathbf{B}_{3mk} &= V_m V_k' [\mathbf{f}_2 \mathbf{g}_2^T] + V_m' V_k [\mathbf{g}_2 \mathbf{f}_2^T] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21 \cdot a \sim c)$$

注 1) 本節では原則として, スカラー, ベクトル, 行列に対して, 記号 $(), \{ \}, []$ を用いて表わす.

$$\left. \begin{aligned} C_{1mk} &= W_m' W_k' [f_3 f_3^T] \\ C_{2mk} &= W_m W_k [g_3 g_3^T] \\ C_{3mk} &= W_m W_k' [f_3 g_3^T] + W_m' W_k [g_3 f_3^T] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22 \cdot a \sim c)$$

(2) 平衡方程式

帯板要素内の応力 σ を

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \dots\dots\dots (23)$$

とおけば、応力-ひずみ関係式は式 (18) のひずみを用いて次式で表わされる。

$$\sigma = D \epsilon \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 D は弾性マトリックスであり、等方性材料の場合にはヤング係数 E とポアソン比 ν を用いて次のようになる。

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \equiv [D_{ij}] \dots\dots\dots (25)$$

($i, j=1, 2, 3$)

仮想仕事の原理により、帯板要素の平衡方程式を誘導する。式 (18) と (23) のひずみと応力を用いれば、仮想ひずみエネルギー δU は、

$$\delta U = \int_V \sigma^T \delta \epsilon dV = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_V D_{ij} \epsilon_j \delta \epsilon_i dV \dots\dots\dots (26)$$

と表わせる。ここに、 $\delta \epsilon_i$ は仮想変位 δd_m による仮想ひずみで、式 (19) より次のようになる。

$$\delta \epsilon_i = \sum_m \{ a_{im}^T + \sum_k \{ d_k + d_k^0 \}^T [B_{imk} + C_{imk}] \} \cdot \delta d_m \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (27)$$

式 (26) に式 (19) と (27) を代入すると、

$$\delta U = \sum_m \sum_n \{ \delta d_m \}^T [K_{mn}] d_n \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここに、 K_{mn} は帯板要素の非線形剛性行列であり、次式で与えられる。

$$K_{mn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \int_V \left\{ a_{im} + \sum_k [B_{ikm} + C_{ikm}] \cdot \{ d_k + d_k^0 \} \right\} \left\{ a_{jn}^T + \frac{1}{2} \sum_k \{ d_k + 2 d_k^0 \}^T \cdot [B_{jnk} + C_{jnk}] \right\} dV \dots\dots\dots (29)$$

一方、一般化変位 d_m に対応する一般化力、すなわち級数展開された節線力を q_m とすると、 δd_m による仮想仕事 δW は次のようになる。

$$\delta W = \sum_m \{ \delta d_m \}^T q_m \dots\dots\dots (30)$$

したがって、仮想仕事の原理に式 (28)、(30) を用いれば、各級数項に関する次の平衡方程式が得られる。

$$\sum_n [K_{mn}] d_n = q_m \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (31)$$

次に、一般化変位 d_m に関する連立非線形方程式 (31) を解くために、増分理論により線形化された平衡方程式

を求める。

いま、ある既知の平衡状態からの微小な増分を考える。添記号 Δ を付して増分量を表わすものとすれば、ひずみ増分 $\Delta \epsilon_i$ は式 (19) より変位増分 Δd_m の 3 乗以上の微小項を省略して次式のようになる。

$$\Delta \epsilon_i = \sum_m \left\{ a_{im}^T + \sum_k \left\{ d_k + d_k^0 + \frac{1}{2} \Delta d_k \right\}^T \cdot [B_{imk} + C_{imk}] \right\} \Delta d_m \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots (32)$$

したがって、増分理論による仮想仕事の原理

$$\delta(\Delta U) - \delta(\Delta W) = \int_V \delta \{ \Delta \epsilon \}^T \{ \sigma + \Delta \sigma \}^T dV - \sum_m \delta \{ \Delta d_m \}^T \{ q_m + \Delta q_m \} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

に、式 (19)、(24)、(32) を代入して Δd_m の 2 乗以上の項を省略すれば、線形化された次の平衡方程式が得られる。

$$\sum_n [\Delta K_{mn}] \Delta d_n = \Delta q_m - r_m \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (34)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Delta K_{mn} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \int_V \left\{ a_{im} + \sum_k [B_{ikm} + C_{ikm}] \cdot \{ d_k + d_k^0 \} \right\} \left\{ a_{jn}^T + \sum_k \{ d_k + d_k^0 \}^T \cdot [B_{jnk} + C_{jnk}] \right\} dV \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \int_V \sum_l \left(a_{jl}^T d_l + \frac{1}{2} \sum_k \{ d_k + 2 d_k^0 \}^T \cdot [B_{jlk} + C_{jlk}] d_l \right) [B_{inm} + C_{inm}] dV \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

$$r_m = \sum_n [K_{mn}] d_n - q_m \dots\dots\dots (36)$$

であって、 ΔK_{mn} は接線剛性行列、 r_m は前増分段階で生じた不平衡力、 K_{mn} は式 (29) で与えられる剛性行列である。

(3) 剛性行列

式 (29) の非線形剛性行列と式 (35) の接線剛性行列を陽な形で求める。

まず、 K_{mn} を線形の剛性行列 $K_{mn}^{(0)}$ と、一般化変位に関する 1 次と 2 次の非線形項 $K_{mn}^{(1)}$ 、 $K_{mn}^{(2)}$ に分けて表わす。

$$K_{mn} = K_{mn}^{(0)} + K_{mn}^{(1)} + K_{mn}^{(2)} \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (37)$$

上式の各行列はいずれも 12 次の正方行列であって、式 (29) より次のようになる。

$$K_{mn}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \int_V [a_{im} a_{jn}^T] dV \dots\dots\dots (38)$$

$$K_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \sum_k \int_V [a_{im} \{ d_k + 2 d_k^0 \}^T \cdot [B_{jnk} + C_{jnk}] + [B_{ikm} + C_{ikm}] \cdot \{ d_k + 2 d_k^0 \} a_{jn}^T + (a_{jk}^T d_k)] dV$$

$$\begin{aligned} & \cdot [\mathbf{B}_{inm} + \mathbf{C}_{inm}] \Big] dV \dots\dots\dots (39) \\ \mathbf{K}_{mn}^{(2)} = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \sum_k \sum_l \int_V \left[[\mathbf{B}_{ikm} + \mathbf{C}_{ikm}] \right. \\ & \cdot \{\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0\} \{\mathbf{d}_l + 2 \mathbf{d}_l^0\}^T \cdot [\mathbf{B}_{jnl} + \mathbf{C}_{jnl}] \\ & + \{\mathbf{d}_k^T [\mathbf{B}_{jlk} + \mathbf{C}_{jlk}] \cdot \{\mathbf{d}_l + 2 \mathbf{d}_l^0\} \\ & \left. \cdot [\mathbf{B}_{inm} + \mathbf{C}_{inm}] \right] dV \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

式 (39) と (40) の定式化では、 m と n について \mathbf{K}_{mn} を総和した帯板要素の剛性行列 \mathbf{K} が対称行列になるように変形注2) したので、式 (37) の剛性行列には次の性質がある注3)。

$$[\mathbf{K}_{mn}]^T = \mathbf{K}_{nm} \dots\dots\dots (41)$$

接線剛性行列 $\Delta \mathbf{K}_{mn}$ も \mathbf{d}_m の回数によって分けて表わすと

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K}_{mn} = & \mathbf{K}_{mn}^{(0)} + \Delta \mathbf{K}_{mn}^{(1)} + \Delta \mathbf{K}_{mn}^{(2)} \\ & (m, n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{K}_{mn}^{(0)}$ は式 (38) と同じものであり、非線形項は、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K}_{mn}^{(1)} = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \sum_k \int_V \left[\mathbf{a}_{im} \{\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^0\}^T \right. \\ & \cdot [\mathbf{B}_{jnk} + \mathbf{C}_{jnk}] + [\mathbf{B}_{ikm} + \mathbf{C}_{ikm}] \\ & \cdot \{\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^0\} \mathbf{a}_{jn}^T + (\mathbf{a}_{jk}^T \mathbf{d}_k) \\ & \left. \cdot [\mathbf{B}_{inm} + \mathbf{C}_{inm}] \right] dV \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K}_{mn}^{(2)} = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \sum_k \sum_l \int_V \left[[\mathbf{B}_{ikm} + \mathbf{C}_{ikm}] \right. \\ & \cdot \{\mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^0\} \{\mathbf{d}_l + \mathbf{d}_l^0\}^T [\mathbf{B}_{jnl} + \mathbf{C}_{jnl}] \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_k^T [\mathbf{B}_{jlk} + \mathbf{C}_{jlk}] \{\mathbf{d}_l + 2 \mathbf{d}_l^0\}) \\ & \left. \cdot [\mathbf{B}_{inm} + \mathbf{C}_{inm}] \right] dV \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

である注4)。式 (43)、(44) をそれぞれ式 (39)、(40) と比較すると、式全体の係数と下線の部分のみが異なる。また、 \mathbf{K}_{mn} と $\Delta \mathbf{K}_{mn}$ の間には、次式の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_r^T} \left\{ \sum_n [\mathbf{K}_{mn}] \mathbf{d}_n \right\} = \Delta \mathbf{K}_{mr} \quad (r=n, k, l) \dots\dots\dots (45 \cdot a, b)$$

なお、式 (42) の $\Delta \mathbf{K}_{mn}$ についても式 (41) の性質がある。

さて、以上の各剛性行列を式 (3) と (5) の展開関数と、式 (7) または (8) の形状関数を用いて表わす。

式 (38) に式 (20)、(25) を代入して整理すると、線

$$\begin{aligned} \text{注 2) } \sum_n \sum_k [A_{ikm}] [\mathbf{d}_k \mathbf{a}_{jn}^T] \mathbf{d}_n = & \sum_n \sum_k (\mathbf{a}_{jk}^T \mathbf{d}_k) [A_{inm}] \mathbf{d}_n \\ \sum_n \sum_l \sum_k [A_{ikm}] [\mathbf{d}_k \mathbf{d}_l^T] [A_{jnl}] \mathbf{d}_n = & \\ = \sum_n \sum_k \sum_l (\mathbf{d}_k^T \mathbf{A}_{jlk} \mathbf{d}_l) [A_{inm}] \mathbf{d}_n & \end{aligned}$$

の関係を用いた。ここに、 $\mathbf{A}_{ikm} = \mathbf{B}_{ikm} + \mathbf{C}_{ikm}$ である。

3) 式 (21)、(22) より、

$$[\mathbf{B}_{amn}]^T = \mathbf{B}_{anm}, \quad [\mathbf{C}_{amn}]^T = \mathbf{C}_{anm}$$

4) 式 (43)、(44) の定式化は一意的である。

形の剛性行列は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mn}^{(0)} = & \frac{Et}{1-\nu^2} [k_1^{(0)} + k_2^{(0)} + k_3^{(0)} + k_4^{(0)}] \\ & + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} [k_5^{(0)}] \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

ここに、

$$\mu = (1-\nu)/2 \dots\dots\dots (47)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} k_1^{(0)} = & \int_0^l \int_0^b \{U_m' U_n' [\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_1^T] \\ & + \mu U_m U_n [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^T]\} dx dy \dots\dots\dots (48 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2^{(0)} = & \int_0^l \int_0^b \{V_m V_n [\mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T] \\ & + \mu V_m' V_n' [\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_2^T]\} dx dy \dots\dots\dots (48 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3^{(0)} = & \int_0^l \int_0^b [\nu U_m' V_n [\mathbf{f}_1 \mathbf{g}_2^T] \\ & + \mu U_m V_n' [\mathbf{g}_1 \mathbf{f}_2^T]] dx dy \dots\dots\dots (48 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4^{(0)} = & \int_0^l \int_0^b [\nu U_n' V_m [\mathbf{g}_2 \mathbf{f}_1^T] \\ & + \mu U_n V_m' [\mathbf{f}_2 \mathbf{g}_1^T]] dx dy \dots\dots\dots (48 \cdot d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_5^{(0)} = & \int_0^l \int_0^b \{W_m'' W_n'' [\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_3^T] + W_m W_n [\mathbf{h}_3 \mathbf{h}_3^T] \\ & + \nu W_m'' W_n [\mathbf{f}_3 \mathbf{h}_3^T] + \nu W_m W_n'' [\mathbf{h}_3 \mathbf{f}_3^T] \\ & + 4 \mu W_m' W_n' [\mathbf{g}_3 \mathbf{g}_3^T]\} dx dy \dots\dots\dots (48 \cdot e) \end{aligned}$$

なお、式 (46) において右辺の 12 次の正方行列 $k_l^{(0)}$ の添字 l は、 $l=1\sim 4$ が面内剛性を、 $l=5$ が、面外剛性を表わす。

図-2 (a) に 1 枚の帯板要素の剛性行列の線形項を示す。式 (3) の展開関数の直交性により、図中の斜線の領域以外は零である。この斜線領域の 1 つについて、式 (48) の各行列の非零要素のみを図示すると図-2 (b) のようになる。図中の行と列番号は、式 (10) の \mathbf{d}_m の成分に対応して 1~8 が面内成分、9~12 が面外成分である。なお、0 は零行列である。

式 (39) と (40) の非線形剛性行列についても、線形の剛性行列と同じような形で表わすと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mn}^{(1)} = & \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu^2} [k_2^{(1)} + k_3^{(1)} + k_4^{(1)} + k_5^{(1)}] \\ & + [k_6^{(1)} + k_7^{(1)} + k_8^{(1)} + k_9^{(1)}] \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

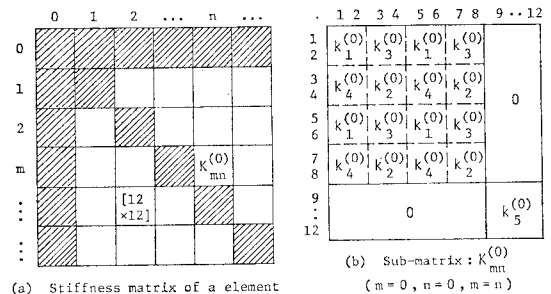


図-2 線形の剛性行列

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | .. | 12 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---|---|---|---|----|----|
| 1 | 0 | $k_3^{(1)}$ | 0 | $k_3^{(1)}$ | $k_6^{(1)}$ | | | | | | |
| 3 | $k_4^{(1)}$ | $k_2^{(1)}$ | $k_4^{(1)}$ | $k_2^{(1)}$ | $k_7^{(1)}$ | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0 | $k_3^{(1)}$ | 0 | $k_3^{(1)}$ | $k_6^{(1)}$ | | | | | | |
| 7 | $k_4^{(1)}$ | $k_2^{(1)}$ | $k_4^{(1)}$ | $k_2^{(1)}$ | $k_7^{(1)}$ | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | |
| 9 | $k_8^{(1)}$ | $k_9^{(1)}$ | $k_8^{(1)}$ | $k_9^{(1)}$ | $k_5^{(1)}$ | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | |

(a) Sub-matrix : $K_{mn}^{(1)}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | .. | 12 |
|----|---|-------------|---|-------------|-------------|---|---|---|---|----|----|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| 3 | 0 | $k_2^{(2)}$ | 0 | $k_2^{(2)}$ | $k_7^{(2)}$ | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| 7 | 0 | $k_2^{(2)}$ | 0 | $k_2^{(2)}$ | $k_7^{(2)}$ | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | |
| 9 | 0 | $k_9^{(2)}$ | 0 | $k_9^{(2)}$ | $k_5^{(2)}$ | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | |

(b) Sub-matrix : $K_{mn}^{(2)}$

図-3 剛性行列の非線形項

$$K_{mn}^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{Et}{1-\nu^2} [k_2^{(2)} + k_5^{(2)} + k_7^{(2)} + k_9^{(2)}] \dots \dots \dots (50)$$

ここで、式(49)の右辺の行列 $k_2^{(1)} \sim k_4^{(1)}$ は式(15)のひずみの面内変位 v に関する非線形成分から導かれたものであり、 $k_5^{(1)} \sim k_9^{(1)}$ は面外変位 w の非線形成分

から導かれる。また式(50)では、 v または w の非線形成分のみによる項はそれぞれ $k_2^{(2)}$ または $k_5^{(2)}$ に含まれ、 v と w の連成した項は式(50)の右辺のすべての行列に現われる(式(55)を参照)。これらの行列の非零要素は、図-3(a) または (b) のようになる。

式(49)、(50)を陽な形で導くことにする。そこで、まず式(10)と(11)の d_k と d_k^0 を用いて、

$$\bar{d}_k = \hat{d}_k = d_k + 2d_k^0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \dots \dots (51)$$

とおき、次式のスカラー量を定義する。

$$f_{ik} = f_i^T d_k, \quad \bar{f}_{ik} = f_i^T \bar{d}_k, \quad \hat{f}_{ik} = f_i^T \hat{d}_k \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (52 \cdot a \sim c)$$

$$g_{ik} = g_i^T d_k, \quad \bar{g}_{ik} = g_i^T \bar{d}_k, \quad \hat{g}_{ik} = g_i^T \hat{d}_k \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (53 \cdot a \sim c)$$

式(52)、(53)を用いると、式(49)の行列は次のようになる。

$$k_2^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [(U_k' V_m' V_n' f_{1k} + (\nu g_{2k} + 2\mu \bar{g}_{2k}) V_m' V_n' V_k) [f_2 f_2^T] + (\nu U_k V_m V_n f_{1k} + (g_{2k} + 2\bar{g}_{2k}) V_m V_n V_k) [g_2 g_2^T] + (\mu U_k V_m' V_n g_{1k} + (\nu \bar{f}_{2k} + \mu \bar{f}_{2k} + \mu f_{2k}) V_m' V_n V_k') [f_2 g_2^T] + (\mu U_k V_m V_n' g_{1k} + (\nu \bar{f}_{2k} + \mu \bar{f}_{2k} + \mu f_{2k}) V_m V_n' V_k') [g_2 f_2^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot a)$$

$$k_3^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [U_m' V_n' V_k' \bar{f}_{2k} [f_1 f_2^T] + \nu U_m' V_n V_k \bar{g}_{2k} [f_1 g_2^T] + \mu U_m V_n' V_k \bar{g}_{2k} [g_1 f_2^T] + \mu U_m V_n V_k' \bar{f}_{2k} [g_1 g_2^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot b)$$

$$k_4^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [U_n' V_m' V_k' \bar{f}_{2k} [f_2 f_1^T] + \nu U_n' V_m V_k \bar{g}_{2k} [g_2 f_1^T] + \mu U_n V_m' V_k \bar{g}_{2k} [f_2 g_1^T] + \mu U_n V_m V_k' \bar{f}_{2k} [g_2 g_1^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot c)$$

$$k_5^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [(U_k' W_m' W_n' f_{1k} + \nu V_k W_m' W_n' g_{2k}) [f_3 f_3^T] + (V_k W_m W_n g_{2k} + \nu U_k' W_m W_n f_{1k}) [g_3 g_3^T] + \mu (U_k W_m W_n' g_{1k} + V_k' W_m W_n' f_{2k}) [g_3 f_3^T] + \mu (U_k W_m' W_n g_{1k} + V_k' W_m' W_n f_{2k}) [f_3 g_3^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot d)$$

$$k_6^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [U_m' W_n' W_k' \bar{f}_{3k} [f_1 f_3^T] + \nu U_m' W_n W_k \bar{g}_{3k} [f_1 g_3^T] + \mu U_m W_n' W_k \bar{g}_{3k} [g_1 f_3^T] + \mu U_m W_n W_k' \bar{f}_{3k} [g_1 g_3^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot e)$$

$$k_7^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [V_m W_n W_k \bar{g}_{3k} [g_2 g_3^T] + \nu V_m W_n' W_k' \bar{f}_{3k} [g_2 f_3^T] + \mu V_m' W_n W_k' \bar{f}_{3k} [f_2 g_3^T] + \mu V_m' W_n' W_k \bar{g}_{3k} [f_2 f_3^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot f)$$

$$k_8^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [U_n' W_m' W_k' \bar{f}_{3k} [f_3 f_1^T] + \nu U_n' W_m W_k \bar{g}_{3k} [g_3 f_1^T] + \mu U_n W_m' W_k \bar{g}_{3k} [f_3 g_1^T] + \mu U_n W_m W_k' \bar{f}_{3k} [g_3 g_1^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot g)$$

$$k_9^{(1)} = \sum_k \int_0^l \int_0^b [V_n W_m W_k \bar{g}_{3k} [g_3 g_2^T] + \nu V_n W_m' W_k' \bar{f}_{3k} [f_3 g_2^T] + \mu V_n' W_m W_k' \bar{f}_{3k} [g_3 f_2^T] + \mu V_n' W_m' W_k \bar{g}_{3k} [f_3 f_2^T]] dx dy \dots \dots \dots (54 \cdot h)$$

式(50)の行列は次のようになる。

$$k_2^{(2)} = \sum_k \sum_l \int_0^l \int_0^b [V_m' V_n' \{V_k' V_l' (\bar{f}_{2k} \bar{f}_{2l} + f_{2k} \hat{f}_{2l}) + V_k V_l (\mu \bar{g}_{2k} \bar{g}_{2l} + \nu g_{2k} \hat{g}_{2l}) + W_k' W_l' f_{3k} \hat{f}_{3l} + \nu W_k W_l' g_{3k} \hat{g}_{3l}\} [f_2 f_2^T] + V_m V_n \{V_k V_l (\bar{g}_{2k} \bar{g}_{2l} + g_{2k} \hat{g}_{2l}) + V_k' V_l' (\mu \bar{f}_{2k} \bar{f}_{2l} + \nu f_{2k} \hat{f}_{2l}) + W_k W_l' g_{3k} \hat{g}_{3l} + \nu W_k' W_l' f_{3k} \hat{f}_{3l}\} [g_2 g_2^T] + V_m' V_n \{V_k' V_l (\nu \bar{f}_{2k} \bar{g}_{2l} + \mu f_{2k} \hat{g}_{2l}) + \mu V_k V_l' (\bar{g}_{2k} \bar{f}_{2l} + g_{2k} \hat{f}_{2l}) + \mu (W_k W_l' g_{3k} \hat{f}_{3l} + W_k' W_l f_{3k} \hat{g}_{3l})\} [f_2 g_2^T] + V_m V_n' \{V_k V_l' (\nu \bar{g}_{2k} \bar{f}_{2l} + \mu g_{2k} \hat{f}_{2l}) + \mu V_k' V_l (\bar{f}_{2k} \bar{g}_{2l} + f_{2k} \hat{g}_{2l}) + \mu (W_k W_l' g_{3k} \hat{f}_{3l} + W_k' W_l f_{3k} \hat{g}_{3l})\} [g_2 f_2^T]] dx dy \dots \dots \dots (55 \cdot a)$$

$$k_5^{(2)} = \sum_k \sum_l \int_0^l \int_0^b [W_m' W_n' \{W_k' W_l' (\bar{f}_{3k} \bar{f}_{3l} + f_{3k} \hat{f}_{3l}) + W_k W_l (\mu \bar{g}_{3k} \bar{g}_{3l} + \nu g_{3k} \hat{g}_{3l}) + V_k' V_l' f_{2k} \hat{f}_{2l}$$

$$\begin{aligned}
 & + \nu V_k V_l g_{2k} \hat{g}_{2l} [\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_3^T] + W_m W_n \{ W_k W_l (\hat{g}_{3k} \hat{g}_{3l} + g_{3k} \hat{g}_{3l}) + W_k' W_l' (\mu \bar{f}_{3k} \bar{f}_{3l} + \nu f_{3k} \hat{f}_{3l}) \\
 & + V_k V_l g_{2k} \hat{g}_{2l} + \nu V_k' V_l' f_{2k} \hat{f}_{2l} \} [\mathbf{g}_3 \mathbf{g}_3^T] + W_m' W_n \{ W_k' W_l' (\nu \bar{f}_{3k} \bar{g}_{3l} + \mu f_{3k} \hat{g}_{3l}) \\
 & + \mu W_k W_l' (\hat{g}_{3k} \bar{f}_{3l} + g_{3k} \hat{f}_{3l}) + \mu (V_k V_l' g_{2k} \hat{f}_{2l} + V_k' V_l f_{2k} \hat{g}_{2l}) \} [\mathbf{f}_3 \mathbf{g}_3^T] + W_m W_n' \{ W_k W_l' (\nu \bar{g}_{3k} f_{3l} \\
 & + \mu g_{3k} \hat{f}_{3l}) + \mu W_k' W_l' (\bar{f}_{3k} \bar{g}_{3l} + f_{3k} \hat{g}_{3l}) + \mu (V_k V_l' g_{2k} \hat{f}_{2l} + V_k' V_l f_{2k} \hat{g}_{2l}) \} [\mathbf{g}_3 \mathbf{f}_3^T] dx dy \dots (55 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_7^{(2)} = & \sum_k \int_0^l \int_0^b [V_m' W_n' (V_k' W_l' \bar{f}_{2k} \bar{f}_{3l} + \mu V_k W_l \bar{g}_{3k} \bar{g}_{3l}) [\mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3^T] + V_m W_n (V_k W_l \bar{g}_{2k} \bar{g}_{3l} \\
 & + \mu V_k' W_l' \bar{f}_{2k} \bar{f}_{3l}) [\mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3^T] + V_m' W_n (\nu V_k' W_l \bar{f}_{2k} \bar{g}_{3l} + \mu V_k W_l' \bar{g}_{2k} \bar{f}_{3l}) [\mathbf{f}_2 \mathbf{g}_3^T] \\
 & + V_m W_n' (\nu V_k W_l' \bar{g}_{2k} \bar{f}_{3l} + \mu V_k' W_l \bar{f}_{2k} \bar{g}_{3l}) [\mathbf{g}_2 \mathbf{f}_3^T]] dx dy \dots (55 \cdot c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_9^{(2)} = & \sum_k \int_0^l \int_0^b [V_n' W_m' (V_l' W_k' \bar{f}_{3k} \bar{f}_{2l} + \mu V_l W_k \bar{g}_{3k} \bar{g}_{2l}) [\mathbf{f}_3 \mathbf{f}_2^T] + V_n W_m (V_l W_k \bar{g}_{3k} \bar{g}_{2l} \\
 & + \mu V_l' W_k' \bar{f}_{3k} \bar{f}_{2l}) [\mathbf{g}_3 \mathbf{g}_2^T] + V_n W_m' (\nu V_l W_k' \bar{f}_{3k} \bar{g}_{2l} + \mu V_l' W_k \bar{g}_{3k} \bar{f}_{2l}) [\mathbf{f}_3 \mathbf{g}_2^T] \\
 & + V_n' W_m (\nu V_l' W_k \bar{g}_{3k} \bar{f}_{2l} + \mu V_l W_k' \bar{f}_{3k} \bar{g}_{2l}) [\mathbf{g}_3 \mathbf{f}_2^T]] dx dy \dots (55 \cdot d)
 \end{aligned}$$

式 (48), (54), (55) の行列 $\mathbf{k}_l^{(r)}$ は、次式のようにえられる。
 x と y の積分を分離して表わすことができる。

$$\mathbf{k}_l^{(r)} = \left(\int_0^l H(x) dx \right) \left[\int_0^b \mathbf{F}(y) dy \right] \quad (r=0, 1, 2; l=1 \sim 9) \dots (56)$$

ここに、スカラー $H(x)$ と行列 $\mathbf{F}(y)$ は、それぞれ展開関数と形状関数の 2, 3 または 4 重積であるので、各剛性行列を解析的に求めることができる。各行列の要素を示すことは紙数の制約から困難であるので、本文では省略する。

次に、式 (43), (44) の接線剛性行列は、式 (51) を

$$\bar{\mathbf{d}}_k = \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^0, \hat{\mathbf{d}}_k = (\mathbf{d}_k + 2 \mathbf{d}_k^0) / 2 \dots (57 \cdot a, b)$$

と置き換えた $\bar{\mathbf{d}}_k$ と $\hat{\mathbf{d}}_k$ を式 (54) と (55) に用いて、式 (49) と (50) の行列全体の係数を 1 としたものである。

(4) 荷重ベクトル

一般化変位 \mathbf{d}_m に対応して級数展開された等価節線外力 (荷重ベクトル) \mathbf{p}_m を求める。

帯板要素の中央面上に作用する分布荷重を $\bar{\mathbf{p}}$ とし、面積 A 上に分布しているものとする。ここで、中央面上の仮想変位を $\delta \mathbf{u}$ とすれば次式が成り立つ。

$$\sum_m \{ \delta \mathbf{d}_m \}^T \mathbf{p}_m = \int_A \{ \delta \mathbf{u} \}^T \bar{\mathbf{p}} dA \dots (58)$$

荷重 $\bar{\mathbf{p}}$ の成分として座標軸方向の成分のみを考えることにする。そこで、

$$\bar{\mathbf{p}} = \{ \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z \}^T \dots (59)$$

とおけば、 \mathbf{u} は式 (2) の変位成分のみを用いればよい。したがって、

$$\mathbf{u} = \{ u, v, w \}^T \dots (60)$$

とおき、式 (59), (60) を式 (58) に代入して式 (13) を用いれば、

$$\begin{aligned}
 \sum_m \{ \delta \mathbf{d}_m \}^T \mathbf{p}_m = & \sum_m \{ \delta \mathbf{d}_m \}^T \int_A \{ \bar{p}_x U_m \mathbf{f}_1 + \bar{p}_y V_m \mathbf{f}_2 \\
 & + \bar{p}_z W_m \mathbf{f}_3 \} dA
 \end{aligned}$$

となるから、面荷重 $\bar{\mathbf{p}}$ に対する等価節線力は次式で与

$$\mathbf{p}_m = \int_A \{ \bar{p}_x U_m \mathbf{f}_1 + \bar{p}_y V_m \mathbf{f}_2 + \bar{p}_z W_m \mathbf{f}_3 \} dA \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots (61)$$

同様に、線分 S 上に分布する線荷重 \mathbf{p} についても、 \mathbf{p} の成分を

$$\mathbf{p} = \{ p_x, p_y, p_z \}^T \dots (62)$$

とおけば、 \mathbf{p} に対する等価節線力は次式のようにになる。

$$\mathbf{p}_m = \int_S \{ p_x U_m \mathbf{f}_1 + p_y V_m \mathbf{f}_2 + p_z W_m \mathbf{f}_3 \} dS \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots (63)$$

4. 境界条件と変位制御

有限帯板法では、節線変位を級数展開した一般化変位を未知パラメーターとしているので、変位増分法や強制変位のように変位を与えて計算を制御する解法には、有限要素法で用いられている手法をそのまま適用することはできない。そこで、以下のような解法を考えた。

(1) 一般化変位と節点変位の置換

第 i 節線における節線変位の一成分 D_i に着目して、有限帯板法による系全体の平衡方程式を次のように書く。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots k_{p,q} & \dots k_{p,i0} & k_{p,i1} & \dots k_{p,im} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots k_{i0,q} & \dots k_{i0,i0} & k_{i0,i1} & \dots k_{i0,im} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots k_{i1,q} & \dots k_{i1,i0} & k_{i1,i1} & \dots k_{i1,im} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots k_{im,q} & \dots k_{im,i0} & k_{im,i1} & \dots k_{im,im} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ d_q \\ \vdots \\ d_{i0} \\ \vdots \\ d_{i1} \\ \vdots \\ d_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ p_p \\ \vdots \\ p_{i0} \\ \vdots \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{im} \end{bmatrix} \dots (64)$$

ここに、 d_{im} は節線変位 D_i の第 m 項の一般化変位である。また、添字 p, q は、構造系全体の自由度の p 番目と q 番目の要素番号を示す。

さて、 D_i の $x=s$ での節点変位 D_{is} は、一般化変位 d_{im} を用いて次式のように表わすことができる。

$$D_{is} = \sum_m c_m d_{im} = c_0 d_{i0} + c_1 d_{i1} + c_2 d_{i2} + \dots + c_K d_{iK} \quad (65)$$

ここに、 c_m は D_i を級数展開したときの $x=s$ における第 m 項の係数で既知量である。また、添字 K は展開項数の総数である。

$c_0 \neq 0$ とすれば注5)、式(65)を次式のように変形できる。

$$d_{i0} = D_{is}/c_0 - c_1' d_{i1} - c_2' d_{i2} - \dots - c_K' d_{iK} \quad (66)$$

ここに、

$$c_m' = c_m/c_0 \quad (m=1, 2, \dots, K) \quad (67)$$

したがって、式(66)を式(64)に用いると、一般化変位 d_{i0} を節点変位 D_{is} に置き換えることができる。式(64)において変位の交換を行った結果は、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots k_{p,q} & \dots k^*_{p,i0} & k^*_{p,i1} & \dots k^*_{p,im} & \dots \\ \dots k_{i0,q} & \dots k^*_{i0,i0} & k^*_{i0,i1} & \dots k^*_{i0,im} & \dots \\ \dots k_{i1,q} & \dots k^*_{i1,i0} & k^*_{i1,i1} & \dots k^*_{i1,im} & \dots \\ \dots k_{im,q} & \dots k^*_{im,i0} & k^*_{im,i1} & \dots k^*_{im,im} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_q \\ D_{is} \\ d_{i1} \\ d_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_p \\ p_{i0} \\ p_{i1} \\ p_{im} \end{bmatrix} \quad (68)$$

ここに、

$$k^*_{r,i0} = k_{r,i0}/c_0 \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad (69 \cdot a)$$

$$k^*_{r,im} = k_{r,im} - c_m' k_{r,i0} \quad \begin{matrix} (r=1, 2, \dots, N) \\ (m=1, 2, \dots, K) \end{matrix} \quad (69 \cdot b)$$

であり、添字 r は構造系の全自由度数 N の r 番目を表す。しかるに、式(68)の係数行列は非対称であるので、計算上不都合である。そこで、式(68)を次のように変形する。

まず、式(68)の第 im 行 ($m=1, 2, \dots, K$) から第 $i0$ 行を c_m' 倍したものを引く。次に、第 $i0$ 行を c_0 で割る。この2つの演算は、係数行列の第 im 行のすべての要素 $k_{im,r}$ ($r=1, 2, \dots, N$) と右辺の荷重項 p_{im} について行うものとする。

上記の変形により、係数行列は対称行列になる。また、そのバンド幅はもとの値と同じである。

(2) 変位増分法

変位増分法は、非線形の平衡方程式を解くために用いられる数値計算法であり、その手法は、衆知のように荷重モードが与えられた場合に、特定な点の変位に適当な増分量を与えて残りのすべての未知変位と荷重倍数を求める解法である。

したがって、変位増分法では計算を制御するための特

注5) D_i として、第 i 節線の変位 v_i または w_i を選ば、 $c_0=1$ である。

定な一点の変位の増分量は既知量であり、荷重増分量は未知量となるので、通常は剛性行列の一行と荷重ベクトルを入れ換えるアルゴリズムが用いられている。しかし、この手法では、平衡方程式の係数行列が非対称になり、かつ、バンド幅が一般に大きくなるので数値計算の効率が悪くなる。そこで、本文では剛性行列と荷重項を交換しないアルゴリズムを用いることにする。なお、詳細については説明を省略する¹⁰⁾。

式(68)を変形して係数行列を対称にした平衡方程式では、変位 D_{is} を制御パラメーターに選べば、文献10)に示した変位増分法をそのまま適用することができる。したがって、有限帯板法において節線上の任意な点 x での変位により計算を制御することができる。

(3) 境界条件と強制変位

式(3)の展開関数を用いる通常の有限帯板法では、帯板は両端 ($x=0, D$) で単純支持されているので、帯板要素またはこの要素で構成された薄肉構造は安定な構造であるが、式(5・b)、(5・c)の剛体変位を表わす展開項を加えた本解析法では、境界条件を与えなければ不安定になる。

有限帯板法において、ある節線の全長に沿って変位を拘束することは容易であり、この変位成分に対応する展開項のすべての一般化変位を零とすればよい。また、節線上の特定な点で変位 D_{is} を拘束するには、(1)で説明した手法により一般化変位の交換を行ってから D_{is} を零とする。ただし、この場合には、もとの平衡方程式(64)から追出す一般化変位の選択に気を付けなければならない。この手法により、線支持の境界条件を用いる通常の有限帯板法に対して、節線上の任意な点で点支持の境界条件を与えることができる。

次に、支点移動などのように強制変位を与える問題注6)を考える。この場合には、強制変位を与える点の変位を一般化変位に選び、(1)の手法により未知量の交換を行って、この変位に対応する接線剛性行列の第 t 列の要素を右辺の定数ベクトルに移項する通常的手法を用いればよい。

たとえば、第 i 節線上の $x=s$ における変位 D_{is} に強制変位 δ_{is} を与える場合には、剛性行列の第 t 行と第 t 列を修正して平衡方程式を次式のように変形する。

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & 0 & \dots & k_{1,N} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & 0 & \dots & k_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 & \dots & \cdot \\ k_{N,1} & k_{N,2} & \dots & 0 & \dots & k_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ D_{is} \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} - \delta_{is} \times \begin{bmatrix} k_{1,t}^* \\ k_{2,t}^* \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ k_{N,t}^* \end{bmatrix} \quad (70)$$

なお、強制変位を起こさせるのに必要な集中外力，すなわち強制力 R_{is} は，次式で与えられる。

$$R_{is} = -p_t^* + \delta_{is} k_{t,t}^* + \sum_{r \neq t}^N k_{t,r}^* dr \dots \dots \dots (71)$$

ここに， p_t^* ， $k_{t,t}^*$ および式 (70) の $k_{r,t}^*$ は，式 (68) の接線剛性行列を対称行列に変形したときの値である。

5. 数値計算による考察

本文で定式化した有限帯板法を薄板の有限変位解析に適用して，解式の精度，解の収束性と適用範囲について検討する。

(1) 変位関数・要素数・展開項数の検討

本節では，2. で仮定した節線の自由度と変位関数によって解の精度と収束性がどの程度変るのか，また，帯板要素の要素数と級数の展開項数は解の精度と計算時間にどれほど影響するのかを，数値計算により調べてみる。

a) 計算例

図-4 に示す 4 辺単純支持された正方形板の相対する 2 辺に，面内圧縮荷重 p が作用する場合の座屈後の挙動を計算する。数値計算では，載荷辺が直線形状を保持するような一様変位を加えたので，荷重 p は載荷辺に沿って不等分布する。また，非載荷辺では，面内変位を拘束しないようにした。

薄板の中央面に，式 (72) で表わされる初期たわみ w^0 を与えた。

$$w^0 = (t/10) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a) \dots \dots \dots (72)$$

ここに， t は板厚である。

板厚と板幅の比とポアソン比には次の値を用いた。

$$t/a = 1/100, \nu = 1/3$$

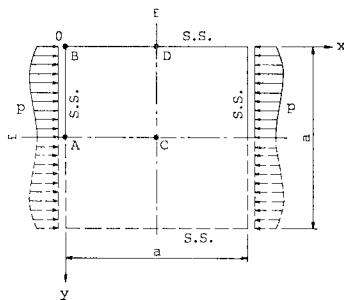


図-4 数値計算例

数値計算では，対称変形を考慮して，図-4 に示す板の上側半分について計算し，式 (3)，(5) の級数項には $m=0, 1, 3, 5, \dots$ のみを用いた。また，荷重強度には，合力の等しい平均強度 \bar{p} を用いて表わし，これを次式の座屈荷重 $p_{cr}^{(2)}$ で無次元化した。

$$p_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \dots \dots \dots (73)$$

ここに， $k (=4)$ は座屈係数である。

b) 節線自由度

節線自由度として，並進変位 u, v, w のほかに，式 (1-c) の θ を用いた (4-4) 要素と式 (1) のすべての微係数を用いた (6-6) 要素による計算値を比較する。

図-5 に，展開項数 K_s を一定 ($K_s=3, K_s$ は対称モードのみの項数を表わす) とし，帯板要素の分割数 M を変えた場合の板の中央点 C のたわみ w_c と荷重との関係を示す。図中の \circ と \bullet 印は Yamaki¹³⁾ による級数解である。 \circ 印は 2 重フーリエ級数解において 3 つの係数までを採用したものであり注 7)，Coan¹⁵⁾ の解に相当する。 \bullet 印は，さらに 1 係数多く用いたものである。

実線は (6-6) 要素を用いた計算値であり，1 枚の帯板要素 ($M=1$) を用いても \circ 印と同じ精度の値が得られる。これに対して，破線で示した (4-4) 要素の計算値は 6 分割しても，たわみが大きいときには 1 枚の (6-6) 要素よりも精度は悪い。

のちほど説明するように (表-1 参照)，同精度の解を得るには (6-6) 要素の方が計算時間が短いので，以後の計算ではすべて (6-6) 要素を用いることにする。

c) 第 0 級数項

解の精度に及ぼす式 (5) の第 0 項の影響について調べてみる。 $x=0$ と a において単純支持された場合には，

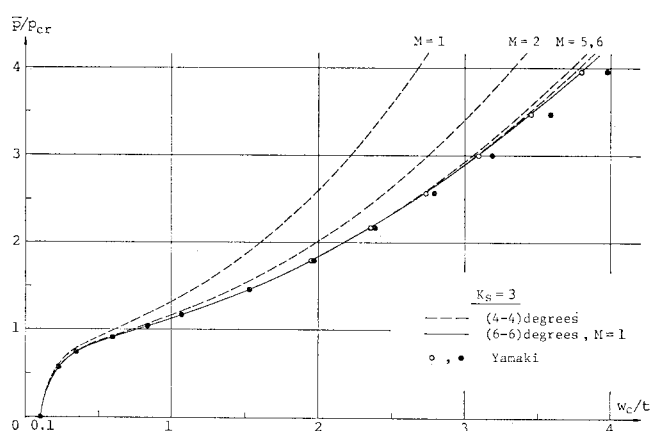


図-5 自由度数の比較

注 6) 強制変位を与えて解く変位制御型の問題と，変位増分法を用いる場合とは本質的に異なる問題である。すなわち，強制変位を与えた場合には，その点に式 (71) に示す強制力が生じるが，変位増分法ではそのような力は作用しない。

注 7) 文献 13) の記号を用いれば， \circ と \bullet 印の値は，それぞれ式 (a)，(b) のようになる。

$$w_c/t = b_{11} + b_{13} + b_{31} + 0.1 \dots \dots \dots (a)$$

$$w_c/t = b_{11} + b_{13} + b_{31} + b_{33} + 0.1 \dots \dots \dots (b)$$

すべての節線について $W_0=0$ であるので、本計算例では面内変位の U_0 と V_0 の効果を検討する。

図-6 には、(6-6) 要素の帯板を1枚用い、 $K_s=3$ ($m=0, 1, 3$) とした場合において、 U_0 と V_0 のどちらか一方か、または両方を省略した計算値を、 U_0, V_0 とも用いた実線の値と比較して示した。この実線の値と、○と●印の値は図-5 と同じである。図-6 より、本計算例のように x 軸方向に荷重が作用する場合には、 U_0 の級数項を省略することができないことがわかる。

d) 要素数と展開項数

解の精度と帯板要素の数および級数の展開項数の関係を調べる。

図-7 に、要素数 M と展開項数 K_s を変えて計算した値を示す。本計算例では、 $M=3$ 、 $K_s=5$ でたわみ w_c は一定値に収束した。 w_c の値は、Yamaki の解よりも少し大きくて、より正確な値であると思われる。このことは、高次自由度を用いた有限要素法による解¹⁶⁾も、図-7 と同じ傾向を有していることからいえる。

図-7 では式 (72) の初期たわみを用いたが、この式の右辺の係数を $t/1000$ とした w^0 を初期不整として与えた場合の計算結果を図-8 に示す。この場合でも、 $M=3$ 、 $K_s=5$ で十分な精度が得られた。

e) 非線形項

式 (37) と (42) の2次の非線形項 $K_{mn}^{(2)}$ と $4K_{mn}^{(2)}$ を省略して計算した場合には、図-5~7 において座屈荷重に達するまでは良好な結果が得られたが、それ以上の荷重に対して、計算値は図の値とまったく異なる値に収束した。すなわち、移動座標系を用いていないので変形が大きくなると2次項が不可欠になる。

また、式 (15) の各ひずみ成分に含まれている面内変位 v に関する非線形項 $(\partial v/\partial x)^2$ 、 $(\partial v^0/\partial x) \cdot (\partial v/\partial x)$ etc. を省略した場合には、図-7 の点線に示すように、その影響はごくわずかである。したがって、本計算例では v に関する非線形項を省略することができるが、帯板が面内曲げを受ける場合(図-15)には省略できない。

f) 面内変位 u の展開関数

図-5~8 の計算例では、 x 軸方向の面内変位 u の展開関数 U_m に式 (3-a) の $\cos \alpha_m x$ を用いたが、式 (6) による展開関数 $\sin 2 \alpha_m x$ について検討する。

帯板要素を1枚、級数を3項用いて計算した場合、中

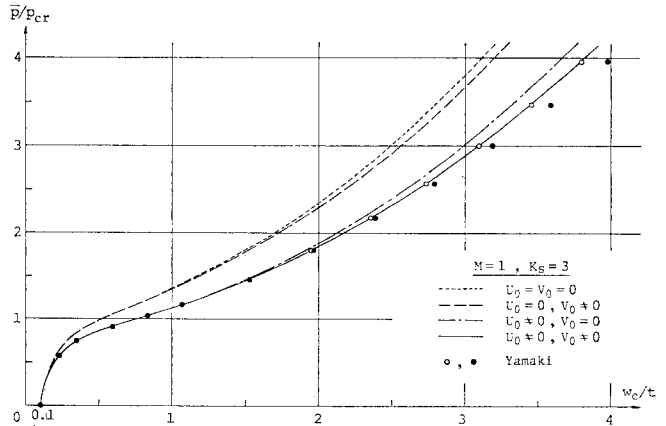


図-6 第0級数項の検討

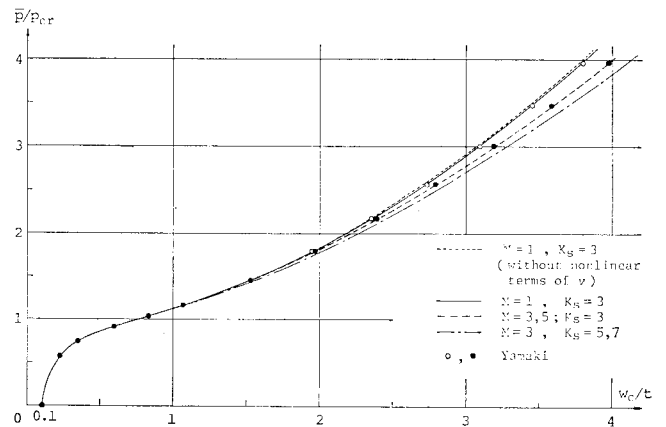


図-7 要素数・展開項数と解の精度

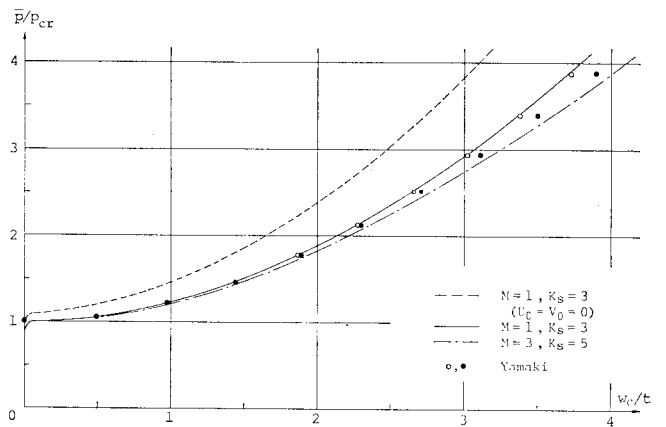


図-8 要素数・展開項数と解の精度 ($w^0=0$)

央点のたわみ w_c には展開項数による差は認められなかった。そこで、両式の違いを、図-4 に示した4点 A, B, C, D の応力 σ_x と σ_y について調べてみる。

上記の $M=1$ 、 $K_s=3$ の場合には、D 点の σ_x (これを D_x で表わす) 以外の応力は両式による計算値に2倍以上の差があった。これは、要素数、展開項数とも少な

すぎるためと考えられたので、 $M=3, K_s=7$ として計算した。この結果を図-9 に示す。

図-9 より、 A_x 以外は両者ともほぼ一致している。この値を・印の Yamaki の解¹⁴⁾と比べると、 $\cos \alpha_m x$ の方がよい結果を与えるように思われるが、Yamaki の解は厳密解ではないので(図-7, 8 参照), 図-9 の結果からでは両展開関数の良否を論ずることはできない。

そこで、展開関数の収束性を調べてみる。 $K_s=5$ としたときの値を図-10 に示したが、これを図-9 と比較すると、 $U_m = \sin 2\alpha_m x$ の場合には B_x 以外の値はほぼ収束していることがわかる。一方、 $\cos \alpha_m x$ の場合は、 $\bar{p}/p_{cr} > 2$ のときには応力は収束しておらず、特に载荷辺上の応力 A_x と B_x の収束が悪い。この原因は、 $\cos \alpha_m x$ に対するひずみ ϵ_x の線形成分 $\partial u/\partial x$ が载荷辺上で常に零になるためと考えられる。

以上の考察により、 x 軸方向に面内荷重が作用する本計算例の場合には、 U_m として従来から用いられている式 (3-a) よりも式 (6) の方が精度がよいといえる。なお、要素数については、 $M=3$ と 5 の場合に差はほとんど認められなかった。

g) 解の収束性と計算時間

数値計算では、増分法と Newton-Raphson 法を併用した。増分法では、4. (3) で説明した変位制御の手法を用いて強制変位を増分した。このときの各増分段階における Newton-Raphson 法の反復回数はすべての計算例において 3~5 回であり、ほとんどの場合に 4 回であった。収束性の判定は、一般化変位 u_{mi}, v_{mi}, w_{mi} の全項数を 3 桁目まで収束させた。

節線の自由度数 D 、要素数 M および展開項数 K と計算時間の関係を表-1 に示す。また、系全体の接線剛性行列の次元数 N と半帯幅数 B の値を示した。計算時間の比は、 $M=1, K=3$ とした (6-6) 要素に対する値である。

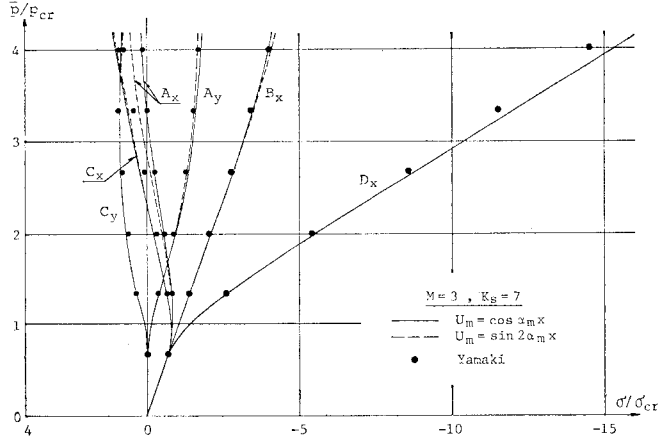


図-9 展開関数 U_m と解の精度

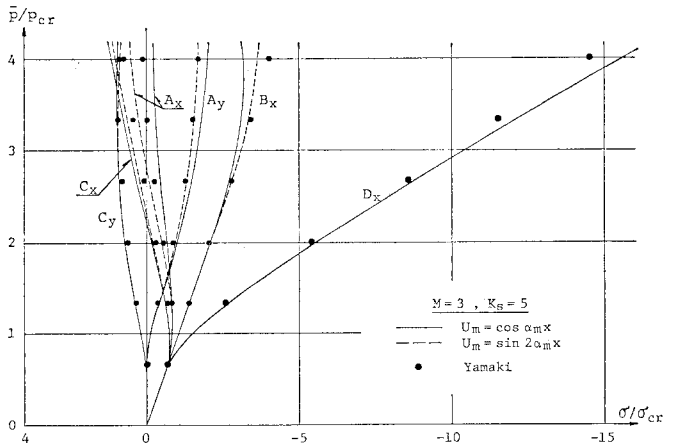


図-10 展開関数 U_m と解の精度

剛性行列の計算に要する時間は M と D^2 に比例し、かつ線形項は K^2 に、1次と2次の非線形項はそれぞれ K^3 と K^4 に比例する。表には平均的な計算時間の概略値 $M \times D^2 \times K^3$ の比の値を示した。なお、†印の値は K の値が異なるために ($K \approx 3$) 正確な時間の比を表わしていない。一方、連立1次方程式を解く時間は、 $N \times B^2$ の値に比例する。CPU 時間は、上記の時間に入出力およびひずみと応力の計算に要する時間も含めた全計算時間である。なお、(4-4) 要素の計算では (6-6) 要素

表-1 自由度数・要素数・展開項数と計算時間の関係

| Degree of freedom (D) | Number of elements (M) | Number of terms (K) | System stiffness matrix | | Ratios of computing time | | |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------|--------------------------|---------------------------|----------|
| | | | Dimension (N) | Band width (B) | $N \times B^2$ | $M \times D^2 \times K^3$ | CPU time |
| 4-4 | 5 | 3 | 72 | 24 | 0.89 | 2.22 | 4.04* |
| 4-4 | 6 | 3 | 84 | 24 | 1.04 | 2.67 | 4.64* |
| 6-6 | 1 | 3 | 36 | 36 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| 6-6 | 3 | 3 | 72 | 36 | 2.00 | 3.00 | 2.98 |
| 6-6 | 5 | 3 | 108 | 36 | 3.00 | 5.00 | 4.86 |
| 6-6 | 3 | 5 | 120 | 60 | 9.26 | 13.89† | 16.61 |
| 6-6 | 3 | 7 | 168 | 84 | 25.41 | 38.11† | 51.71 |

のプログラムを使用したので計算の効率がいくぶん悪くなっており、* 印の数値では正確な比較を行うことができない。

さて、(6-6) 要素の時間を調べると、† 印の値を除けば CPU 時間の比はほぼ剛性行列の計算時間に比例している。そこで、全計算時間は剛性行列の計算時間に比例するものとして、 $K=5$ と 7 の場合に K^a の指数 a の値を逆算すると、 $a=3.35, 3.36$ となる。したがって、図-4 の計算例では、全計算時間は $M \times D^2 \times K^{1.9/2}$ にほぼ比例するものと推測できる。また、(4-4) 要素を用いて (6-6) 要素と同じ精度の解を得るためには (図-5 を参照)、表-1 に示したように計算時間は 2 倍以上かかることがわかる。

以上の考察により、有限帯板法による有限変位解析では、連立 1 次方程式の計算よりも剛性行列の計算に要する時間を短縮しなければ計算の効率化は望めない。このための一つの手段として、修正 Newton-Raphson 法を用いることは有効であろう。本計算例での CPU 時間を示すと、 $M=1, K_s=3$ の (6-6) 要素を用いて 15~20 回の増分計算を行った場合に 30~40 秒であった。使用機種は ACOS-900 である。なお、 v に関するひずみの非線形項を省略すれば、計算時間は 10% 程度短くなる。

(2) 適用範囲の検討

本節では、板の縦横比、境界条件、荷重条件の種々の場合について、本解析法の適用性を調べてみる。計算では、第 0 級数項を含む (6-6) 要素を用いた。また u の展開関数には式 (3・a) を使用した。

a) 4 辺単純支持の長方形板

図-4 の計算例において、板の縦横比 a/b の値が 0.5 と 3.0 の場合について計算した。ここに、 b は載荷辺の幅である。

縦横比が 0.5 と 3.0 の板に、それぞれ次式の初期たわみ w^0 を与えた。

$$\left. \begin{aligned} w^0 &= \frac{t}{10} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ w^0 &= \frac{t}{10} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(74 \cdot a, b)$$

図-11 に、 $a/b=0.5$ の板の中央点のたわみ w_c を、図-12 に 3.0 の板の点 $e(x=a/6, y=b/2)$ のたわみ w_e を示す。これらの図より縦横比が 1 より小さい場合には要素数が、1 より大きい場合には展開項数が計算結果に

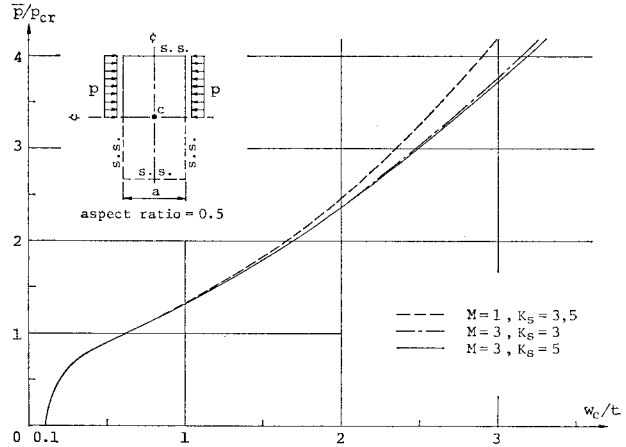


図-11 4 辺単純支持の長方形板 ($a/b=0.5$)

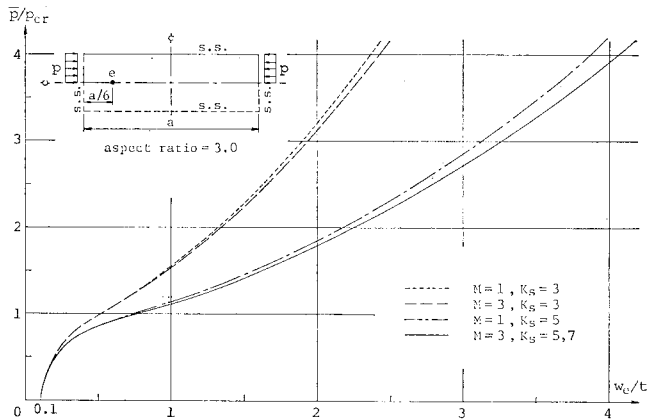


図-12 4 辺単純支持の長方形板 ($a/b=3.0$)

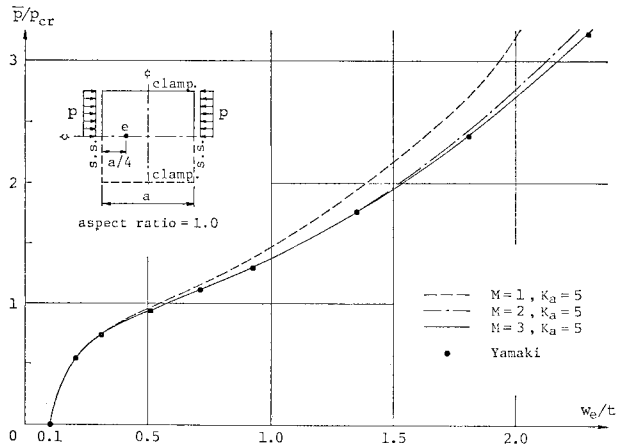


図-13 非載荷辺固定の正方形板

大きく影響することがわかる。

b) 非載荷辺固定の正方形板

図-4 において、非載荷辺のみが固定支持された正方形板について計算する。初期たわみとして、次式の w^0 を仮定した。

$$w^0 = \frac{t}{10} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \dots\dots(75)$$

点 $e(x=a/4, y=a/2)$ のたわみ w_e の値を, Yamaki¹³⁾ の解とともに 図-13 に示す. 図中の記号 $K_a=5$ は, 式 (3), (5) の級数項を 5 項 ($m=0\sim 4$) 用いたことを表わす. 本計算例では, 4 辺単純支持の場合(図-7) に比べて要素数を多くする必要がある. $M=3, K_a=5$ とした場合に, Yamaki の解と一致した.

c) 面外荷重を受ける正方形板

4 辺単純支持の正方形板に, x 軸方向の全載等分布荷重 q が作用する場合について計算した. このとき, 支持辺上の面内変位 u, v は拘束されているものとした.

$$u=v=0 \text{ (on } x=0, a; y=0, a) \dots\dots\dots(76)$$

計算では, 板の片側半分を 3 要素に分割し, 荷重増分法を用いた. なお, ポアソン比は $\nu=0.316$ とした.

板の中央点のたわみ w_c と荷重との関係を 図-14 に示す. 縦座標には, 無次元量 qa^4/Et^4 を用いた. また, ○印は Levy の解¹⁷⁾ である. $M=3, K_s=3$ とした計算値でも, Levy の解にかなりよく一致している.

d) 面内曲げを受ける正方形板

図-15 に示すように, 4 辺単純支持された正方形板に面内モーメント M が作用する場合の座屈後の解析を

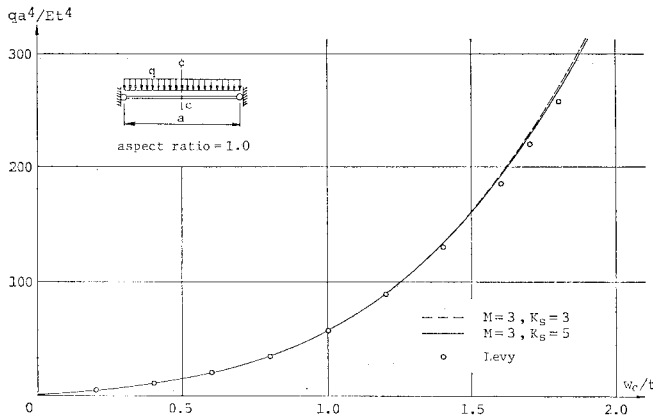


図-14 面外荷重を受ける正方形板

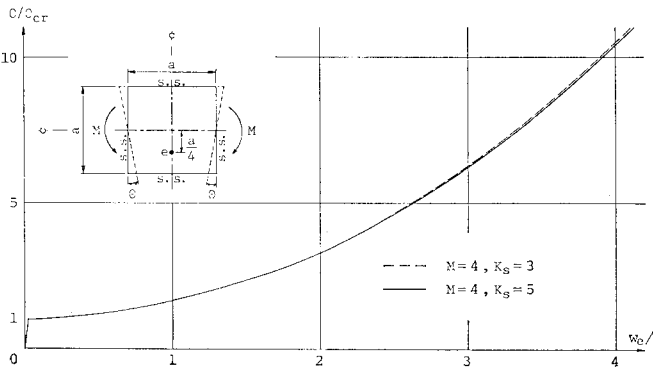


図-15 面内曲げを受ける正方形板

行う. 非載荷辺 ($y=0, a$) 上の面内変位に拘束はないものとし, 載荷辺 ($x=0, a$) は変形後も直線を保つようにした. 計算では, 両載荷辺を z 軸まわりに回転させたときの角 θ を与えて計算を制御した. また, 面外座屈を起こさせるために, 次式の初期不整を与えた.

$$w^0 = \frac{t}{1000} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \dots\dots\dots(77)$$

なお, 計算では次の数値を用いた.

$$t/a=1/100, \nu=0.3$$

正方形板を 4 枚の帯板要素に分割して点 $e(x=a/2, y=3a/4)$ のたわみ w_e を求めた. この値と回転角 θ との関係を 図-15 に示した. 縦座標は, θ を座屈時の回転角 θ_{cr} で除した値であり, このときの座屈荷重は文献 18) の値と一致した.

図の $(\theta/\theta_{cr})-(w_e/t)$ 曲線は座屈時においてはほぼ直角に折れ曲がり, 面内曲げによる板の面外座屈挙動を明瞭に表わしている. 本解析例でも, 展開項数を 3 項とれば解はほぼ収束している.

e) 偏平なアーチの飛移

初期形状が, 式 (78) のような正弦波形で与えられる偏平な 2 ヒンジアーチの飛移現象を計算する.

$$w^0 = \sin(\pi x/l) \dots\dots\dots(78)$$

ここに, l はアーチの支間長である.

計算では 1 枚の帯板要素を用いた. その寸法と弾性定数は次のとおりである.

$$b \times t \times l = 100 \times 10 \times 1000 \text{ mm,}$$

$$E = 2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2 \text{ (206 GPa)}$$

$$\nu = 0.3$$

荷重は 図-16 に示すように, $q=0.1 \text{ kg/cm}^2$ (9.8 kPa) を基準強度とする等分布面荷重を全載した. 数値計算では, 変位増分法を用いてクラウンのたわみ w_c を制御し, これに対する荷重倍率 λ を求めた. なお, 展開項数は $K_s=5$ とした.

λ と w_c の関係を 図-16 に示したが, ○

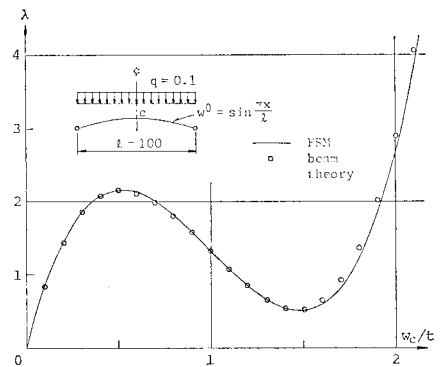


図-16 偏平アーチの飛移

印の棒理論¹⁹⁾による計算値とよく一致していることがわかる。

以上の数値計算により、薄板の有限変位問題は本解析法により十分な精度で解析できることがわかった。さらに、通常の座標変換の手法²⁾を用いれば、本解析法を補剛板や薄肉構造の有限変位解析に応用することができる^{7), 20)}。

6. 結 言

変位関数、解式の定式化および数値解法についての検討と工夫により、薄肉構造の有限変位解析に適用できる有限帯板法を開発することができた。

本研究で得られた結果を、以下のように要約できる。

(1) 有限帯板法により薄板の高度の有限変位問題を高精度に、かつ効率よく解析することができる。

(2) 高次自由度の帯板要素は低次自由度の要素に比べて、非線形性が著しいほど、解析精度とともに計算時間に関して有利になる。

(3) 面内荷重を受ける板の解析では、第0級数項を省略すべきではない。特に、応力に大きな影響を与えるからである。

(4) 剛性行列を解析的に定式化することによって計算時間を大幅に短縮することができた。また、この解析的手法により、数値計算の過程で積分による計算誤差が生じないのできわめて収束性のよい安定した解が得られた。

(5) 有限帯板法に適した変位制御の解法を開発したことにより、境界条件の拡張、強制変位の入力、変位増分法の適用ができるようになった。

本報告の基礎的な研究により、有限帯板法を非線形問題に適用するにあたっての若干の資料を得ることができた。解析対象に制約があるが、変位関数を改良することによって、有限帯板法の特徴である半解析的解法の長所を生かした効率のよい非線形解析法としてさらに発展させることができるものと考えられる。

本解析法の定式化には、数年にわたる試行と修正を重ねた。この研究過程で、当時、大阪大学工学部学生であった四十宮利夫君（現・神戸市役所勤務）と大原良夫君

（現・三井建設(株)勤務）の協力を得た。両君に謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
- 2) Cheung, Y.K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.
- 3) 吉田宏一郎: 有限帯板法とその応用(その1), (その2), 日本造船学会誌, 第538号, 第539号, 1974.
- 4) 吉田宏一郎・岡 徳昭: 帯板要素による平板構造の曲げ解析, 日本造船学会論文集, No. 132, 1972.
- 5) Sridharan, S.: Poisson's Effect on Buckling of Plate Assemblies, ASCE, Vol. 105, No. ST 10, 1979.
- 6) Maeda, Y., M. Hayashi and K. Arioka: Elasto-Plastic Analysis of Thin-Walled Structures by Finite Strip Method, Tech. Rep. of Osaka Univ., Vol. 26, 1976.
- 7) 前田幸雄・林 正・林 健治・森 寛司: 局部モードを用いた有限帯板法, マトリックス解析法研究発表論文集, JSSC 第13回大会, 1979.
- 8) 上田幸雄・村川英一・松石正克・森 信義: 有限帯板法による板および桁の弾塑性大たわみ解析, マトリックス構造解析法研究発表論文集, JSSC 第9回大会, 1975.
- 9) 上田幸雄: 弾塑性・座屈・大たわみ解析, JSSC 有限要素法に関する講習会テキスト, p. 200, 1974.
- 10) 林 正: 構造物の非線形解析における多元連立方程式の数値解法, 京都大学数理解析研究所講義録, No. 269, 1976.
- 11) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, p. 153, 1968.
- 12) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, pp. 351~356, 1961.
- 13) Yamaki, N.: Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Appl. Mech., Vol. 26, Trans. ASME, Vol. 81, 1959.
- 14) Yamaki, N.: ditto (continued), J. Appl. Mech., Vol. 27, Trans. ASME, Vol. 82, 1960.
- 15) Coan, J.M.: Large-Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Appl. Mech., Vol. 18, Trans. ASME, Vol. 73, 1951.
- 16) Vos, R.G. and W.P. Vann: A Finite Element Tensor Approach to Plate Buckling and Postbuckling, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 5, No. 3, 1973.
- 17) Levy, S.: Large Deflection Theory for Rectangular Plates, Proc. Symp. Appl. Math., Vol. 1, 1949.
- 18) 文献 12), pp. 373~379.
- 19) 前田幸雄・林 正: 構造解析における多元連立非線形方程式の数値計算法, マトリックス解析法研究発表論文集, JSSC 第11回大会, 1977.
- 20) 前田幸雄・林 正・森 寛司: 有限帯板法による有限変位解析の基礎的研究, 第35回土木学会年次学術講演会講演概要集, I-29, 1980.

(1980.10.23・受付)