

多次元圧密の非連成数値解析について

UNCOUPLED NUMERICAL PROCEDURE FOR SOLVING MULTI-DIMENSIONAL CONSOLIDATION PROBLEMS

山上拓男*・植田康宏**

By Takuo YAMAGAMI and Yasuhiro UETA

1. ま え が き

Sandhu や Christian^{1),2)} らに始まった Biot 理論に基礎を置く多次元圧密の数値解析法は最近に至り弾塑性解析³⁾を可能ならしめるなど、この10年間現実の土の挙動を踏まえ着実に進歩してきたといえる。しかし、一方において理論の精緻化に伴い困難な問題が付随することも避けがたい。それは、土粒子・間隙水の連成作用を直接取り扱うこれらの手法は、理論上の厳密性は高く評価できるとしても、理論構成が複雑で必ずしも理解が容易でないこと、および連立方程式の拡大化が不可避であることなどである。多次元圧密が土構造物の設計施工と関連してごく普通に遭遇する事象であることを考えるならば、既往の手法に比べいくらかでも簡便で実用的な解析法を開発する意義は少なくないと思われる。

このような見地のもとに、著者らは本来的な土粒子・間隙水相互作用としての圧密現象を、間隙水圧の消散過程と粘土骨格の変形挙動に分離し、それらをおのおの独立に解析してその間を浸透力が受け渡す点に最大の特徴を有する新しい解法を提案した⁴⁾。しかし、そこでは紙数の制約上、この解析法を遂行するうえできわめて重要な役割を果たす2つの概念の説明を割愛せざるを得なかった。すなわち、圧密解析の初期条件となる載荷直後の非排水状態の解析法と、いま1つは圧密過程において、各タイムステップごとに粘土骨格が被る有効外荷重増分の評価法である。本論文の目的の1つはこれら2つの項目を説明することである。また、前論文では主として1次元イソパラメトリック要素に基づく定式化の概要とその適用例を示し、おおむね満足すべき結果が得られたのであるが、圧密の初期の部分で他の厳密な手法による解との間にいくぶんずれが目立つ傾向が認められた。

そしてこの原因が自由度の低い1次元要素を用いたためと推察しておいた。この点を検証するため、その後行った2次元イソパラメトリック要素に基づく定式化と適用例を提示することが、本論文のいま1つの目的である。

2. 非排水状態の解析

圧密現象の数値解析は一般にマトリックス表示された多元連立微分方程式を時間に関して差分化し、逐次数値積分法がとられるのが普通である。したがって載荷直後($t=0$)の初期間隙水圧分布を既知とせねばならない事情はいかなる解法にもあてはまる。その際、Sandhu, Christian らに代表される Biot 系列の解法によれば、一般に排水条件と無関係に適用し得るため載荷直後の非排水状態の解析と、その後に引き続き圧密状態のそれはなんら区別することなく扱うことができた。これに対し、著者らが提案した解法は土粒子と間隙水の連成作用を避けて通る必然の帰結として、そのままの形で非排水状態を解析することはできない。したがって圧密解析の初期条件は別の方法で求める必要がある。その際、提案した圧密解析のほかにもみられない特徴が、数値解析のテクニックの面で連成効果を回避し、その取り扱いをきわめて平易にしたところにみられるため、このような圧密解析の特徴と整合する意味で、初期条件の決定もまた簡便かつ、平易なものでなければならない。

土粒子・間隙水を非圧縮性とするとき、載荷直後の飽和粘土は非圧縮性材料として挙動する。このとき粘土を弾性体と仮定すれば見かけの Poisson 比が 0.5 となって数値解析上特別の困難を伴う。そのため、理論上 0.5 である Poisson 比 ν を 0.5 に近い値で代用し、全応力解析することがよく行われてきた。この場合平均全応力をもって間隙水圧とすればよい。この方法は非常に簡便で、筆者らの主義・主張に最も適合する解法であるけれども、精度の面で難があるとして、多くの批判を浴びて

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科

** 正会員 工修 阿南工業高等専門学校助手 土木工学科

きた。それは ν が 0.5 に接近するにつれ、解が不安定となるため、どの程度まで 0.5 に近づけ得るのかといった点が不明であることによる。極端なケースでは、 $\nu=0.48, 0.49$ とした結果の応力分布よりも $\nu=0.45$ で求めた値が、より厳密解に近いことなども経験されている⁵⁾。こうした理由から全応力解析は簡便なところがなによりも大きい魅力であるにもかかわらず、最近では土粒子-間隙水の連成作用を考慮した解法に比べ、ほとんど顧みられなくなっているのが現状であろう。しかしながら、Zienkiewicz を中心とする Wales 大学一派によるアイソパラメトリック要素の数値積分次数が応力解析に及ぼす影響や要素内応力の評価点 (Sampling points) とその平滑化等に関する詳細な研究により^{6)~10)}、非圧縮性弾性体に対して 0.5 に非常に近い ν を用いた通常の有限要素解析が十分な精度で適用できることが明らかにされてきている。したがって、この手法を目下の関心事である飽和粘土の非排水時の解析に持ち込むならば、簡便かつ平易な初期間隙水圧の評価が期待できるであろう。

ところで、圧密の数値解析を別の観点で分類するとき、未知量としての間隙水圧を有限要素網の節点に対応させるか、もしくは要素に対応させるのかといった区別が重要な意味をなす。ともに Biot 系列に属する Sandhu らと Christian らの解法もこの点では大きい相違が認められ、前者は節点未知量として、また後者は要素未知量として理論展開している。赤井・田村²⁾ は計算精度の面からは前者が望ましいものの、Biot 理論のもつ意味からすれば後者が自然であるとの見解を示している。こうした立場で筆者らの圧密解析法を眺めるとき、それは Sandhu らと同様節点未知量として取り扱うことである。したがって初期間隙水圧分布もまた節点で精度よく評価されたものでなければならぬ。この問題についても以下で少しく議論することにする。

(1) 数値積分次数の低下による全応力解析^{9),10)}

2次元平面ひずみ状態を考え、ポテンシャルエネルギー汎関数をマトリックス表示すれば次式となる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} - 2\{\mathbf{u}\}^T \{\bar{X}\}) dV - \int_{S_1} \{\mathbf{u}\}^T \{\bar{T}\} dS_1 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\{\epsilon\} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$, $\{\mathbf{u}\} = [u \ v]^T$, $\{\bar{X}\} = [\bar{X} \ \bar{Y}]^T$, $\{\bar{T}\} = [\bar{T}_x \ \bar{T}_y]^T$ であって、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ はひずみ成分、 u, v は変位成分、 \bar{X}, \bar{Y} は物体力成分、 \bar{T}_x, \bar{T}_y は表面力成分。また $[D]$ は弾性マトリックスである。いま、この弾性マトリックス $[D]$ をせん断弾性係数 G および体積弾性係数 K を用いて次のように表わすこと

ができる。

$$[D] = G \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(K - \frac{2}{3} G \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

これを

$$[D] = G [D_s] + 2\alpha [D_v], \quad 2\alpha = K - 2G/3 \dots\dots\dots (3)$$

と表わしておく。このとき、式(1)は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T (G [D_s]) \{\epsilon\} dV \\ & + \int_V \{\epsilon\}^T (\alpha [D_v]) \{\epsilon\} dV \\ & - \int_V \{\mathbf{u}\}^T \{\bar{X}\} dV - \int_{S_1} \{\mathbf{u}\}^T \{\bar{T}\} dS_1 \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで、通常の変位法に基づく有限要素解析手法を式(1)に適用するとき、

$$[K] \{\delta\} = \{F\} \dots\dots\dots (5)$$

なる形の剛性方程式が導かれることに注意すれば、同じ手法を式(4)に適用すれば次式が得られることになる。

$$([K_1] + \alpha [K_2]) \{\delta\} = \{F\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $[K_1]$ は式(4)右辺第一項に、また $\alpha [K_2]$ は第二項に対応し、系全体の剛性行列 $[K]$ とは $[K] = [K_1] + \alpha [K_2]$ なる関係にある。いま、材料が非圧縮性に近づく (Poisson 比 $\nu \rightarrow 0.5$) につれ、 $\alpha \rightarrow \infty$ となることから、前述したような 0.5 に非常に近い Poisson 比を用いて全応力解析することは、十分大きい α のもとに式(5)を解くことになる。したがって、これはまた近似的に次式を解くことと等価である。

$$\begin{aligned} \alpha [K_2] \{\delta\} &= \{F\} \\ \text{すなわち、} & \\ [K_2] \{\delta\} &= \{F\} / \alpha \neq 0 \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

である。これより変位 $\{\delta\}$ が有意であるためには $[K_2]$ は特異行列に近いものでなければならぬ。

以上を要約すれば、非圧縮性材料に対して 0.5 に近い ν を用いた全応力解析が成功するためには、 $[K_2]$ の特異性を要求する一方で、直接解く式は式(5)であるから $[K]$ は特異であってはならないということになる。このような一見矛盾した2つの要請に答えるためには、剛性行列の評価に際していわゆる低減積分 (reduced integration) を採用すればよいことが明らかにされている。すなわち、アイソパラメトリック要素の剛性行列を Gauss 求積法で数値積分するとき、4節点1次要素では1点積分を、また8節点の2次要素では 2×2 Gauss rule を採用すると、精度の高い変位解が得られるのである。

(2) 2次要素による応力計算と節点間隙水圧の評価

周知のように変位法に基づく有限要素解析では変位の一次微分としての応力は要素間で不連続となる。さらに CST 要素以外の要素を用いれば応力分布は要素内で一定とはならない。すなわち、1次要素では直線的な、また2次要素では放物線形状（キャップ形状）の分布を呈する。そして、仮に変位が高精度で評価されたとしても応力分布は必ずしも厳密解と近似しない。この厳密解とのずれは Poisson α が 0.5 に漸近するにつれて、すなわち非圧縮性の度合が増大するにつれて、著しく大なることが知られている。

図-1 はこの間の状況を示す模式図であって、説明の便宜上 1次要素で図解している。(a) 図の直線 ①② は1次要素において要素内の応力分布を、また、(b) 図の曲線 ①~③ は2次要素内の応力分布を表わしている。このとき、構成材料の圧縮性が低下するに従って要素内の応力分布は急激な変化を示すのであるが、その定性的な傾向は (a) 図の場合直線 ①② の勾配が非常に大きくなることであり、また (b) 図の場合は両端の応力 $\sigma_{\text{①}}$, $\sigma_{\text{③}}$ と中心近傍の応力 $\sigma_{\text{②}}$ の差が極端に大きくなることである。こうした事情により、系全体としての応力分布の解明を必要とする問題においては、要素内のいかなる点で応力を評価すべきかが重要な意味をなす。

この問題に関してもすでに詳細な研究がなされており^{10), 11)}、その結果、1次要素は要素中心 ($\xi=0$) が、また2次要素では2つの Gauss Points ($\xi=\pm 1/\sqrt{3}$) が応力 (or ひずみ) に関する最適の評価点であることが明らかとなっている。すなわち、図-1 にみられるように1次要素の σ_g および2次要素の σ_{g1} , σ_{g2} が節点変位と同程度の精度で厳密な応力を近似しているのである。この事実は2次元要素

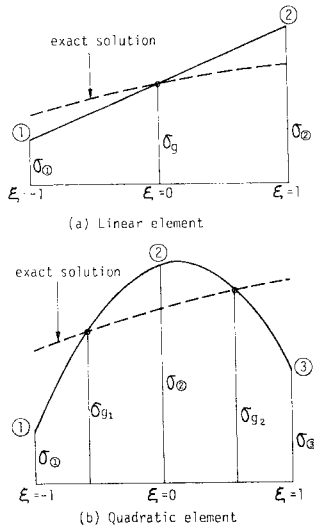


図-1 要素内応力分布の模式図

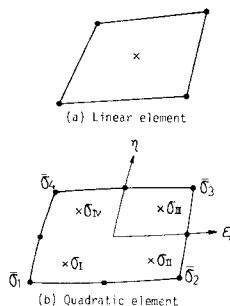


図-2 要素内応力の最適評価点

にもあてはまり、図-2 に示すように1次要素はやはり要素中心 ($\xi=\eta=0$)、2次要素では 2×2 Gauss Points ($\xi=\pm 1/\sqrt{3}, \eta=\pm 1/\sqrt{3}$) で最適の応力を与えることが知られている。

さて、上述の議論は応力分布に関して得られている知見を要約したものであるが、ここで必要な量は圧密解析の初期条件となるべき間隙水圧分布である。しかも圧密解析の性格上、有限要素網の節点で評価された間隙水圧でなければならない。

一方、平面ひずみ状態の飽和粘土が非排水挙動を示すとき、全応力としての主応力 σ_1, σ_3 もしくは直応力成分 σ_x, σ_y と間隙水圧 u の間には、粘土を弾性体と仮定するとき次の関係が認められる。

$$u = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \dots\dots\dots (8)$$

ゆえに応力が精度よく評価できたならば、ただちに同じ精度の間隙水圧が求められることになる。これより上述の知見を考慮すると、結局間隙水圧も応力と同様1次要素は要素中心で、また2次要素は 2×2 Gauss Points で評価すべきことが理解されよう。問題はこれらサンプリングポイントで求められた間隙水圧からいかなる操作で節点間隙水圧を推定するかである。このような観点からすれば1次要素はきわめて不都合なものといわねばならない。それは説明するまでもなく要素中心の唯一の値から4節点の値を外挿することになるわけで、本来的に無理が伴うことは明白であろう。

これに対し、Hinton and Campbell⁷⁾、Hinton・Scott and Ricketts⁸⁾ は2次要素の場合、図-2 の Gauss Points で評価された応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ から要素内の応力分布を平滑化し、Corner nodes の応力を簡便かつ巧妙に推定する手法を提案している。それは要素内で応力が双一次的变化 (bilinear variation) を示すと仮定するもので、その結果は次式に到達する。

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1 - \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 + \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1 - \sqrt{3}/2 \\ 1 - \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1 + \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 - \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\sigma}_4$ は平滑化の結果求められる4節点の応力。

この概念を応用すれば節点間隙水圧の評価がきわめて容易になされる。まず、低減積分のもとに 2×2 Gauss Points で計算された応力から式 (9) を経て節点応力を算定し、さらに式 (8) で間隙水圧を求めるのである。あるいは逆に、 2×2 Gauss Points で式 (8) から間隙水圧

を決定し、これら4点の間隙水圧から式(9)で節点間隙水圧を算定してもよい。このような操作をすべての要素で行うと、1つの節点について、その点に会合する要素の数だけの間隙水圧が求められることになる。この場合それらの単純な算術平均をとれば十分正確な節点間隙水圧が定められることは、次項の解析例をみれば明らかである。

(3) 解析例

はじめに述べた低減積分の導入により、安定かつ高精度の解が得られる事例については他の文献¹²⁾に譲り、ここでは2次要素に基づく節点間隙水圧の評価の一例を示す。問題は、平而ひずみ状態にある円柱が周囲から等方圧 p を受けるもので、図-3に1/4断面を取り出し要素分割を示した。全応力としての弾性定数および等方圧は図中に記してある。まず図-4は各要素について2×2 Gauss Pointsで評価した応力から式(9)でCorner nodesの応力を求め、さらに式(8)を用いて算出した間隙水圧を記したもので、任意節点まわりの数値はその点に会合する要素から計算された間隙水圧の値を表わしている。そしてこのような各節点まわりの間隙水圧を単純に算術平均して改めてその点の間隙水圧としたのが図-5である。この問題の間隙水圧の厳密解がいたるところで1.0 t/m² (9.8 kN/m²) であることから、非常によい精度で節点間隙水圧が求められているといえよう。筆者らの圧密解析の初期条件は前論文⁴⁾も含めすべてこのような方法で決定されたものである。

ところで、前述したように2次要素では応力の最適評価点は2×2 Gauss Pointsであって、これ以外の点でサンプリングされた応力は精度が悪化する。その一例を図-6に示した。この図は図-3の要素網のうち、要素②②~②④および②⑧~②⑩を取り出したもので図中に記した数値はいずれも間隙水圧の値である。図中×印は2×2

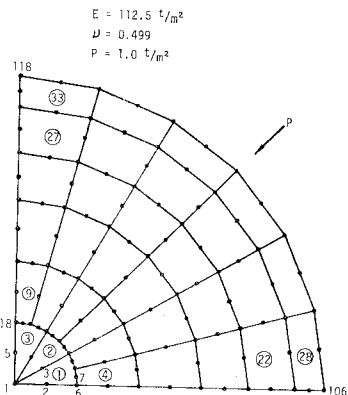


図-3 2次要素による要素分割 (低減積分)

Gauss Pointsを、また○印は要素中心を表わす。無論●印はCorner nodesである。そしてこれらの点に付記された間隙水圧の値はその点の局所座標値を用いて直接計算した応力から式(8)を用いて求めたものである。図から明らかなように、2×2 Gauss Pointsの間隙水圧は厳密値とほとんど一致しているのに反し、Corner nodesと要素中心の値は負符号がつくなど相当に大きな誤差を伴っている。このように応力分布、したがって間隙水圧分布の解明を必要とする場合、サンプリングポイントに十分注意しなければ的確な評価は不可能となる。

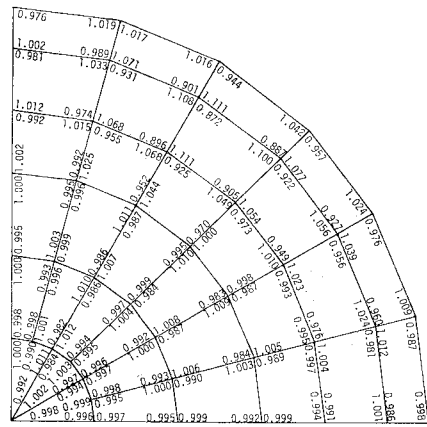


図-4 要素内応力の平滑化に基づく節点間隙水圧の算定

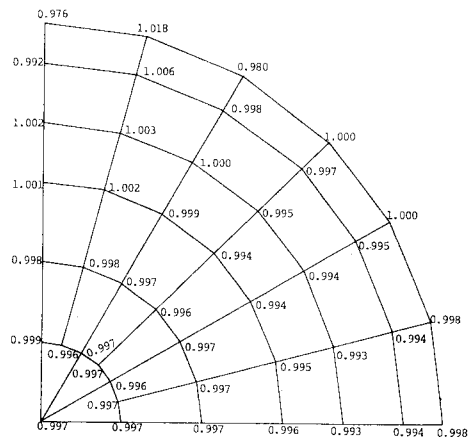


図-5 節点間隙水圧分布 (図-4の算術平均)

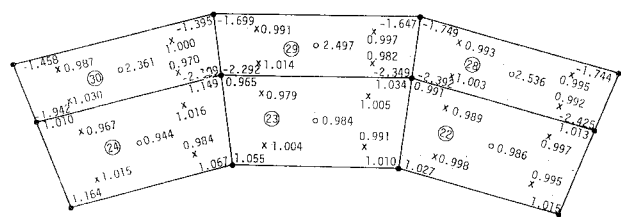


図-6 直接評価による要素内各点の間隙水圧

3. 2 次要素に基づく圧密解析の概要

(1) 基礎式の要約

筆者らの圧密解析の骨子は、適当な時間増分ごとに間隙水圧の消散過程と粘土骨格の応力-変形状をそれぞれ独立に解析することであった。このうち応力-変形解析は簡単に次式で定式化される。

$$K_E \cdot \Delta u = \Delta F, \quad u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta u \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 K_E ：有効応力に基づく粘土骨格の剛性行列、 Δu ：時間増分 Δt 間の変位増分、 ΔF ： Δt 間に粘土骨格が受ける荷重増分、 $u_{t-\Delta t}$ 、 u_t ：時刻 $t-\Delta t$ および t での変位。

一方、間隙水圧の支配式は全水頭 H に基づいて次式で表わされる。

$$\text{div}(k \text{ grad } H) + Q - C \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 k ：透水係数テンソル、また、 Q 、 C は平均全応力 $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ 、水の単位重量 γ_w 、粘土骨格の弾性定数 E' 、 ν' を用いて次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} Q &= C \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ C &= \frac{2\gamma_w(1+\nu')(1-2\nu')}{E'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

また、式 (11) に課せられる境界条件は次の 2 つである。

- (a) 境界上で H の値が指定される。
- (b) 境界上で流量 q が指定される。

(2) 2 次要素による定式化の要点

ここでは上述した基礎式に対し、2 次アイソパラメトリック要素を持ち込む際注意すべき要点を略述する。

まず、応力-変形解析に関しては式 (10) の系全体としての剛性方程式を導くため、各要素の剛性方程式を定めねばならない。すなわち、

$$[k]\{\delta\}^e = \{Q\} \dots\dots\dots (13)$$

である。ここに、 $[k]$ ：要素の剛性行列、 $\{\delta\}^e$ ：要素の節点変位ベクトル、 $\{Q\}$ ：要素の節点荷重ベクトル。

アイソパラメトリック要素の場合、 $[k]$ 、 $\{Q\}$ の一般形は次式で与えられる¹³⁾。

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det [J] d\xi d\eta \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{\bar{X}\} \det [J] d\xi d\eta \\ &+ \int_{S_1} [N]^T \{\bar{T}\} dS_1 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

式 (14)、(15) は一般に広く知られた式であり、ここでは各記号の説明も省略し、圧密解析上注意すべき要点だけを摘記するにとどめる。

すなわち式 (15) 右辺第一項において、 $\{\bar{X}\} = [\bar{X} \bar{T}]^T$ は式 (1) にもみられたように要素内の物体力成分であるが、目下の圧密解析ではこの項は相隣る 2 つの時刻における浸透力の増分を表わす¹⁾。いま、式 (15) 右辺第一項を $\{Q_b\}$ なる記号で示すとして、もし浸透力増分 (\bar{X}, \bar{Y}) が要素内で一定と仮定できれば、2 次要素の場合 $\{Q_b\}$ は次式となることが知られている。

$$\{Q_b\} = A \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 A はその要素の面積である。しかし、圧密解析において要素内の浸透力、つまり動水勾配を一定と仮定することは精度上あまり好ましいことではないと思われる。このため著者らは浸透力の増分も自然 (局所) 座標 (ξ, η) の関数とみて、式 (15) を Gauss 求積法で数値積分する方法をとっている。その際、要素内の各 Gauss Point に応じた浸透力の増分を代入することになる。したがって、のちに述べる各タイムステップごとの非定常浸透解析の結果、要素内の Gauss Points に応じた浸透力増分を記憶しておかねばならない。なお、式 (15) 右辺第一項の数値積分次数としては、Gauss 3×3 rule を採用すれば十分であることを確かめている。

また、式 (15) 右辺第二項の表面 (分布) 荷重項も 2 次要素による圧密解析においては特別な注意が必要であるが、これに関しては次節 4. で述べる。

次に、式 (11) の非定常浸透解析の定式化を概説する。この場合は式 (11) および境界条件 (a)、(b) に対する汎関数 χ^i に基づき、解析領域を有限要素で分割し、

$$\frac{\partial \chi}{\partial H_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (17)$$

とすれば、全水頭 H が決定される。ただし、 H_i は各節点の未知水頭、また n は節点数である。その際各要素のこの微係数への寄与を求め、それらを全領域にわたって重ね合わせることになる。すなわち任意要素 e の $\partial \chi / \partial H_i$ への寄与は、

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial H_i} = \frac{\partial \chi_1^e}{\partial H_i} + \frac{\partial \chi_2^e}{\partial H_i} + \frac{\partial \chi_3^e}{\partial H_i} + \frac{\partial \chi_4^e}{\partial H_i} \dots\dots\dots (18)$$

である。ここに、

$$\frac{\partial \chi_1^e}{\partial H_i} = \iint_e \left\{ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \right\} dx dy$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi_2^e}{\partial H_i} &= - \iint_e Q \frac{\partial H}{\partial H_i} dx dy \\ \frac{\partial \chi_3^e}{\partial H_i} &= \iint_e C \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial H_i} dx dy \\ \frac{\partial \chi_4^e}{\partial H_i} &= \int_{es} q \frac{\partial H}{\partial H_i} dS \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

$$\frac{\partial \chi_2^e}{\partial H^e} = -Q \Delta \cdot \left[-\frac{1}{12} \quad -\frac{1}{12} \quad -\frac{1}{12} \quad -\frac{1}{12} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right]^T \dots (26)$$

これらの式で面積積分は要素 e 内に、また表面積分は e の辺上で q の指定される辺 es に限られる。

まず、2次要素の形状関数 $[N] = [N_1 \ N_2 \dots \ N_8]$ とその要素の8節点の水頭 $\{II\}^e = [H_1 \ H_2 \dots \ H_8]^T$ より要素内の全水頭 H は、

$$H = [N]\{H\}^e \dots (20)$$

である。ここで、全体座標系 (x, y) 、自然(局所)座標系 (ξ, η) のもとに次式で定義されるマトリックス $[B]$:

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial \xi & \partial N_2 / \partial \xi & \dots & \partial N_i / \partial \xi & \dots & \partial N_8 / \partial \xi \\ \partial N_1 / \partial \eta & \partial N_2 / \partial \eta & \dots & \partial N_i / \partial \eta & \dots & \partial N_8 / \partial \eta \end{bmatrix} \dots (21)$$

を持ち込むと、前述の応力-変形解析で述べた浸透力の増分を求めるとき利用される要素内の動水勾配は、

$$\left[\frac{\partial II}{\partial x} \quad \frac{\partial H}{\partial y} \right]^T = [J]^{-1} [B] \{H\}^e \dots (22)$$

となる。ここに、 $[J]^{-1}$ はヤコビアンマトリックス $[J]$ の逆マトリックスである。

a) $\frac{\partial \chi_1^e}{\partial H_i}$ について

式(18)、(19)の表示はいずれも全体座標系で記述されたものであるから、これらを自然座標系に変数変換せねばならない。いま、任意要素 e の $\partial \chi_1^e / \partial H_i$ への寄与を一括して次のようにマトリックス表示すると、

$$\frac{\partial \chi_1^e}{\partial H^e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1^e}{\partial H_1} & \frac{\partial \chi_1^e}{\partial H_2} & \dots & \frac{\partial \chi_1^e}{\partial H_8} \end{bmatrix}^T \dots (23)$$

その結果は次式に到達する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi_1^e}{\partial H^e} &= [h]^e \{H\}^e \\ [h]^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [BJ]^T [R] [BJ] \det [J] d\xi d\eta \\ [BJ] &= [J]^{-1} [B]; [R] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

ここに、 $[h]^e$ は要素の浸透性行列である。

b) $\frac{\partial \chi_2^e}{\partial H_i}$ について

先と同様、要素 e の $\partial \chi_2^e / \partial H_i$ への寄与を一括して $\partial \chi_2^e / \partial H^e$ と表わすと、 $\partial H / \partial H_i = N_i$ であるから次式を得る。

$$\frac{\partial \chi_2^e}{\partial H^e} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T Q \det [J] d\xi d\eta \dots (25)$$

ここで、もし Q が要素内で一定であると仮定できれば、この値は次式となる。

ここに、 Δ はその要素の面積である。しかし目下の場合、 Q は式(12)にみられるように多次元圧密の本質ともいべき平均全応力の時間推移を表わしており、要素内で一定と仮定することは好ましくない。すなわち Q も ξ, η の関数とみて式(25)を数値積分する際、各 Gauss Point に応じた Q の値を代入するのである。このためには別途になされる式(10)の応力-変形解析の結果、要素ごとに各 Gauss Point での全応力を記憶しておかなければならない。なお、式(25)の数値積分次数としては、種々試行ののち、 2×2 Gauss rule で十分であることを確かめている。

c) $\frac{\partial \chi_3^e}{\partial H_i}$ について

式(20)から $\partial H / \partial t = [N] \{ \partial H / \partial t \}^e$ となるので、この場合も $\partial \chi_3^e / \partial H^e$ を作ると次式を得る。

$$\frac{\partial \chi_3^e}{\partial H^e} = \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C [N]^T [N] \det [J] d\xi d\eta \right] \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\}^e = [p]^e \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\}^e \dots (27)$$

ここに、

$$[p]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & N_1 N_5 & N_1 N_6 & N_1 N_7 & N_1 N_8 \\ & N_2^2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & N_2 N_5 & N_2 N_6 & N_2 N_7 & N_2 N_8 \\ & & N_3^2 & N_3 N_4 & N_3 N_5 & N_3 N_6 & N_3 N_7 & N_3 N_8 \\ & & & N_4^2 & N_4 N_5 & N_4 N_6 & N_4 N_7 & N_4 N_8 \\ & & & & N_5^2 & N_5 N_6 & N_5 N_7 & N_5 N_8 \\ & & & & & N_6^2 & N_6 N_7 & N_6 N_8 \\ & & & & & & N_7^2 & N_7 N_8 \\ & & & & & & & N_8^2 \end{bmatrix} \cdot \det [J] d\xi d\eta \dots (28)$$

上式のマトリックス $[p]^e$ は弾性定数より構成される C を含む意味で材料特性行列と名づけている。なお、2次要素の場合、このマトリックスの数値積分には 3×3 Gauss rule を適用せねばならない¹⁴⁾。

d) $\frac{\partial \chi_4^e}{\partial H_i}$ について

$$\frac{\partial \chi_4^e}{\partial H^e} = \int_{es} [N]^T q dS \dots (29)$$

において、辺 es 上で q が任意の分布をしているときは適当な次数の数値積分が必要である。しかし、 q が辺上で直線分布しているときは容易に積分できる。ただし、その結果は1次要素の場合のように直感による節点への分配とはかなり異なる点注意を要す。

以上の結果をすべての要素にわたって重ね合わせる

と、最終的に次式で表わされる多元連立方程式を得る。

$$[K]\{U\} + [P]\left\{\frac{\partial H}{\partial t}\right\} + \{F\} = 0 \dots\dots\dots(30)$$

そしてこの式を時間に関して差分化し、逐次積分によって微小な時間増分ごとの解を求めるのである。

4. 外力増分の評価

この解析法は、応力-変形解析は無論のこと、非定常浸透解析も現在普通にとり行われている手法を応用する以外、なんら目新しい理論を持ち込むことなく圧密現象を記述するところが大きい特徴である。こうした非連成解析を可能としたのが浸透力の概念であり、その基本的役割はすでに概説したとおりである。ただ、この方法を具体的問題に適用するにあたっては、細部において注意すべき点が少ない。その一例が非定常浸透解析の定式化と関連して遭遇した全応力の変化項 Q の取扱いであったり。ここでは応力-変形解析を遂行するうえで注意すべき各タイムステップごとの荷重増分の評価方法を説明しておきたい。

前論文で、片面排水の1次元場を例にあげ、本解析法の基本概念を説明し、粘土骨格が受ける外力増分は相隣る2つの時刻における浸透力の差で与えられることが明らかとなった。しかしこれはあくまでも一般論であって、圧密の全過程を通じて常に浸透力の差だけを外力増分として応力-変形解析を行えばよいというわけではない。すなわち、粘土層が載荷面を透水性とする上載荷重を受け、圧密過程に入った直後の最初のタイムステップ Δt_i 時の外力増分の評価と、いま1つは載荷面自体が不透水性である場合の外力増分の評価は特に注意が肝要である。以下この様子を説明するため局部荷重を受ける2次元粘土層を考える。また簡単のため荷重は等分布であるとする。

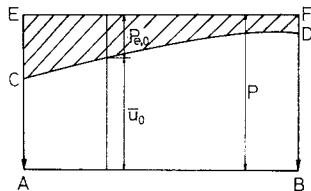


図-7 載荷面上の初期有効分布荷重

図-7の模式図において \overline{AB} は荷重載荷面(透水性)、 \overline{EF} は分布荷重強度 p を表わす。曲線 \widehat{CD} は載荷面 \overline{AB} 上に発生している載荷直後の初期間隙水圧分布 \bar{u}_0 を示している。通常の1次元問題では曲線 \widehat{CD} が \overline{EF} に一致することはいうまでもない。ところが、局部荷重の2次元問題では一般に \overline{AB} 上の初期間隙水圧は荷重強度に比して小さくなる。このような概況のもとに、載荷直後の初期状態で粘土骨格が被っている有効外力 F_0 を考える。

まず、非排水状態下の粘土骨格は初期間隙水圧勾配に

等しい物体力を受けている¹²⁾。この影響を X_0 なるベクトルで表示しておく。一方、荷重載荷面では載荷重と初期間隙水圧の差で定義される有効分布荷重が働いている。すなわち、

$$p_{e,0} = p - \bar{u}_0 \dots\dots\dots(31)$$

である。ここに、 p : 上載荷重ベクトル、 \bar{u}_0 : 載荷面上の初期間隙水圧ベクトル、 $p_{e,0}$: 初期有効分布荷重ベクトルであって、図-7の斜線部がこれに相当する。

以上から F_0 は結局次のように式示できる。

$$F_0 = p_{e,0} + X_0 = p - \bar{u}_0 + X_0 \dots\dots\dots(32)$$

そして最初のタイムステップ Δt_i 経過後、粘土骨格に作用する有効外力 $F_{\Delta t_i}$ はそのときの浸透力の影響 $X_{\Delta t_i}$ と分布荷重の影響 p である。

$$F_{\Delta t_i} = p + X_{\Delta t_i} \dots\dots\dots(33)$$

ゆえに、この間に粘土骨格が被った外力変化 $\Delta F_{\Delta t_i}$ は、

$$\Delta F_{\Delta t_i} = F_{\Delta t_i} - F_0 = X_{\Delta t_i} - X_0 + \bar{u}_0 \dots\dots\dots(34)$$

となる。すなわち載荷面が透水性の場合、圧密過程で最初のタイムステップ時の応力-変形解析は、時刻 $t = \Delta t_i$ の浸透力と初期間隙水圧勾配に起因した物体力の差で与えられる外力増分(物体力)、および載荷面上の初期間隙水圧分布に等価な分布荷重のもとに行わねばならない。この点が、浸透力の増分だけを外力増分とすればよい他のタイムステップ時と大いに異なる点であり、また注意を要する点でもある。

次に載荷面自体が不透水性である場合と同様な考察を行う。上述した載荷面が透水性の場合との顕著な相違点はこの面上の間隙水圧の挙動にみられる。すなわち載荷面が透水性であれば圧密過程に移行した瞬間からこの面上の間隙水圧は零になるのに反し、不透水性の場合は必ずしも零とはならず、依然としてこの面上の間隙水圧が残存することである。この様子を図-8に示した。

図において、先と同様 \overline{AB} は載荷面(不透水面)、 \overline{EF} は分布荷重強度を表わす。また曲線 $\widehat{C_t - \Delta t}$ 、 $\widehat{C_t D_t}$ はそれぞれ時刻 $t - \Delta t$ および t における載荷面上の間隙水圧分布 $\bar{u}_{t - \Delta t}$ 、 \bar{u}_t を示している。もし載荷面が透水性であれば載荷直後 ($t=0$) を除いて \bar{u}_t などは零となる。

いま、時刻 $t - \Delta t$ でこの系の粘土骨格に作用している有効外力を調べると、1つはこれまでに議論してきた浸

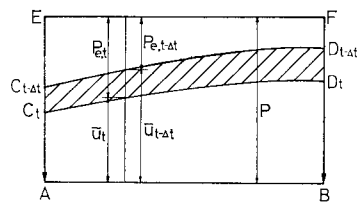


図-8 載荷面上の有効分布荷重増分

透力 X_{t-dt} である。他の1つは \overline{AB} 上に働く載荷重と時刻 $t-dt$ の間隙水圧 \bar{u}_{t-dt} の差で定義される有効分布荷重 $p_{e,t-dt}$ である。同様に時刻 t では X_t と $p_{e,t}$ なる外力が作用する。ここに、

$$p_{e,t-dt} = p - \bar{u}_{t-dt}, \quad p_{e,t} = p - \bar{u}_t \dots\dots\dots (35)$$

である。したがって dt 間にこの系が被る有効外力増分は、

$$\begin{aligned} \Delta F &= X_t - X_{t-dt} + (p_{e,t} - p_{e,t-dt}) \\ &= X_t - X_{t-dt} + (\bar{u}_{t-dt} - \bar{u}_t) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる。上式右辺括弧内は図の斜線部に相当する分布荷重を意味している。すなわち、この場合は相隣る2つの時刻における浸透力の差で与えられる物体力と、さらに載荷面での間隙水圧の差に等価な分布荷重のもとに応力-変形解析を行うことになる。

以上2つのケースに区別してタイムステップごとの応力-変形解析に必要な荷重増分の評価法を考察した。しかし結局はこれらいずれのケースも式(36)に包含されているわけであって、具体的なプログラムを作成するうえで特別煩雑な作業を伴うものではない。

ところで、先に式(15)右辺第2項の分布荷重項は2次要素の場合、特別な注意が必要であると述べた。その事情を式(34)ないし式(36)に基づいて説明しよう。式(15)の $\{\bar{T}\} = [\bar{T}_x \ \bar{T}_y]^T$ は分布荷重成分であって、通常は入力データとして前もって与えられる性質のものである。しかし目下の問題では式(34)や(36)ないし図-7, 8で説明したように、 $\{\bar{T}\}$ は圧密荷重のものではなく載荷面上で相隣る2つの時刻における間隙水圧の差として規定される分布荷重を意味するものである。いま、式(15)右辺第2項の積分を $\{Q_s\}$ なる記号で表わし、一例として任意要素の $\eta = \text{一定} (+1 \text{ or } -1)$ なる辺上で $\{Q_s\}$ を求めるものとするれば、次式の関係が成り立つ。

$$\{Q_s\} = \int_{-1}^1 [N]^T \left\{ \begin{matrix} \bar{T}_x \\ \bar{T}_y \end{matrix} \right\} \frac{l}{2} d\xi \dots\dots\dots (37)$$

ここに、 l は問題としている辺の全体座標系での長さ。そしてその辺上で間隙水圧の分布も自然座標系の関数とみて、上式を数値積分する際、各 Gauss Point に応じた \bar{T}_x, \bar{T}_y つまり式(34)や(36)の間隙水圧(の差)の値を代入しなければならない。この場合、数値積分次数としては3点積分を採用すれば十分である。

最後に、式(34)や(36)右辺の物体力項が先の式(15)右辺第1項に相当している点に注意しておこう。

5. 解析例

前論文⁴⁾で Mandel-Cryer 効果を顕著に示す例として取り上げた Christian らの問題、すなわち円柱の軸方

向変位を拘束した放射流れの問題、へ適用した結果を示す。なお、これ以外のいくつかの解析例については参考文献12)を参照されたい。

図-9に2次要素による要素分割および物性値を示した。まず、図-10は円柱の中心(節点1)での間隙水圧の経時変化を理論解と対比させたものである。さらに図-11は理論解および Christian らの数値解と比較したもので、上方にある曲線は図-10で与えられる中心点の間隙水圧を対数目盛で時間係数に対して、また下方の曲線は円柱表面の半径方向変位を最終変位量に対する割合(ここではこれをとりあえず沈下度とよぶことにする)で示している。

図-10ないし図-11の間隙水圧は理論解とほとんど一致しており、1次要素で計算された前論文図-13, 14と比較しても2次要素の効果は明瞭である。ところが沈下度の時間推移に関しては1次要素、2次要素の結果にほとんど差異は認められない。すなわち、Christian ら²⁾によれば、図-11下方の一点破線で表わされる沈

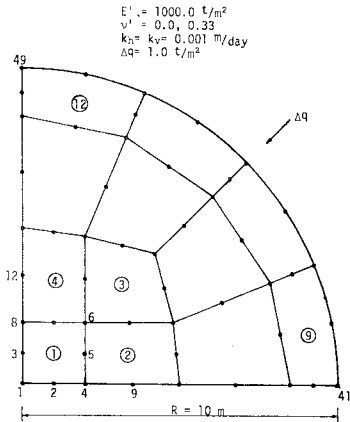


図-9 2次要素による要素分割 (Christian らの問題)

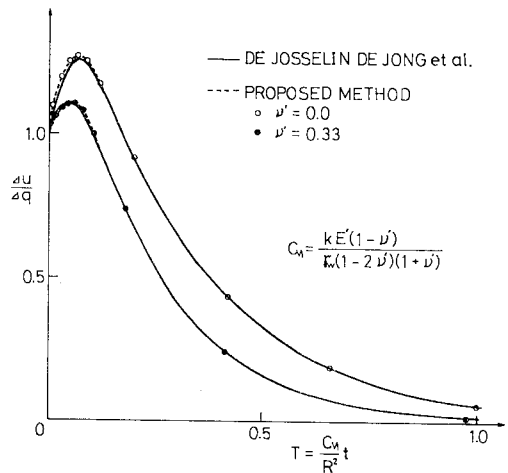
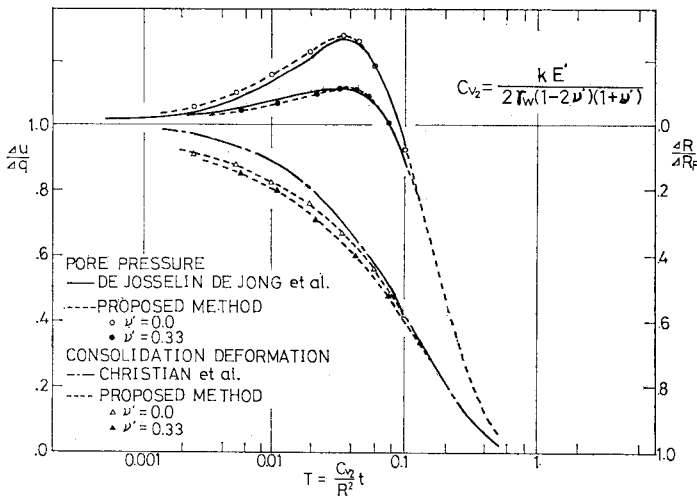
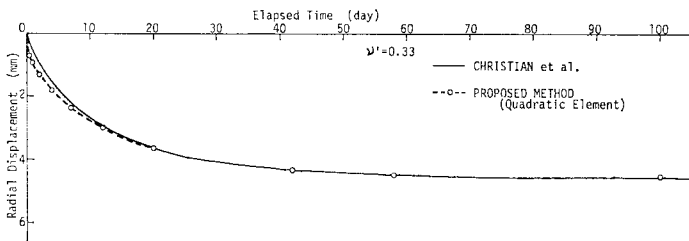


図-10 時間係数-間隙水圧曲線



図—11 時間係数-間隙水圧・沈下度曲線



図—12 時間-半径方向変位曲線

下度曲線は、この問題の場合、Poisson 比の値にかかわりなく 1本の曲線と与えられることになるが、著者らの解析では Poisson 比 0.0 と 0.33 でいくぶん異なった様相を示しており、しかも 1 次要素の結果同様 Christian らのそれとは圧密の前半部で見かけ上かなり異なっている。この様子をもう少し詳しく調べるため描いたのが 図—12 である。この図は表面の半径方向変位の絶対値を経過日数に対してプロットしたもので、縦軸、横軸いずれも算術目盛が採用されている。この問題の最終変位量は弾性論により簡単に計算できて、 $\nu' = 0.33$ のときその値は 0.4522 cm となる。図—12 で Christian らの変位曲線は最終変位量が厳密値に等しいものとして 図—11 を利用して描いた。一方、本解析法で圧密が十分完了していると思われる経過日数 170 日目の最終変位量は 0.4516 cm であった。最終変位量が厳密解とほとんど一致しているにもかかわらず、図—11 にみられるように圧密の初期の部分で本法による変位が大きくなる現象は、1 次要素においても経験されたところであるが、目下のところその原因は明らかでない。ことに 2 次要素の場合、間隙水圧が厳密解とほとんど一致している事実、および最終変位もまた厳密値にほぼ等しくなる点が原因の究明を一段と困難にしている。この解析法の原

理からして、間隙水圧が精度の高いものであれば当然変位も高精度の解が期待されるからである。しかしながら、図—12 の全体像は Christian らと大差なく、実用上の意義が損なわれるものではないと考えている。なお、ここには提示されていないが、本手法を他のいくつかの問題に適用した結果、次のような結論を得ている。

すなわち、2 次元問題において理論解の明らかな問題や Biot 系列の数値解と比べると、粘土層の変形挙動と間隙水圧の消散過程のどちらかは非常によく一致するが、他の量は圧密初期においていくぶんずれが認められる。上記の解析例では間隙水圧がよく一致した例である。しかし、問題によっては逆に変位解がよく一致し、間隙水圧にずれがみられる場合もある。

この事情は 1 次要素と 2 次要素の比較にもあてはまり、2 次要素による場合変位と間隙水圧のいずれかは非常によく改良されるが、他の量は当初予期していたほどの精度の向上はみられなかった。

6. 結 言

著者らは先に圧密現象を構成する 2 つの要素、つまり粘土骨格の変形性状と間隙水圧の消散過程を独立に解析するいわゆる非連成解法を提案した。しかし紙面の制約上、この解法を適用するうえできわめて重要な位置を占める 2, 3 の概念の説明を省略せざるを得なかった。本文ではこうした前論文の欠落部を補う目的で、はじめに飽和粘土の載荷直後の非排水挙動を簡便に全応力解析する手法を要約し、その適用例を示した。ついで、精度の向上を図る目的で導入された 2 次要素による定式化の概要を述べた。さらに、応力-変形解析を行う際注意すべき各タイムステップごとの荷重増分の評価法に触れ、最後に、この 2 次要素による解析例を示した。以下、本文で議論した要点および得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 飽和粘土を弾性体と仮定するとき、その非排水挙動の解析において、剛性行列の数値積分に低減積分を採用するならば、全応力解析といえども従来指摘されていた問題点を解消し、高精度の応力や間隙水圧を与える。

(2) 2次アイソパラメトリック要素の 2×2 Gauss Points で評価された応力から、本文式(9)に基づき節点間隙水圧が簡便かつ高精度で決定できる。

(3) 圧密解析に関連ある基礎式を要約し、これをもとに2次要素による定式化の概要を述べ、特に数値積分を実行する際注意すべき要点とそれに必要な積分次数を明記した。

(4) 圧密過程のうち、粘土骨格の変形性状を解析するうえで注意すべき各タイムステップごとの荷重増分の評価法を考察した。その結論は本文式(36)に集約されている。

(5) 2次要素による解析例を提示し、他の厳密な意味での数値解や理論解との比較、さらには1次要素と2次要素の対比を通じて本解析法の位置づけを行った。その結論は本文5. 解析例の最後に要約されている。

謝 辞：著者の一人(山上)は本論文のみならず、研究の全般にわたって京都大学教授 赤井浩一先生にご指導賜わっている。ここに記して厚く御礼申し上げます。また、本研究遂行中種々ご援助いただいた中電技術コンサルタント 河野 護氏(元 徳島大学大学院生)および徳島大学堀田政國助手に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Sandhu, R.S. and E.L. Wilson : Finite-Element Analysis of Seepage in Elastic Media, Proc. ASCE., Vol. 95, EM 3, pp. 641~652, 1969.
- 2) Christian, J.T. and J.W. Boehmer : Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. ASCE., Vol. 96, SM 4, pp. 1435~1457, 1970.
- 3) 赤井浩一・田村 武：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 第269号, pp. 95~104, 1978.
- 4) 山上拓男・植田康宏：有限要素法による圧密現象の一解法, 土木学会論文報告集, 第302号, pp. 79~90, 1980.
- 5) Huang, Y.H. : Finite Element Analysis of Nonlinear Soil Media, Proc. Symp. on Appl. FEM. in Civil Eng., Nashville, pp. 663~690, 1969.
- 6) Naylor, D.J. : Stresses in Nearly Incompressible Materials by Finite Elements with Application to the Calculation of Excess Pore Pressures, Int. Jour. Nume. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 443~460, 1974.
- 7) Hinton, E. and J.S. Campbell : Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method, Int. Jour. Nume. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 461~480, 1974.
- 8) Hinton, E., F.C. Scott and R.E. Ricketts : Local Least Squares Stress Smoothing for Parabolic Isoparametric Elements, Int. Jour. Nume. Meth. Eng. Vol. 9, pp. 235~238, 1975.
- 9) Zienkiewicz, O.C. and E. Hinton : Reduced Integration, Function Smoothing and Non-Conformity in Finite Element Analysis (with Special Reference to Thick Plates), Jour. Franklin Inst., Vol. 302, pp. 443~461, 1976.
- 10) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method (Third Edition), McGraw-Hill, pp. 178~210, pp. 268~303, 1977.
- 11) Barlow, J. : Optimal Stress Locations in Finite Element Models, Int. Jour. Nume. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 243~251, 1976.
- 12) 山上拓男：浸透および圧密問題の数値解析に関する研究, 京都大学博士学位申請論文, 昭和55年2月。
- 13) C.S. デサイ・J.F. アーベル(山本善之訳)：マトリックス有限要素法, 科学技術出版社, 1974.
- 14) Segerling, L.J. : Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, pp. 257~333, 1976 (川井忠彦監訳：応用有限要素解析, 丸善, 昭和53年)。

(1980.9.22・受付)