

不規則な分布荷重を受けるはりの解析

STATICS OF BEAMS WITH STOCHASTIC DISTRIBUTED LOAD

岡 林 隆 敏*

By Takatoshi OKABAYASHI

1. はじめに

信頼性理論を適用する設計の観点から、近年、不確定要因を考慮した構造解析に関する研究が進められている¹⁾。特に変動の大きい動的荷重すなわち、地震・風・波浪による構造物の動的解析に対して、荷重を確率過程でモデル化する不規則振動論による方法が確立している²⁾。一方、静的解析においても、さまざまな不確定要因を考慮した解析がなされている³⁾。静的解析の中でも、空間的に変動する諸量すなわち、分布荷重、初期たわみ等を確率過程でモデル化した場合、基礎微分方程式は不規則応答解析の基礎方程式と相似な線形系の方程式で表現できる。このような静的解析のいくつかは、不規則振動論で用いる手法を適用することにより研究されている。不規則な反力係数を有する弾性基礎にある、不規則分布荷重を受けるはり⁴⁾および板⁵⁾の解析では、境界条件の影響が無視できるので、定常応答理論が適用できる。また、Green 関数を用いた非定常応答理論を適用することにより、非定常な初期たわみを有する圧縮部材の解析⁶⁾がなされている。しかし、一般的な静的応答解析は、境界値問題となるために、動的応答解析のような初期値問題と比較して、境界条件の取扱いおよび本質的な非定常性の処理のような困難な問題が発生する。したがって、不規則分布荷重を受けるはりの不規則応答解析のような問題も、いまだに解かれていないように思われる。

著者は、これまで不規則外力を受ける動的系の、分散・共分散応答解析の手法について報告した^{12), 13)}。この手法は次のように要約できる。外力を白色雑音過程から構成される確率過程でモデル化することにより、構造物-外力系は伊藤形の確率微分方程式で記述される。この方程式より誘導される共分散方程式を基礎式とする解

析は、系が複雑な連成をする場合さらには応答が複雑な非定常性を有する場合には、従来の手法すなわち定常理論および Duhamel の積分による手法より有効な手段となる。このような観点から静的解析の問題をみた場合、任意の相関を有する分布荷重を受ける構造系の解析、さらに複雑な構造物の解析に対して、共分散方程式による解法が有効な手段となることが予想される。本研究は、不規則な静的に分布した荷重を受ける構造物の信頼性解析の基礎になる、構造系の静的応答に関する分散・共分散解析の手法を確立することを目的とするものである。任意の相関を有する不規則分布荷重は、白色雑音過程より構成される確率過程よりモデル化できる^{9), 12), 13)}。したがって、白色雑音過程を分布荷重とする系の解析が実現すれば、一般的な荷重に対する理論の拡張は可能になる。また、構造系の解析は伝達マトリックス法を用いているので、単純なはりの解析ができれば、一般的な構造物への本法の拡張は原理的に可能となるものと考えられる。そこで、本論文では、分布荷重を白色雑音過程でモデル化し、構造系をはりに限定した場合、変位および断面力の分散・共分散応答の解析手法を提案する。

不規則分布荷重を白色雑音過程でモデル化すると、はりの変位および断面力を状態変数で表現したはりの状態方程式は、伊藤形の確率微分方程式で記述される。この確率微分方程式を基礎式として、はりの変位および断面力の分散・共分散の空間的变化は、微分方程式の形、すなわち共分散方程式で表現することができた。しかし、この共分散方程式は境界値問題となっており、境界条件と荷重の相関および境界条件の分散・共分散を決定しない限り解くことはできない。本論文では、境界条件に起因する問題は、伝達マトリックス法を不規則応答解析に拡張する理論を構成することにより解決した。本解法では、境界条件の処理は連立方程式の解法に、非定常応答解析は微分方程式の解法に帰着する。

* 正会員 工修 長崎大学助手 工学部土木工学科

数値計算例として、本解法を白色雑音過程でモデル化

した分布荷重を受ける単純ばりと片持ばりに適用した。このような限定された問題について、それぞれの変位および断面力の分散・共分散応答は、閉じ形の解析解として得ることができた。

2. はりの基礎方程式

(1) 状態方程式

はりの基礎方程式を伝達マトリックス法^{7),8)}に基づいて表現すると、線形系として一般的な考察が可能になる。ここでは、これからの記述の便宜のために、伝達マトリックス法の基本事項について簡単に説明する。

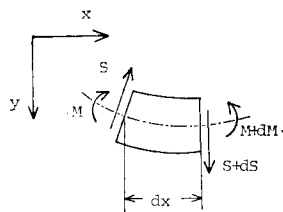


Fig. 1 Forces acting on beam element.

一様断面ばりに分布荷重 $q(x)$ が作用する場合、 x 点のたわみ $w(x)$ 、たわみ角 $\phi(x)$ 、曲げモーメント $M(x)$ およびせん断力 $Q(x)$ は次式で表わされる。

$$\frac{d}{dx}w(x) = \phi(x) \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = -\frac{1}{EI}M(x) \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{d}{dx}M(x) = Q(x) \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{d}{dx}Q(x) = -q(x) \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 $X(x)$ を状態ベクトルと称し、

$$X(x) = [w(x) \ \phi(x) \ M(x) \ Q(x)]^T \dots\dots(5)$$

で定義する。式 (1)~(4) は $X(x)$ を用いて、次のようにベクトル表示される^{7),8)}。

$$\frac{d}{dx}X(x) = AX(x) + F(x) \dots\dots\dots(6)$$

なお、左端と右端の境界条件は、

$$X(0) = X_0, \ X(l) = X_l \dots\dots\dots(7)$$

とする。ここに、係数マトリックス A と外力ベクトル $F(x)$ は次のとおりである。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

$$F(x) = [0 \ 0 \ 0 \ -q(x)]^T \dots\dots\dots(9)$$

式 (6) のような表現によれば、この方程式の解は線形微分方程式の理論より¹⁰⁾、

$$X(x) = e^{Ax}X_0 + \int_0^x e^{A(x-\sigma)}F(\sigma)d\sigma \dots\dots\dots(10)$$

となる。ここに、 e^{Ax} は格間伝達マトリックス (状態遷移行列) であり、マトリックス A が式 (8) で表わされる場合には、次式で与えられるものである。

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & x & -\frac{1}{2EI}x^2 & -\frac{1}{6EI}x^3 \\ 0 & 1 & x & -\frac{1}{2EI}x^2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

このように、伝達マトリックス法による表記に従えば、境界値問題と初期値問題は同じ形式で表現される。

(2) 境界条件と外力の記述

はりの左端と右端の境界条件、 X_0 と X_l を次のようにベクトル表示する。

$$X_0 = [w_0 \ \phi_0 \ M_0 \ Q_0]^T \dots\dots\dots(12)$$

$$X_l = [w_l \ \phi_l \ M_l \ Q_l]^T \dots\dots\dots(13)$$

左端において、それぞれ支点が Fig. 2 で示される回転支点、固定支点および自由端である場合、それぞれの境界条件には次のような自由度がある。

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(14)$$

これを初期ベクトルと称して \tilde{X}_0 で表わすと、左端境界条件は、

$$X_0 = B\tilde{X}_0 \dots\dots\dots(15)$$

で表わされる。ここに、 B は境界マトリックス⁸⁾とよばれるものであり、回転支点、固定支点および自由端の場合、それぞれ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

のようになる。

右端では、Fig. 3 で示されるような移動支点、固定支点および自由端に対して、それぞれ次の量は 0 となる。

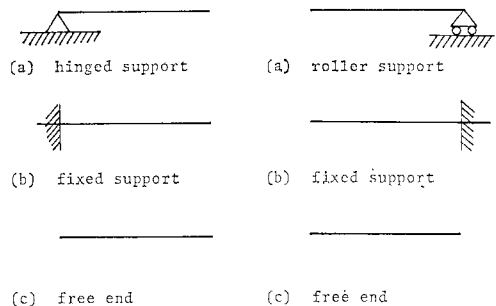


Fig. 2 Left-hand boundary conditions. Fig. 3 Right-hand boundary conditions.

$$\begin{bmatrix} w_l \\ M_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l \\ \phi_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_l \\ Q_l \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

これを終端ベクトルと称して \hat{X}_l で表わすと、右端境界条件は、

$$B'X_l = \hat{X}_l = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となる。ここに、 B' は右端の境界マトリックス⁹⁾であり、移動端、固定端および自由端について、それぞれ次式で表わされるものである。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

次に、外力ベクトルの処理について述べる。外力ベクトル $F(x)$ も境界条件と同じく、要素に 0 を含むベクトルとなっている。外力ベクトル $F(x)$ から 0 の要素を除いたベクトルを $\tilde{F}(x)$ で示し、これを縮小外力ベクトルと称することにする。境界条件の処理と同様に、外力ベクトル $F(x)$ を次式で表わす。

$$F(x) = E\tilde{F}(x) \dots\dots\dots (20)$$

式 (6) の場合、 $\tilde{F}(x)$ および E は次のように表わされる。

$$\tilde{F}(x) = [-q(x)] \dots\dots\dots (21)$$

$$E = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 E を外力抽出マトリックスと称することにする。なお、ここでは、 E はベクトルになっているが、一般的にはマトリックスで表わされるものである。

(3) 荷重のモデル化と応答の統計量

本研究では分布荷重 $q(x)$ として、不規則分布荷重を考えている。この分布荷重を、はりの長さ $0 \leq x \leq l$ で定義される確率過程でモデル化する。一般に確率変数 $F(x)$ は、平均値 $\bar{F}(x)$ とその回りの変動 $\hat{F}(x)$ に分離できて

$$F(x) = \bar{F}(x) + \hat{F}(x) \dots\dots\dots (23)$$

と表わすことができる。ここに、 $\bar{\quad}$ の記号は確率変数 $F(x)$ の平均値 $E[F(x)]$ を表わすものとする。なお、 $E[\quad]$ は集合平均のための演算子である。また、 $\hat{\quad}$ の記号は、平均値回りの変動を表わすものとする。同じく、応答量 $X(x)$ も、次のように平均値とその回りの変動に分離することができる。

$$X(x) = \bar{X}(x) + \hat{X}(x) \dots\dots\dots (24)$$

系が線形であると、平均値 $\bar{X}(x)$ と平均値回りの変動 $\hat{X}(x)$ は、独立に解析できて、それらはそれぞれ次の方程式で表わされる。

(i) 平均値応答

$$\frac{d}{dx} \bar{X}(x) = A\bar{X}(x) + \bar{F}(x) \dots\dots\dots (25)$$

(ii) 平均値回りの変動

$$\frac{d}{dx} \hat{X}(x) = A\hat{X}(x) + \hat{F}(x) \dots\dots\dots (26)$$

ここで、不規則分布荷重を Gauss 確率過程と仮定すると、応答量 $X(x)$ も Gauss 確率過程となり、応答量 $X(x)$ の x 点の確率特性は、平均値 $\bar{X}(x)$ と共分散 $R_X(x)$ により完全に規定される。平均値応答は、通常の構造力学の対象とするところであり、これは容易に解析できる。一方、共分散応答は、

$$R_X(x) = E[\hat{X}(x)\hat{X}(x)^T] \dots\dots\dots (27)$$

で定義される統計量である。本研究の解析の対象は、この共分散応答である。なお、記述の簡略化のために、以後、平均値回りの変動 $\hat{X}(x)$ 、 $\hat{F}(x)$ を記号を略記して、 $X(x)$ 、 $F(x)$ と表わすことにする。

本論文では、不規則分布荷重を受けるはりの解析の可能性の確認と応答の基本的な特性を把握するために、不規則分布荷重のモデルを確率過程の中で最も基本的な特性を有する白色雑音過程に限定した。任意のパワースペクトル密度 (相関関数) を有する一般の確率過程は、白色雑音過程を入力とする一種の成形フィルターである常微分方程式の出力として得ることができる (表現定理)⁹⁾。著者は動的系において、このような観点から外力をモデル化した応答解析を、文献 (12)、(13) において報告した。同じ操作を適用することにより、成形フィルターである荷重系を導入し、構造系と荷重系を改めて 1 つの合成系と考えると、この系は白色雑音過程を入力とする系と相似な形で表わされる。したがって、白色雑音過程による解析が可能になると、任意の確立過程による解析が原理的に可能になる。

3. 不規則応答解析

(1) 共分散方程式の誘導

本章では、単純なはりの問題だけでなく、複雑な構造形式にも拡張可能な一般的な基礎式を誘導する。

一般的な構造系に対しても荷重と応答量との関係は、状態空間表示することにより、2. で示した式 (6) と同じ形の次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} X(x) &= AX(x) + F(x) \\ X(0) &= X_0, \quad X(l) = X_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここで、不規則分布荷重として、より一般的に、平均値 0 の白色雑音過程 $w(t)$ と確定関数である形状関数 $g(x)$ の積、

$$q(x) = g(x)w(x) \dots\dots\dots (29)$$

で表わされる、 $0 \leq x \leq l$ の区間で定義された非定常確

率過程を考える．このような非定常確率過程の確率特性^{10),11)}は，次式で示される．

$$(i) \quad E[\mathbf{F}(x)] = \mathbf{0} \dots\dots\dots (30)$$

$$(ii) \quad E[\mathbf{F}(x_1) \mathbf{F}(x_2)^T] = \mathbf{Q}(x_1) \delta(x_1 - x_2) \dots\dots (31)$$

ここに， $\mathbf{Q}(x)$ は白色雑音過程ベクトル $\mathbf{F}(x)$ の共分散行列，また $\delta(x)$ はDiracのデルタ関数である．外力(荷重)を白色雑音過程ベクトルとした式(28)は，厳密には伊藤形の確率微分方程式で表現されるべきものである¹¹⁾．しかし，本論文では，その形式的表現である式(28)を基礎式とする．

式(28)の解は，2.式(10)で示したように，

$$\mathbf{X}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{X}_0 + \int_0^x e^{\mathbf{A}(x-\sigma)} \mathbf{F}(\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (32)$$

で与えられる．そこで， $\mathbf{X}(x)$ の共分散 $\mathbf{R}_X(x)$ は，共分散の定義式(27)に式(32)を代入し，白色雑音過程の性質式(31)を用いて積分を実行すると，次式となる．

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_X(x) &= e^{\mathbf{A}x} \mathbf{R}_0 e^{\mathbf{A}^T x} + e^{\mathbf{A}x} \int_0^x E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}(\sigma)^T] e^{\mathbf{A}^T(x-\sigma)} d\sigma \\ &\quad + \int_0^x e^{\mathbf{A}(x-\sigma)} E[\mathbf{F}(\sigma) \mathbf{X}_0^T] d\sigma e^{\mathbf{A}^T x} \\ &\quad + \int_0^x e^{\mathbf{A}(x-\sigma)} \mathbf{Q}(\sigma) e^{\mathbf{A}^T(x-\sigma)} d\sigma \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

ここに， \mathbf{R}_0 は左端境界条件の共分散である．しかし，応答量を式(32)，(33)のように表わして，これらを初期値問題と解釈すると， \mathbf{X}_0 ， \mathbf{R}_0 は初期条件となる．したがって，以後左端境界条件 \mathbf{X}_0 ， \mathbf{R}_0 を適宜初期条件と称する．

$\mathbf{X}(x)$ の共分散の空間的变化は，上式の積分を実行することにより得られる．しかし，一般的な問題に対して，上記の積分を直接遂行することは困難な場合が多い．そこで，上式を数値計算に適した微分方程式で表現する．式(33)の両辺を x で微分し，若干の変形を実行すると， $\mathbf{R}_X(x)$ を支配する共分散方程式が得られる(詳細な式の変形は付録I参照)．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbf{R}_X(x) &= \mathbf{A} \mathbf{R}_X(x) + \mathbf{R}_X(x) \mathbf{A}^T + e^{\mathbf{A}x} E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}(x)^T] \\ &\quad + E[\mathbf{F}(x) \mathbf{X}_0^T] e^{\mathbf{A}^T x} + \mathbf{Q}(x), \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_X(0) = \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{R}_X(l) = \mathbf{R}_l \dots\dots\dots (34)$$

式(34)と式(33)の関係は，伝達マトリクス法における式(6)と式(10)の関係に対応している．伝達マトリクス法では，格間伝達行列(状態遷移行列) $e^{\mathbf{A}x}$ によって，状態量 $\mathbf{X}(x)$ が左から右へ伝達される．本解法では，状態量の共分散 $\mathbf{R}_X(x)$ が $e^{\mathbf{A}x}[\]e^{\mathbf{A}^T x}$ の演算子により左から右へ伝達されることになる．

次に式(33)を

$$\mathbf{R}_X(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{R}_0 e^{\mathbf{A}^T x} + \mathbf{P}(x) \dots\dots\dots (35)$$

で表わす．右辺第1項は，初期条件が応答に及ぼす影響を表わす項である．すなわち，これは式(34)において， $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}(x)^T]$ ， $E[\mathbf{F}(x) \mathbf{X}_0^T]$ および $\mathbf{Q}(x)$ を $\mathbf{0}$ とした

とき，初期条件 \mathbf{R}_0 による応答を表わすものである．右辺第2項は，本論文で荷重項と称するもので，式(34)において初期条件 \mathbf{R}_0 を $\mathbf{0}$ としたときの応答を表わしている．

ここで，境界値問題である式(34)を，初期値問題として解くために生ずる困難な点について検討し，問題点を整理する．初期値問題，たとえば非定常な不規則外力を受ける動的系の応答解析等^{12),13)}においても，共分散応答を支配する方程式は式(34)で表わされる．しかし，通常初期条件と外力は統計的に独立となるので，式(34)において， $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}(x)^T]$ および $E[\mathbf{F}(x) \mathbf{X}_0^T]$ に相当する項は $\mathbf{0}$ となる．さらに，初期条件の共分散 \mathbf{R}_0 は既知量となっているので，式(34)の解析は可能である．一方，境界値問題では，一般に境界条件と外力(荷重)が独立でない．また初期条件(左端境界条件)に相当する \mathbf{R}_0 は既知量でなくて，終端条件(右端境界条件)より決定しなければならない．さらに，不規則応答解析の観点からみた場合，境界値問題は外力が定常確率過程であっても，共分散方程式に対して初期条件と外力の相関関数 $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}(x)^T]$ および $E[\mathbf{F}(x) \mathbf{X}_0^T]$ は，非定常な外力として作用する．さらに，応答は無限長のほりでない限り必然的に初期条件の影響を受けた非定常応答となる．すなわち，境界値問題は本質的に非定常問題となっている．このような点が，境界値問題の解析を困難にしている．

したがって，式(34)の共分散方程式を解くためには，次の問題を解決しなければならない．

- ① 初期条件と外力の相関関数 $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}(x)^T]$ および $E[\mathbf{F}(x) \mathbf{X}_0^T]$ の決定
- ② 初期条件の共分散 \mathbf{R}_0 の決定

これらの量が求められると，式(34)は初期値問題となり，共分散応答解析は微分方程式の解析に帰着することになる．

(2) 初期条件と荷重の相関関数

式(32)において $x=l$ として，両辺に右側から $\mathbf{F}(x)^T$ を掛けた後，両辺に平均操作を施す．白色雑音の性質式(31)を用いて積分を実行すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}_l \mathbf{F}(x)^T] &= e^{\mathbf{A}l} E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}(x)^T] \\ &\quad + e^{\mathbf{A}(l-x)} \mathbf{Q}(x) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

この式は，両端の境界条件(初期条件と終端条件)と，任意の点 x における荷重との共分散が満たすべき条件を表わしている．平均値0の確率過程では，共分散と相関関数の定義は一致する．以後，境界条件(初期条件と終端条件)と荷重の関係については，相関関数という表現を用いる．

解析に必要なものは，初期条件の中で0以外の要素よ

り構成される初期ベクトル \tilde{X}_0 と荷重の相関関数 (共分散) である. これを得るために, 2. (2) で示した境界マトリックス B, B' , 縮小外力ベクトル \tilde{F} および外力抽出マトリックス E を用いて式 (36) を変形する.

$$B'E[\tilde{X}_l\tilde{F}(x)^T]E^T = B'e^{Al}BE[\tilde{X}_0\tilde{F}(x)^T]E^T + B'e^{A(x-l)}E\tilde{Q}(x)E^T \dots\dots\dots (37)$$

ここに, $\tilde{Q}(x)$ は,

$$E[\tilde{F}(x_1)\tilde{F}(x_2)^T] = \tilde{Q}(x_1)\delta(x_1-x_2) \dots\dots\dots (38)$$

で定義される縮小外力ベクトル $\tilde{F}(x)$ の共分散行列である. 式 (18) より終端ベクトル \tilde{X}_l は 0 であるから

$$E[\tilde{X}_l\tilde{F}(x)^T] = 0 \dots\dots\dots (39)$$

となる. したがって, 初期ベクトルと荷重の相関関数は, 次式より求められる.

$$B'e^{Al}BE[\tilde{X}_0\tilde{F}(x)^T] + B'e^{A(x-l)}E\tilde{Q} = 0 \dots\dots\dots (40)$$

この方程式は, 要素に分解すると連立方程式の形になっている. 解析的な解を求めることが困難な一般的な問題については, 数値計算による解析が可能である.

さらに, $E[F(x)X_0^T]$ は,

$$E[F(x)X_0^T] = E[X_0F(x)^T]^T \dots\dots\dots (41)$$

の関係より得られる.

(3) 初期条件に関する共分散の決定

初期条件の共分散は, 左端と右端の境界条件より決定する. 式 (35) において, $x=l$ とすると, これは次のように表わされる.

$$R_l = e^{Al}R_0e^{A^Tl} + P(l) \dots\dots\dots (42)$$

式 (40) において, 初期条件と荷重の相関関数 $E[X_0F(x)^T]$ および $E[F(x)X_0^T]$ は求められるので, 初期条件 R_0 を 0 とした式 (34) より荷重項 $P(x)$ の解析は可能になる. しかし, 一般には, 式 (34) を解析的に直接解くことは容易ではない. 解析的な解を得ることが困難であれば, Runge-Kutta-Gill 法等の数値解析の手法が有効性を発揮する.

このようにして, $P(l)$ が求められるものとして, 式 (42) を解析に適した連立方程式の形に変形する. この処理は, 3. (2) で示した操作による. すなわち, 式 (42) の両辺に, 左から B' を, 右から B'^T を掛けると, 次式を得る.

$$B'R_lB'^T = B'e^{Al}BR_0(B'e^{Al}B)^T + B'P(l)B'^T \dots\dots\dots (43)$$

式 (18) より終端ベクトル \tilde{X}_e は 0 であるから

$$\begin{bmatrix} E[w(x)^2] \\ E[\phi(x)w(x)] & E[\phi(x)^2] \\ E[M(x)w(x)] & E[M(x)\phi(x)] & E[M(x)^2] \\ E[Q(x)w(x)] & E[Q(x)\phi(x)] & E[Q(x)M(x)] & E[Q(x)^2] \end{bmatrix} \text{(sym.)} = \begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ m_{21} & m_{22} & & \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \text{(sym.)} \dots\dots\dots (48)$$

$$B'R_lB'^T = \tilde{R}_l = 0 \dots\dots\dots (44)$$

となる. ここに, \tilde{R}_0 および \tilde{R}_l は次式で定義される初期ベクトルおよび終端ベクトルの共分散である.

$$\tilde{R}_0 = E[\tilde{X}_0\tilde{X}_0^T], \tilde{R}_l = E[\tilde{X}_l\tilde{X}_l^T] \dots\dots\dots (45)$$

ゆえに, 式 (43) は,

$$B'e^{Al}B\tilde{R}_0(B'e^{Al}B)^T + B'P(l)B'^T = 0 \dots\dots\dots (46)$$

となる. この式は, 要素に分解することにより, 連立方程式の形に変形することができる. \tilde{R}_0 が得られると, R_0 は,

$$R_0 = B\tilde{R}_0B^T \dots\dots\dots (47)$$

より再構成できる.

本章で示した処理, すなわち式 (40) および式 (46) により, 式 (34) の共分散方程式の解析は可能になる. 以上の定式化は, 連立方程式と微分方程式で表現している. したがって, 複雑な問題に対して数値解析が適用できるために, 本解法はより一般的な解析にも有効である.

4. 解析例と考察

(1) 共分散方程式と一般解

解析モデルとして, Fig. 4 に示したような不規則分布荷重を受ける単純ばりと片持ばりを考える. 不規則分布荷重モデルは, $0 \leq x \leq l$ で定義される平均値 0 , パワースペクトル密度 S を有する定常白色雑音過程である. 2. (3) で述べたように, 解析例では平均値回りの変動のみに着目する.

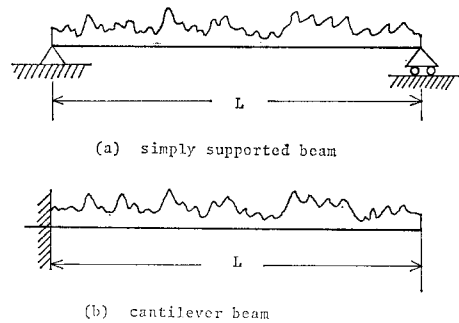


Fig. 4 Beams with randomly distributed load.

はりの x 点の変位と断面力の共分散 $R_X(x)$ の要素を, 記述の簡略化のために, 次のように表わす. なお, 共分散行列は定義より対称行列である.

このような表記を用いた式 (34) の共分散方程式は、要素に展開して表わすと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{11} &= 2 m_{21} \\ \dot{m}_{21} &= -m_{31}/EI + m_{22} \\ \dot{m}_{31} &= m_{41} + m_{32} \\ \dot{m}_{41} &= m_{42} - E[w_0 q(x)] - E[\phi_0 q(x)]x \\ &\quad + E[M_0 q(x)]x^2/2 EI \\ &\quad + E[Q_0 q(x)]x^3/6 EI \\ \dot{m}_{22} &= -m_{32}/EI \\ \dot{m}_{32} &= m_{42} - m_{33}/EI \\ \dot{m}_{42} &= -m_{43}/EI - E[\phi_0 q(x)] \\ &\quad + E[M_0 q(x)]x/EI \\ &\quad + E[Q_0 q(x)]x^2/2 EI \\ \dot{m}_{33} &= 2 m_{43} \\ \dot{m}_{43} &= m_{44} - E[M_0 q(x)] - E[Q_0 q(x)]x \\ \dot{m}_{44} &= S - 2 E[Q_0 q(x)] \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

この微分方程式において初期条件をすべて 0 とした応答、すなわち荷重項は、解析的に解くことができる。この一般解を付録 2 に示した。

(2) 初期条件と荷重の相関関数

初期条件と荷重の相関関数は、式 (40) で与えられる。式の記述を簡略化するために、 $eA l$ および $eA(l-x)$ の要素を次のように表わす。

$$eA l = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ \mathbf{0} & & & a_{44} \end{bmatrix} \dots (50)$$

$$eA(l-x) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ & & b_{33} & b_{34} \\ \mathbf{0} & & & b_{44} \end{bmatrix} \dots (51)$$

a) 単純ばりの場合

単純ばりでは、式 (40) は次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ 0 & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[\phi_0 q(x)] \\ E[Q_0 q(x)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{34} \end{bmatrix} S \dots (52)$$

これより、次の結果を得る。

$$E[\phi_0 q(x)] = \frac{Sl^2}{6EI} \xi (2 - 3\xi + \xi^2) \dots (53)$$

$$E[Q_0 q(x)] = S(1 - \xi) \dots (54)$$

ここに、 $\xi = x/l$ である。

Fig. 5 の (a) および (b) に、 $E[\phi_0 q(x)]$ と $E[Q_0 q(x)]$ を図示した。 $E[\phi_0 q(x)]$ すなわち、左端たわみ角と x 点の荷重の相関関数は、両端で 0 となり、 $x = (3 - \sqrt{3})l/\sqrt{3}$ の点で最大値 $Sl^2/9\sqrt{3}EI$ となることがわかる。

b) 片持ばりの場合

式 (40) は次式のようになる。

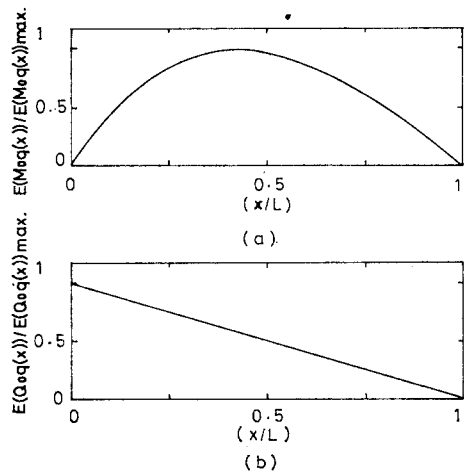


Fig. 5 Correlation function for simply supported beam; (a) deflection angle and load, (b) shearing force and load.

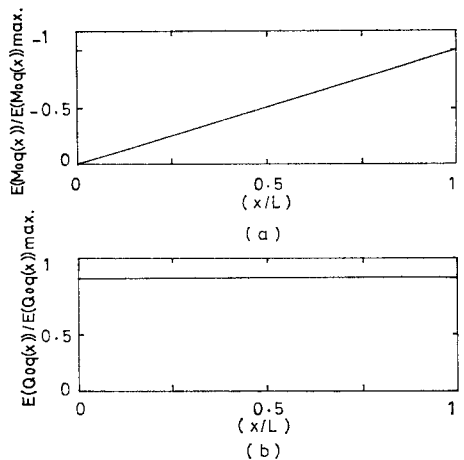


Fig. 6 Correlation function for cantilever beam; (a) bending moment and load, (b) shearing force and load.

$$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[M_0 q(x)] \\ E[Q_0 q(x)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{34} \\ b_{44} \end{bmatrix} S \dots (55)$$

上式より次の結果を得る。

$$E[M_0 q(x)] = -Sl\xi \dots (56)$$

$$E[Q_0 q(x)] = S \dots (57)$$

Fig. 6 の (a) および (b) に、 $E[M_0 q(x)]$ と $E[Q_0 q(x)]$ を図示した。

(3) 荷重項の計算

荷重項の一般解は付録 2 に示した。単純ばりおよび片持ばりに対する荷重項は、4. (2) で求めたそれぞれの相関関数を付録 2 の式 (B-1) から式 (B-10) の各式に代入し、積分を実行することにより得られる。このようにして求められた荷重項を式の簡略化のために、次のよう

に定義する.

$$P(x) = \begin{bmatrix} P_{11} & & & \\ P_{21} & P_{22} & & \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (58)$$

(4) 境界条件の決定

荷重項が計算できると、式 (46) より初期条件の共分散 R_0 が決定できる.

a) 単純ばりの場合

初期条件の共分散と外力項との関係を表わした式(46)は、式 (50) と式 (58) の記号を用いて表わすと、次のようになる.

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ 0 & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[\phi_0^2] & E[\phi_0 Q_0] \\ E[Q_0 \phi_0] & E[Q_0^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{34} & a_{34} \end{bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{13} \\ P_{31} & P_{33} \end{bmatrix}_{x=l} \dots\dots\dots (59)$$

ここで、右辺の添字 $x=l$ は、 $P(l)$ の要素を示すものとする. これより、初期条件の共分散は、

$$\left. \begin{aligned} E[\phi_0^2] &= \frac{2 SI^5}{945 E^2 I^2} \\ E[\phi_0 Q_0] &= \frac{SI^3}{45 EI} \\ E[Q_0^2] &= \frac{SI}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

となる.

b) 片持ばりの場合

式 (46) は、次のように表わされる.

$$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[M_0^2] & E[M_0 Q_0] \\ E[Q_0 M_0] & E[Q_0^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} P_{33} & P_{34} \\ P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}_{x=l} \dots\dots\dots (61)$$

これより、初期条件の共分散は、

$$\left. \begin{aligned} E[M_0^2] &= \frac{SI^3}{3} \\ E[M_0 Q_0] &= -\frac{SI^2}{2} \\ E[Q_0^2] &= SI \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

となる.

(5) 変位および断面力の分散・共分散応答

荷重項の計算 4.(3) と境界条件の共分散 4.(4) が決定されると、式 (35) より変位および断面力の分散・共分散応答が求められる. 不規則分布荷重を白色雑音過程でモデル化した場合、分散・共分散応答は閉じた形の解析解として求められる.

a) 単純ばりの場合

分散・共分散応答は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} E[w(x)^2] &= \frac{SI^7}{945 E^2 I^2} \xi^2 (2-7 \xi^2) \\ &\quad + 14 \xi^4 - 12 \xi^5 + 3 \xi^6 \\ E[w(x) \phi(x)] &= \frac{2 SI^6}{945 E^2 I^2} \xi (1-7 \xi^2) \\ &\quad + 21 \xi^4 - 21 \xi^5 + 6 \xi^6 \\ E[w(x) M(x)] &= \frac{SI^5}{45 EI} \xi^2 (1-5 \xi^2) \\ &\quad + 6 \xi^3 - 2 \xi^4 \\ E[w(x) Q(x)] &= \frac{SI^4}{45 EI} \xi (1-10 \xi^2) \\ &\quad + 15 \xi^3 - 6 \xi^4 \\ E[\phi(x)^2] &= \frac{SI^5}{945 E^2 I^2} (2-21 \xi^2) \\ &\quad + 105 \xi^4 - 126 \xi^5 + 42 \xi^6 \\ E[\phi(x) M(x)] &= \frac{SI^4}{45 EI} \xi (1-10 \xi^2) \\ &\quad + 15 \xi^3 - 6 \xi^4 \\ E[\phi(x) Q(x)] &= \frac{SI^3}{45 EI} (1-15 \xi^2) \\ &\quad + 30 \xi^3 - 15 \xi^4 \\ E[M(x)^2] &= \frac{SI^3}{3} \xi^2 (1-\xi)^2 \\ E[M(x) Q(x)] &= \frac{SI^2}{3} \xi (1-3 \xi + 2 \xi^2) \\ E[Q(x)^2] &= \frac{SI}{3} (1-3 \xi + 3 \xi^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

Fig. 7 は、たわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力の r.m.s. (root mean square) 応答を、等分布荷重によるそれぞれの最大値 \bar{w}_{max} , $\bar{\phi}_{max}$, \bar{M}_{max} および \bar{Q}_{max} で基準化した値で示したものである. すなわちそれぞれ、 \bar{w}_{max} , $\bar{\phi}_{max}$, \bar{M}_{max} および \bar{Q}_{max} に対する変動を表わしている.

なお、ここでは、不規則分布荷重のパワースペクトル密度 S は、等分布荷重の荷重強度 p により、 $S/l = p^2$ のように基準化している.

Fig. 7 (a), (c) は、たわみ変動と曲げモーメントの変動を図示したものである. それぞれの場合、変動はスパン中点で最大となり、基準化した分散の最大値は、それぞれ $E[w(l/2)^2]/\bar{w}_{max}^2 = 3.264/2.625$ および $E[M(l/2)^2]/\bar{M}_{max}^2 = 4/3$ である. Fig. 7 (b), (d) は、たわみ角の変動とせん断力の変動を図示したものである. それぞれの場合、変動は左端と右端で最大となり、スパン中点では最小となる. 基準化した分散の最大値は、それぞれ $E[\phi(0)^2]/\bar{\phi}_{max}^2 = 128/105$ および、 $E[Q(0)^2]/\bar{Q}_{max}^2 = 4/3$ となる. 一方、最小値は、それぞれ $E[\phi(l/2)^2]/\bar{\phi}_{max}^2 = 2/105$ および $E[Q(l/2)^2]/\bar{Q}_{max}^2 = 1/3$ となる.

b) 片持ばりの場合

分散・共分散応答は次式で与えられる.

$$E[w(x)^2] = \frac{SI^7}{1260 E^2 I^2} \xi^4 (105 - 105 \xi)$$

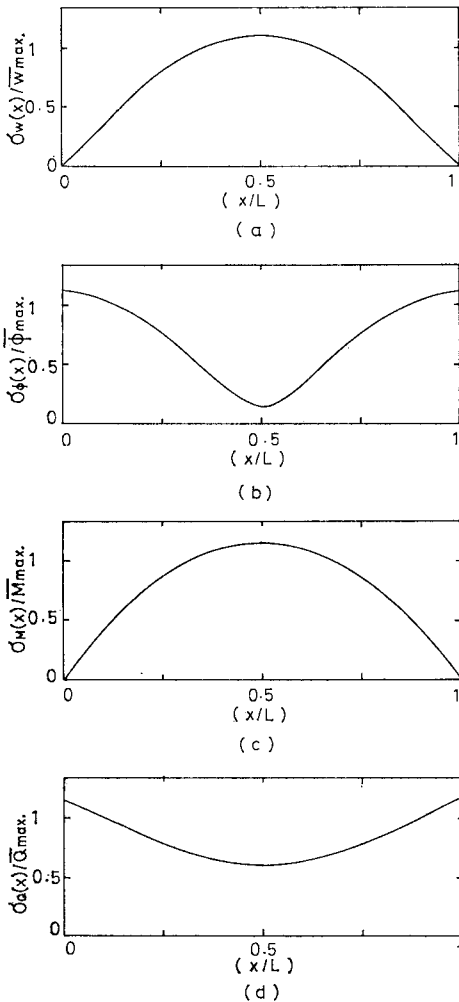


Fig. 7 Nonstationary r.m.s. response for simply supported beam; (a) deflection, (b) deflection angle, (c) bending moment, (d) shearing force.

$$\begin{aligned}
 &+35 \xi^2 - 2 \xi^3 \\
 E[w(x)\phi(x)] &= \frac{SI^5}{360 E^2 I^2} \xi^3 (60 - 75 \xi \\
 &+ 30 \xi^2 - 2 \xi^3) \\
 E[w(x)M(x)] &= -\frac{SI^5}{6 EI} \xi^2 (1 - \xi)^2 \\
 E[w(x)Q(x)] &= \frac{SI^4}{12 EI} \xi^2 (3 - 2 \xi - \xi^2) \\
 E[\phi(x)^2] &= \frac{SI^5}{60 E^2 I^2} \xi^2 (20 - 30 \xi \\
 &+ 15 \xi^2 - 2 \xi^3) \\
 E[\phi(x)M(x)] &= -\frac{SI^4}{12 EI} \xi (4 - 9 \xi \\
 &+ 6 \xi^2 - \xi^3) \\
 E[\phi(x)Q(x)] &= \frac{SI^3}{2 EI} \xi (1 - \xi)
 \end{aligned} \quad \dots (64)$$

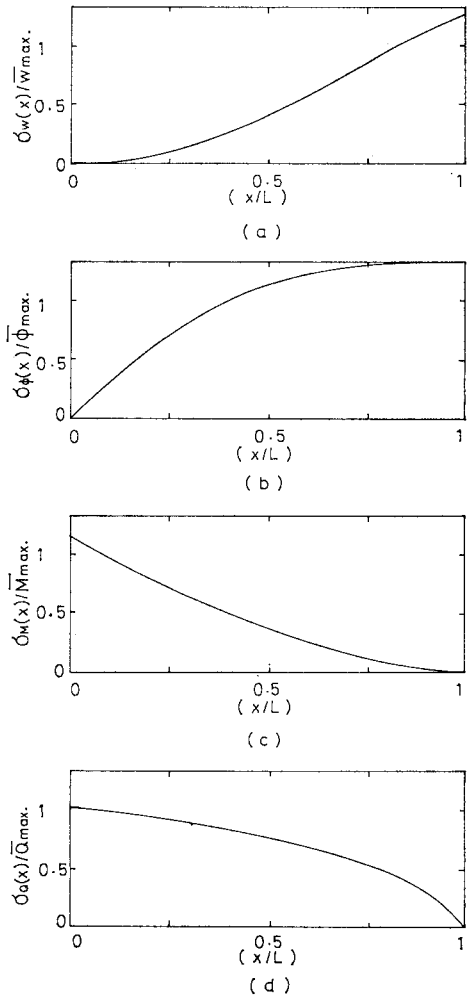


Fig. 8 Nonstationary r.m.s. response for cantilever beam; (a) deflection, (b) deflection angle, (c) bending moment, (d) shearing force.

$$\begin{aligned}
 E[M(x)^2] &= \frac{SI^3}{3} (1 - \xi)^3 \\
 E[M(x)Q(x)] &= -\frac{SI^2}{2} (1 - \xi)^2 \\
 E[Q(x)] &= SI(1 - \xi)
 \end{aligned}$$

Fig. 8 に各応答量の変動を示した。図中の記号および荷重の取扱いは、単純ばりの場合と同様である。Fig. 8 (a), (b) はたわみおよびたわみ角の変動を図示したものである。それぞれ変動は自由端で最大となる。対応する基準化した分散の値は、 $E[w(t)^2]/\bar{w}_{\max}^2 = 176/105$ および $E[\phi(t)^2]/\bar{\phi}_{\max}^2 = 9/5$ である。また、Fig. 8 (c), (d) は、曲げモーメントおよびせん断力の変動を図示したものである。それぞれ変動は固定端で最大となる。対応する基準化した分散の値は、 $E[M(0)^2]/\bar{M}_{\max}^2 = 4/3$ および $E[Q(0)^2]/\bar{Q}_{\max}^2 = 1$ である。

5. おわりに

不規則分布荷重を白色雑音過程でモデル化すると、状態ベクトルで表現したはりの変位および断面力を記述する方程式は、伊藤形の確率微分方程式で記述される。この確率微分方程式を基礎にして、はりの変位および断面力の分散・共分散応答は、共分散方程式と称する微分方程式で表現することができた。しかし、この共分散方程式は境界値問題となっており、初期値問題のように直接微分方程式を解くことはできない。すなわち、本論文で誘導した共分散方程式では、初期条件と荷重が独立でなく、両者の相関関数が非定常な外力として作用する。さらに、初期条件は既知な量でなく、両端の境界条件より決定しなければならない。

本論文では、初期条件と荷重の相関関数および初期条件の分散・共分散の決定は、伝達マトリクス法を不規則応答解析に拡張した理論を構成することにより解決した。また非定常応答解析は、分散・共分散応答を微分方程式で表現することにより効果的に処理できた。

本解法と伝達マトリクス法を比較すると、伝達マトリクス法は状態ベクトルを e^{Ax} の演算子を通して伝

達するのに対し、本解法では、変数の共分散行列を $e^{Ax} [] e^{AxT}$ の演算子を通して伝達することになる。本解法の解析例として、単純ばりと片持ばりの解析を行った。分布荷重を定常な白色雑音過程に、解析の対象をはりに限定すると、変位および断面力の分散・共分散応答は、閉じた形の解析解として求めることができた。

本解法は、荷重および解析対象をこれらのものに限定するものではない。任意の相関を有する確率過程は、白色雑音過程を入力とする線形系の出力として近似的に表現できることが知られている。したがって、このような不規則分布荷重が作用する場合に対して、本解法を拡張することは可能であるものと考えられる。また、解析対象について考えれば、本解法は、連立方程式と微分方程式で構成されている。すなわち、数値解析に適した形式で理論が構成されているので、一般的な構造物の解析に拡張され得るものと思われる。最後に、本研究にあたり有益な助言をいただいた、広島大学 花井正実教授、長崎大学 築地恒夫教授、同 崎山 毅助教授 および 同 高橋和雄助教授に深甚の謝意を表します。

付録 1 共分散方程式の誘導

解過程の共分散は次式で与えられる。

$$R_X(x) = e^{Ax} R_0 e^{AT} x + e^{Ax} \int_0^x E[X_0 F(\sigma)^T] e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma + \int_0^x e^{A(x-\sigma)} E[F(\sigma) X_0^T] d\sigma e^{AT} x + \int_0^x e^{A(x-\sigma)} Q(\sigma) e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma \dots\dots\dots (A.1)$$

両辺を x で微分する。

$$\frac{d}{dx} R_X(x) = A e^{Ax} R_0 e^{AT} x + e^{Ax} R_0 e^{AT} x A^T + A e^{Ax} \int_0^x E[X_0 F(\sigma)^T] e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma + e^{Ax} \frac{d}{dx} \int_0^x E[X_0 F(\sigma)^T] e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma + \frac{d}{dx} \int_0^x e^{A(x-\sigma)} E[F(\sigma) X_0^T] d\sigma e^{AT} x + \int_0^x e^{A(x-\sigma)} E[F(\sigma) X_0^T] d\sigma e^{AT} x \cdot A^T + \frac{d}{dx} \int_0^x e^{A(x-\sigma)} Q(\sigma) e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma \dots\dots\dots (A.2)$$

式 (A-2) の右边第 4 項、第 5 項および第 7 項に現われる微分計算は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} \int_0^x E[X_0 F(\sigma)^T] e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma = E[X_0 F(x)^T] + \int_0^x E[X_0 F(\sigma)^T] e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma \cdot A^T \dots\dots\dots (A.3)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{A(x-\sigma)} E[F(\sigma) X_0^T] d\sigma = E[F(x) X_0^T] + \int_0^x e^{A(x-\sigma)} E[F(\sigma) X_0^T] d\sigma \dots\dots\dots (A.4)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{A(x-\sigma)} Q(\sigma) e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma = \int_0^x e^{A(x-\sigma)} Q(\sigma) e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma + \int_0^x e^{A(x-\sigma)} Q(\sigma) e^{A^T(x-\sigma)} d\sigma \cdot A^T + Q(x) \dots\dots\dots (A.5)$$

式 (A-3)、(A-4) および式 (A-5) を式 (A-2) に代入し、式 (A-1) を用いて整理すると次式が得られる。

$$\frac{d}{dx} R_X(x) = A R_X(x) + R_X(x) A^T + e^{Ax} E[X_0 F(x)^T] + E[F(x) X_0^T] e^{AT} x + Q(x) \dots\dots\dots (A.6)$$

付録 2 荷重項の一般解

初期条件をすべて 0 とすると、式 (50) の解は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
m_{11} = & \frac{1}{E^2 I^2} \left\{ \frac{Sx^7}{252} - 40 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^7 dx_i - 20 \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^6 dx_i - 4 \int_0^x x^2 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^5 dx_i \right. \\
& - \frac{1}{3} \int_0^x x^3 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i - 20 \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^6 dx_i - 8 \int_0^x x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^5 dx_i \\
& - \int_0^x x^2 E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i \left. \right\} + \frac{1}{EI} \left\{ 8 \int_0^x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^5 dx_i + 2 \int_0^x x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i \right. \\
& \left. + 2 \int_0^x E[w_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i \right\} \dots \dots \dots (B \cdot 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{21} = & \frac{1}{E^2 I^2} \left\{ \frac{Sx^6}{72} - 20 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^6 dx_i - 10 \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^5 dx_i - 20 \int_0^x x^2 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i \right. \\
& - \frac{1}{6} \int_0^x x^3 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - 10 \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^5 dx_i - 4 \int_0^x x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i \\
& - \frac{1}{2} \int_0^x x^2 E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \left. \right\} + \frac{1}{EI} \left\{ 4 \int_0^x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i + \int_0^x x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \right. \\
& \left. + \int_0^x E[w_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \right\} \dots \dots \dots (B \cdot 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{31} = & -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{Sx^5}{30} - 8 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^5 dx_i - 4 \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i - \int_0^x x^2 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \right. \\
& - \frac{1}{6} \int_0^x x^3 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - 4 \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i - 2 \int_0^x x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \\
& - \frac{1}{2} \int_0^x x^2 E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \left. \right\} - 2 \int_0^x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - \int_0^x x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \\
& - \int_0^x E[w_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \dots \dots \dots (B \cdot 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{41} = & -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{Sx^4}{24} - 2 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i - \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - \frac{1}{2} \int_0^x x^2 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \right. \\
& - \frac{1}{6} \int_0^x x^3 E[Q_0 q(x)] dx - \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - \int_0^x x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i - \frac{1}{2} \int_0^x x^2 E[M_0 q(x)] dx \left. \right\} \\
& - \int_0^x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i - \int_0^x x E[\phi_0 q(x)] dx - \int_0^x E[w_0 q(x)] dx \dots \dots \dots (B \cdot 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{22} = & \frac{1}{E^2 I^2} \left\{ \frac{Sx^5}{20} - 12 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^5 dx_i - 6 \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i - \frac{1}{2} \int_0^x x^2 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \right. \\
& - 6 \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i - 2 \int_0^x x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \left. \right\} + \frac{1}{EI} \int_0^x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i \dots \dots \dots (B \cdot 5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{32} = & -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{Sx^4}{8} - 6 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^4 dx_i - 3 \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - \frac{1}{2} \int_0^x x^2 E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \right. \\
& - 3 \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - \int_0^x x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \left. \right\} - \int_0^x E[\phi_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \dots \dots \dots (B \cdot 6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{42} = & -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{Sx^3}{6} - 2 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i - \frac{1}{2} \int_0^x x^2 E[Q_0 q(x)] dx \right. \\
& - \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i - \int_0^x x E[M_0 q(x)] dx \left. \right\} - \int_0^x E[\phi_0 q(x)] dx \dots \dots \dots (B \cdot 7)
\end{aligned}$$

$$m_{33} = \frac{1}{3} Sx^3 - 4 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^3 dx_i - 2 \int_0^x x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i - 2 \int_0^x E[M_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i \dots \dots \dots (B \cdot 8)$$

$$m_{43} = \frac{1}{2} Sx^2 - 2 \int_0^x E[Q_0 q(x)] \prod_{i=1}^2 dx_i - \int_0^x x E[Q_0 q(x)] dx - \int_0^x E[M_0 q(x)] dx \dots \dots \dots (B \cdot 9)$$

$$m_{44} = Sx - 2 \int_0^x E[Q_0 q(x)] dx \dots \dots \dots (B \cdot 10)$$

なお、 $\int_0^x () \prod_{i=1}^n dx_i$ の表記は n 重積分を表わすものとする。

参 考 文 献

- 1) 土木学会編：構造物の安全性・信頼性，土木学会，1976年。
- 2) たとえば，Y.K. リン著（森大吉郎ほか訳）：構造動力学の確率論的方法，培風館，1972年。
- 3) Bolotin, V.V. : Statistical Methods in Structural Mechanics, Holden-Day, Inc., 1969.
- 4) 高岡宣善・白木 渡・福田貞美：統計的不均一性を有する弾性基礎上の板の信頼性解析，鳥取大学工学部研究報告，No. 9, pp. 155~165, 1978年9月。
- 5) Jacquot, R.G. : Nonstationary Random Column Buckling Problem, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, No. EM5, pp. 1173~1182, Oct., 1972.
- 6) 白木 渡・高岡宣善：非定常不規則な初期たわみを有する圧縮部材の信頼性解析，土木学会論文報告集，第297号，pp. 37~46, 1980年5月。
- 7) Pestel, E.C. and F.A. Leckie : Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
- 8) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法（コンピュータによる構造工学講座），培風館，1970年。
- 9) K.J. アストローム（中村嘉平ほか訳）：確率制御理論入門，コロナ社，1975年。
- 10) Soong, T.T. : Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, 1973.
- 11) Arnold, L. : Stochastic Differential Equations, John Wiley & Sons, 1974.
- 12) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第286号，pp. 15~27, 1979年6月および参考文献。
- 13) 岡林隆敏：不確定変量を有する動的系の非定常不規則応答，土木学会論文報告集，第308号，pp. 11~24, 1981年4月。

(1980.9.8・受付)