

非平衡性を考慮した側岸浸食量式に関する研究

BANK-EROSION DISCHARGE BASED ON A NON-EQUILIBRIUM THEORY

長谷川 和 義*

By Kazuyoshi HASEGAWA

1. 序 論

近年、沖積地水理学は、流路と水流の相互作用がもたらす固有の水理現象に関して豊富な知識を蓄えつつあり、最近では、これらの知見を背景として、流路形状が条件づける流れの立体構造とか、水流がもたらす流路の浸食・堆積機構など、より内部の物理機構に関心の眼を注ぐようになってきている。

流路の側岸浸食に関する問題は、流路変動という現象を、機構的に解明しようとする場合に、すぐさま直面する基礎課題であり、これまでも重要な研究成果があげられてきた。本論文が直接関係する非粘着性直線流路の分野においても、芦田・村本・奈良井¹⁾および村本・田中・藤田²⁾による流路拡幅過程の一次元解析法の定式化、平野³⁾による斜面上の掃流砂関数の導出とその拡幅過程への適用、藤田⁴⁾による側岸崩落条件の定式化・浸食過程1サイクルの所要時間の推定およびこれから定まる浸食量式の導出、著者ら^{5),6)}による浸食時の非平衡性の検討とこれを加味した浸食量式の誘導などの理論の進展がみられ、現象の骨組みと部分機構が、基本的に明らかにされてきている。

しかし、これらの研究は、浸食機構に根本的な差異をもたらす流路条件、1) 側岸構成材料(粘着性・非粘着性)、2) 流路平面形状(直線・弯曲・蛇行)、3) 側岸横断形状(傾斜、起伏、天端高)、4) 作用流体力(掃流力分布、水衝力、作用時間)のうちの最も単純な組合せを取り上げたものであり、これらが複雑に錯綜している実河川の浸食現象一般の解明という目標からみれば、得られた前進は、初歩的なものといわざるを得ない。

現在重要なことは、これまでの研究がその前提としてきた特殊な条件を、可能なものから一般化し、より広い適用範囲をもつ諸式を確立していくことであろう。

本論文は、非粘着性直線流路を対象を限定したものであるが、上述の観点に立って、一般的な横断形状と掃流力分布をもつ流路の横断面全域で成立する浸食量式(横断方向流砂量式)を誘導したものであり、あわせて、非平衡性の示強パラメーターに関する検討を進めて、非平衡式、その近似式、平衡式の適用条件を明らかにするとともに、崩落砂分布の単純なモデルの導入によって横断面の変形過程の計算方式を示し、実験との照合によって、諸式の成立性を検討しようとするものである。

2. 非平衡浸食量式の誘導

非粘着性流路の浸食現象は、基本的に3つの部分機構から構成される。その1は、流砂運動に対する斜面効果であり、その2は、流れと流砂量の間存する非平衡性であり、その3は、側岸の崩落と堆積である。この章では、第1と第2の機構に関して順に考察を進め、浸食量式の誘導を試みる。

(1) 斜面上の砂粒の運動

斜面上の掃流砂運動の特徴は、砂粒が流線と交わる向きに移動し、横断方向に対しても流砂量が生ずることであるが、こうした砂粒の運動は、静止砂粒が定常運動に達するのに要する固有時間によって、本質的に異なる状態におかれるものと考えられる。すなわち、もし固有時間が長く、砂粒の運動が斜面上の下端から下端まで過渡状態にあれば、外力(掃流力と重力の斜面分力)が非一様な場合の解析解はほとんど得がたくなり、また側岸の浸食変形に伴う系全体の非定常性の影響が、砂粒の運動に及ぶことになる。逆に、これが短い場合には、運動は非一様な外力に対しても、近似的に定常となり、斜面形と掃流力の局所的な値に対応して定まることになる。この場合、系の非定常性は、直接砂粒の運動に及ばず、局所的な状態ごとに運動を記述できることになる。

* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

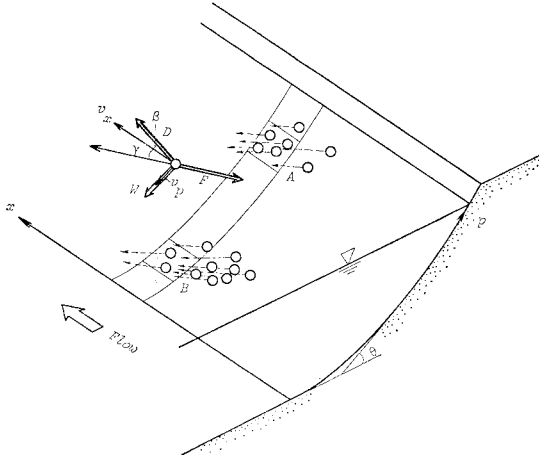


図-1 斜面上の砂粒運動・定義と記号

このことを明らかにするために、流れに平行する一様傾斜の斜面上に、一様掃流力が働く場合の砂粒の運動を詳しくみることにする。

図-1 のように、流れに沿って x 軸を、潤辺に沿って右岸向きを正に p 軸をとると、砂粒の運動方程式は、以下のように表わされる。ただし、これらの式では、斜面の流下方向の傾き、および砂粒に働く揚力やマグナス効果が考慮されておらず、平野³⁾によるものと同一の表現がなされている。

$$M \cdot dv_x/dt = D \cdot \cos \beta - F \cdot \cos r \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$M \cdot dv_p/dt = D \cdot \sin \beta - F \cdot \sin r - W \cdot \sin \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $M = \alpha_2 \pi d^3 (\rho_s + \rho) / 2$ 、 $D = \varepsilon \alpha_1 \pi d^2 \cdot C_D \rho \{ (u_d - v_x)^2 + v_p^2 \} / 2$ 、 $W = \alpha_2 \pi d^3 (\rho_s - \rho) g$ 、 $F = \mu_k \alpha_2 \pi d^3 (\rho_s - \rho) g \cos \theta$ 、 v_x 、 v_p ：それぞれ、砂粒の移動速度の x および p 方向成分（軸と同じ向きを正とする）、 u_d ：移動粒子の中心に働く流れの速度、 ρ_s 、 ρ ：それぞれ、砂粒および水の密度、 g ：重力加速度、 α_1 、 α_2 ：それぞれ、砂粒の投影面積および体積に関する係数、 d ：砂粒の代表粒径、 C_D ：抗力係数、 ε ：しゃへい係数、 θ ：斜面傾斜角（流下方向に向かって左まわりを正とする）、 t ：運動に関わる時間。また、 β および r は、それぞれ、 D の働く方向、および砂粒の運動方向の x 軸からの偏角で、次式にて表わされる。

$$\cos \beta = (u_d - v_x) / \sqrt{(u_d - v_x)^2 + v_p^2} \quad \text{および、}$$

$$\sin \beta = -v_p / \sqrt{(u_d - v_x)^2 + v_p^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\cos r = v_x / \sqrt{v_x^2 + v_p^2} \quad \text{および、}$$

$$\sin r = v_p / \sqrt{v_x^2 + v_p^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

これらの式において、砂粒の移動限界時、すなわち加速度と速度が零で、 F に対し、静止摩擦係数 μ_s がかかることを想定し、斜面上の限界掃流力を求めると、次の Lane・Carlson の式が得られることは、すでに平野³⁾が

導いたとおりである。

$$\tau_{*cs} = \tau_{*c} \cdot \sqrt{1 - (\tan \theta / \mu_s)^2} \cdot \cos \theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\tau_{*cs} = u_{*cs}^2 / \{ (\rho_s / \rho - 1) g d \}$ 、 u_{*cs} ：移動限界状態における斜面上の摩擦速度、 $\tau_{*c} = u_{*c}^2 / \{ (\rho_s / \rho - 1) g d \}$ 、 u_{*c} ：水平床上の限界摩擦速度。ただし、式 (5) の誘導には、 $\theta = 0$ の場合の移動限界時における D と F のつり合い関係、および $u_d = \varphi_d u_*$ (φ_d ：流速係数) の両者から、

$$\tau_{*c} = 2 \alpha_2 \mu_s / (\varepsilon \alpha_1 C_D \varphi_d^2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

が成立すること、 φ_d と C_D が完全乱流状態では一定とみなされ得ることが利用されている。

さて、式 (1)、(2) は、中に無理関数を含み、このままでは解析解が得られないので、以下のような無次元化と簡略化を施す。すなわち、 $V_x = v_x / u_d$ 、 $V_p = v_p / u_d$ 、 $u_d = \varphi_d u_*$ 、 $\tau_* = u_*^2 / \{ (\rho_s / \rho - 1) g d \}$ 、 $t_* = t / A$ 、

$$A = (\rho_s / \rho + 0.5) u_{*c} \varphi_d / \{ (\rho_s / \rho - 1) \sqrt{\mu_s \mu_k} \cos \theta \cdot g \} \quad \dots\dots\dots (7)$$

の置き換えを行い、さらに式 (6) によって τ_{*c} を導入する。そのうえで、

$$T_* = \tau_* / (\tau_{*c} \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\mu_* = \mu_s / \mu_k \quad \dots\dots\dots (9)$$

とおき、

$$\{ V_p / (1 - V_x) \}^2 \ll 1 \quad \text{および} \quad (V_p / V_x)^2 \ll 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

の仮定のもとで式 (1)～(4) を簡略化すれば、次式を得る。

$$dV_x/dt_* = \sqrt{\mu_* T_*} (1 - V_x)^2 - 1 / \sqrt{\mu_* T_*} \quad \dots\dots (11)$$

$$dV_p/dt_* = -\sqrt{\mu_* T_*} (1 - V_x) V_p - V_p / \{ V_x \sqrt{\mu_* T_*} \} - \tan \theta / \{ \mu_k \sqrt{\mu_* T_*} \} \quad \dots\dots (12)$$

$$\cos \beta \approx 1 \quad \text{および、} \quad \sin \beta \approx -V_p / (1 - V_x) \quad \dots (13)$$

$$\cos r \approx 1 \quad \text{および、} \quad \sin r \approx V_p / V_x \quad \dots\dots (14)$$

式 (10) の条件は、ほぼ

$$(\tan \theta / \mu_s)^2 \ll 1 \quad \dots\dots\dots (15)$$

に等しいので、 θ が水中安息角よりある程度以上小さい斜面では、これらの簡略式が成立するものと考えてよい。

しかし、この場合には、式 (5) も簡略化され、

$$\tau_{*cs} = \tau_{*c} \cdot \cos \theta \quad \dots\dots\dots (16)$$

となることに注意する必要がある。この表現によれば、式 (8) は、斜面上の限界掃流力と流れの掃流力の比を表わすことになり、砂流の動きやすさを示す重要パラメーターであることがわかる。これも平野³⁾によって導入されたものである。

式 (11)、(12) の定常解は、比較的簡単に、以下のよう求めることができる。

$$\tilde{V}_x = 1 - 1 / \sqrt{\mu_* T_*} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\tilde{V}_p = -\tan \theta (\sqrt{\mu_* T_*} - 1) / (\mu_k \mu_* T_*) \quad \dots\dots (18)$$

したがって、 r に対する定常解も

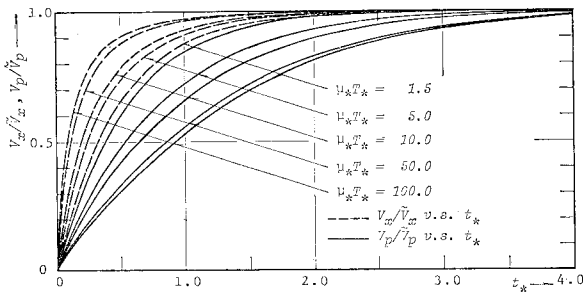


図-2 砂粒の非定常運動の解

$$\tan \tilde{\tau} = -\tan \theta / \{ \mu_k \sqrt{\mu_* T_*} \} \dots\dots\dots (19)$$

のごとく定まる。これらの関係は、以後において、しばしば利用される。

一方、 $t_* = 0$ において $V_x = V_p = 0$ なる初期条件に対する式 (11), (12) の非定常解は、やや複雑な以下の式で表わされる。

$$V_x(t_*) / \tilde{V}_x = \{ \exp(2t_*) - 1 \} / \{ \exp(2t_*) - \tilde{V}_x / (2 - \tilde{V}_x) \} \dots\dots\dots (20)$$

$$V_p(t_*) / \tilde{V}_p = \zeta(t_*) \cdot V_x(t_*) / \tilde{V}_x \dots\dots\dots (21)$$

$$\tan \tau(t_*) / \tan \tilde{\tau} = \zeta(t_*) \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $\zeta(t_*) = 1 + [1 - \{1 - \exp(-2t_*)\}^a \cdot \{F_G(a, b, b+1; \exp(-2t_*)) - F_G(a, b, b+1; 1) \cdot \exp(2bt_*)\}] / (2b)$, $a = -\mu_* T_* / (\mu_* T_* - 1)$, $b = -\sqrt{\mu_* T_*} / \{2(\sqrt{\mu_* T_*} - 1)\}$, $F_G(a, b, b+1; z) = \Gamma(b+1) / \{ \Gamma(a) \Gamma(b) \} \times \sum_{n=0}^{\infty} [\{ \Gamma(a+n) \Gamma(b+n) / \Gamma(b+n+1) \} \cdot z^n / n!]$, Γ : ガンマ関数。

これらの解のうち、式 (20), (21) を、 $\mu_* T_*$ をパラメータに表示すると、図-2 となる。 $\mu_* T_*$ の広い範囲にわたってみても、解は t_* の増加とともに急速に定常値に近づいている。ほぼ定常とみられる $t_* = 4$ に対して式 (7) を用い、実時間になおせば、 10^{-1} 秒のオーダーになる。つまり、砂粒は、移動開始後、ほぼ瞬間的に定常運動に至るわけである。この結果は、先述の 2 つの非定常現象のうち、後者が生ずることを示すものであり、砂粒の運動が場所と時間の局所的な条件に対応した定常解をもって近似し得ることを示す。ただし、後にみるように、始動時の非定常性は、非平衡によるせん断応力の発生要因であり、すべて無視することはできない。

(2) 非平衡現象の基礎的考察

図-1 に示すように、側壁斜面の頂部に近い部分 A と、路床に近い部分 B を取り出して考えると、A では、これより上端部分から運ばれてくる砂粒の通過量が少なく、面上が絶えず流れにさらされ、次々に表面粒子が運び出される傾向があるのに対し、B では、上部からの流送砂が多く、これらの砂粒群によって面上が覆われ、

表面粒子の運び出される機会が少なくなる傾向にある。つまり、掃流力が同じであれば、単位面積当たりの洗掘量は、A の部分が多くて B では少なく、通過流砂量ではその逆になる。非平衡とよばれるこの現象を力学的に表現するためには、移動中の砂粒群と、その下層の静止砂粒群に対して、流れの有効掃流力がいかに配分、伝達されているかを明らかにする必要がある。この問題は、掃流砂運動にとって本質的であり、いまだ多くの研究^{7)~9)}が集中している難問であるが、ここでは表現が簡単で応用範囲の広い Bagnold¹⁰⁾ の粒子せん断流の概念をもとにした芦田・道上¹¹⁾による式の拡張を考えることにする。

Bagnold は、掃流砂運動に対しては、河床における衝突せん断力 τ_{0G} が

$$\tau_{0G} = N(\rho_s - \rho) g \cos \theta \cdot \mu_k \dots\dots\dots (23)$$

にて表わされることを示した。ここに、 N : 単位面積当たりの流砂の体積。一方、芦田・道上は、上式を応用するに際し、流砂濃度が平衡にまで達した状態では、河床面から新たに砂粒が補給されることがなく、流体のみによる河床せん断力が、砂粒の限界掃流力 τ_c に近い値になっていると考え、

$$\tau_{0e} = \tau_{0G} + K\tau_c, K \approx 1 \dots\dots\dots (24)$$

を導いた。ここに、 τ_{0e} : 有効せん断力である。

しかし、図-1 の A のような部分では、流砂濃度が低く、 τ_{0G} の分担する値が小さいので、表面では τ_c を上回るせん断力が働き、これが静止砂粒を移動させるに至る。ただし、これらの層よりさらに下部にある砂粒は、限界状態で静止しているので、結局式 (24) を拡張した次式が成立するものといえる。

$$\tau_{0e} = \tau_{0G} + \tau_{0u} + \tau_c \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 τ_{0u} は、静止砂粒を始動させ、平衡速度に達せしめるのに要する力であり、後節に詳しく検討する。

式 (25) の関係は、個々の項を砂粒の置かれている条件に応じて評価すれば、河床においても、斜面においても成立するものと見なすことができる。

(3) 浸食量に関する基礎方程式

側岸浸食量の定義は、横断方向流砂量のそれと同一であり、側岸の各点から運び出され、流路中央に向かって移動する砂粒の体積を、任意点において、流下方向の単位長につき、単位時間当たりに測定した量 q_{Bp} として与えられる。

しかし、その基礎方程式を導くにあたっては、単位面積、単位時間当たりに運び出される砂粒の体積 (洗掘量フラックス) c を用いた方が便利であり、以下 c に関する方程式を導く。

前節と同様に、図-3 のような側岸を考え、 $x-p$ 軸を

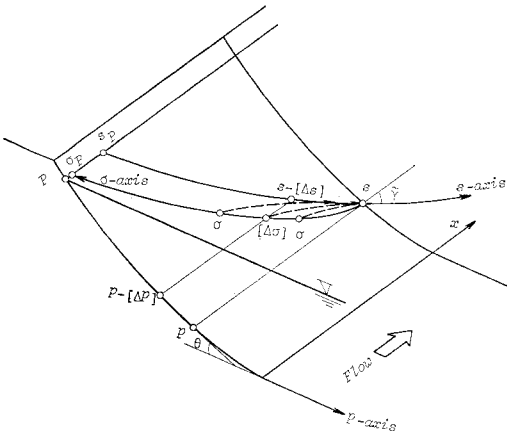


図-3 座標系の定義

定める。ただし、この節では、 θ と τ_* が p 軸に沿って変化する一般の場合を含め、また、 τ_* 、 u_* を有効値 τ_{*e} 、 u_{*e} にて表現する。側岸上の一粒子の定常運動による軌跡を s 軸とし、右岸に向かう向きを正にとる。次に、 s 軸上の一点 s に集まる砂粒群の初期位置を連ねた線を σ とすれば、これは、非定常運動の分だけ s から外れた位置にくるので、 s 点を原点とし、砂粒の運動と逆向きを正にとって σ 軸とする。側岸の境界（水際）の p, s, σ 軸に対する座標を、 P, s_p, σ_p とする。このとき、 σ 軸上の各点から運び出された砂粒は、 s 点に集中し、次式のような厚さをもつことになる。

$$N(s) = \int_0^{\sigma_p} \frac{c(\sigma)}{|v_s(\sigma)|} d\sigma \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $v_s(\sigma)$: σ 点から出発した砂粒が、 s 点に至ったときに有している速度。いま、 $v_s(\sigma)$ がちょうど定常と見なし得る値に達する限界の距離を $[d\sigma]$ にて表わすことにすると、 $\sigma > [d\sigma]$ の点を出発した砂粒は、図に示すように、途中から s 軸上をたどるようになる。この場合、 $v_s(\sigma)$ は、定常値 $\bar{v}_s(s)$ に達する。また、 σ 軸と s 軸がほぼ平行しているので、積分パラメーター s' を s 上に選べば、

$$d\sigma/|\bar{v}_s(s)| = -ds'/\bar{v}_s(s) \dots\dots\dots (27)$$

なる関係が成立する。一方、 $\sigma < [d\sigma]$ の点を出発した砂粒は、非定常状態のまま s 点に至るが、この間を移動するに要する時間 t と σ との間に、次式が成立する。

$$d\sigma/dt = |v_s(\sigma)| \dots\dots\dots (28)$$

また、 $[d\sigma]$ という短い区間内では、

$$c(\sigma) \approx c(s) \quad (\sigma < [d\sigma]) \dots\dots\dots (29)$$

と見なすことが許されるので、式 (27)、(28) とともに式 (26) を書き改めると、式 (30) を得る。

$$N(s) = c(s) \cdot [dt] + \int_{s_p}^{s \pm [d\sigma]} \frac{c(s')}{\bar{v}_s(s)} ds' \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 $[dt]$ 、 $[ds]$ は、それぞれ、 $[d\sigma]$ を移動するに

要する時間、および対応する s 軸上の長さである。複号は、 $s < s_p$ の場合を正、逆を負としている。上式を p 軸に沿う表現に改めるために、 $dp/ds = |\sin \tilde{\gamma}|$ 、および図-3 の関係を用い、さらに、

$$\bar{v}_s \approx \bar{v}_x = \varphi_d u_{*e} (1 - 1/\sqrt{\mu_* T_*}), \quad \sin \tilde{\gamma} \approx \tan \tilde{\gamma}$$

なる近似を行って、式 (23) に適用すると、衝突によるせん断力が、

$$\begin{aligned} \tau_{0G}(p) &= (\rho_s - \rho) g \cos \theta \mu_k A [dt_*] c(p) \\ &+ (\rho_s - \rho) g \cos \theta \mu_k \int_p^{p \pm [dP]} \frac{c(p')}{\varphi_d u_{*e}(p) \{1 - 1/\sqrt{\mu_* T_*(p)}\}} \\ &\cdot \frac{dp'}{\tan \tilde{\gamma}(p')} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

にて表わされる。ただし、 $[dt] = A [dt_*]$ である。

次に、静止砂粒が、新たに動き始める際に生ずる運動量の変化、すなわち慣性抵抗を見積る。この力は、既述の非平衡によるせん断力 τ_{0u} に等しく、 s 点においては、以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \tau_{0u}(s) &= \int_0^{\sigma_p} (\rho_s + \rho/2) \frac{c(\sigma)}{|v_s(\sigma)|} \left[\frac{dv_s(\sigma)}{dt} \right] d\sigma \\ &\approx \int_0^{[d\sigma]} (\rho_s + \rho/2) \frac{c(\sigma)}{|v_s(\sigma)|} \left[\frac{dv_s(\sigma)}{dt} \right] d\sigma \\ &\dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

この式の後半の関係に、式 (28)、(29) を用い、 $t = [dt]$ における v_s を $k\bar{v}_s$ と表わしたうえて、 $\bar{v}_s \approx \bar{v}_x$ などの近似を行って、 p 軸に沿う表現に改めると、

$$\tau_{0u}(p) = (\rho_s + \rho/2) k \varphi_d u_{*e}(p) \{1 - 1/\sqrt{\mu_* T_*(p)}\} c(p) \dots\dots\dots (33)$$

を得る。 $k\bar{v}_s$ は、砂粒の定常と非定常を区分する限界の速度であるから、 k は、1 にごく近い値でなければならない。

一方、流体のみによるせん断応力は、前節の考察から、斜面上では、 $\tau_{cs} = \tau_{*cs}(\rho_s - \rho)gd$ に一致するものと考えられる。したがって、 p 点の砂粒に働く実質的掃流力は、式 (8)、(16) を使って次式にて表わされる。

$$\tau_{0e}(p) - \tau_{cs} = (\rho_s - \rho)gd\tau_{*c} \cos \theta(p) \{T_*(p) - 1\} \dots\dots\dots (34)$$

以上、式 (31)、(33)、(34) を式 (25) の関係に代入すれば、 $c(p)$ に関する方程式が得られるが、式中の $[dt_*]$ および μ_* の内容が不明なので、これらの考察を行う。

いま、式 (20) に対して、 $V_x/\bar{V}_x = k$ 、 $t_* = [dt_*]$ を代入すれば、両者の間に次式が成立する。

$$[dt_*] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left\{ \frac{1 - 1/\sqrt{\mu_* T_*}}{1 + 1/\sqrt{\mu_* T_*}} k - 1 \right\}}{(k - 1)} \right] \dots\dots\dots (35)$$

k にどの程度の値をとるべきかは、現在のところ明瞭な基準がないので、式 (31) と (33) の和の中に表われる k を含む項 $\{k(\sqrt{\mu_* T_*} - 1) + [dt_*]\} \equiv k_*$ に対して検討を加える。

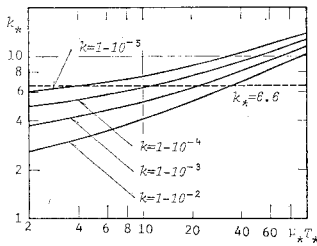


図-4 k_* の変化

図-4 は、 k_* に対する $\mu_* T_*^\nu$ と k の影響をみたものであるが、現実の問題で起こり得る $\mu_* T_*^\nu < 100$ の範囲において、 $1-10^{-2} < k < 1-10^{-5}$ の間をとる k_* の値の平均を求めると、ほぼ 6.6 となる。次節にふれるように、 k_* の値は、砂粒の平均移動距離の大きさに関係しており、今後それらの研究から検討を加えるべきであるが、本論文では、

$$k_* \equiv \{k(\sqrt{\mu_* T_*^\nu} - 1) + [d]_*\} = 6.6 \dots\dots\dots (36)$$

を用いることにする。

一方、動摩擦係数 μ_k は、砂粒の運動状態によって見かけ上変化するものと考えられる。実際、中川・辻本ら^{9),12)}は、16 mm フィルムによる掃流砂礫の運動解析から、見かけの摩擦係数が、砂礫の移動速度に依存して変化することを報じている。 μ_k に対する厳密な表式は、今後の研究に待たねばならないが、一般には、掃流力の増加とともに減少して現われると考えるのが妥当である。

したがって、ここでは、

$$\mu_k = \mu_s m^{-1} T_*^{-\nu} \quad \text{すなわち} \quad \mu_* = m T_*^\nu \dots\dots\dots (37)$$

と仮定しておく。 ν, m の定数は、種々の掃流砂関数に矛盾しないように選ばば、おのずから一定の範囲に収まるものであるが、ここでは、実験によって定めるべきものとする。

さて、式 (31), (33), (34), (36), (37) を式 (25) に代入し、整理を行うと、 $c(p)$ に関する方程式が、最終的に以下のように求まる。

$$A(p) \cdot c(p) + \int_p^p \frac{c(p')}{p \tan \tilde{\varphi}(p')} dp' = \tilde{q}_B(p) \dots\dots\dots (38)$$

$$A(p) = K_1 K_2 \{ \sqrt{m} T_*^\nu (p)^{(\nu+1)/2} - 1 \} d \dots\dots\dots (39)$$

$$\tilde{q}_B(p) = K_1 \{ m T_*^\nu (p)^\nu - \sqrt{m} T_*^\nu (p)^{(\nu-1)/2} \} \cdot \{ T_*^\nu (p) - 1 \} u_{*e}(p) d \dots\dots\dots (40)$$

$$K_1 = \varphi d \tau_{*c} / \mu_s \dots\dots\dots (41)$$

$$K_2 = 6.6 \varphi d (\rho_s / \rho + 0.5) \dots\dots\dots (42)$$

ただし、式 (38) においては、左辺第 2 項の積分の上限に現われる $\pm [d]_*$ を、小さいものとして省略している。

これは、 $[d]_*$ の区間の衝突によるせん断力を、1, 2 項で二重に評価することを意味するが、 $[d]_*$ が小さい限り、求める $c(p)$ にあまり影響を与えない。また、 φd

$= 8.5, \tau_{*c} = 0.05, \mu_s = 1, \rho_s / \rho = 2.65$ としたとき、 $K_1 = 0.425, K_2 = 177$ となるが、次章以後の数値計算例には、すべてこれらの値を用いることにする。

(4) 基礎方程式の解

a) 特別な条件における解

式 (38) の左辺第 1 項は、非平衡によるせん断応力に対応した項なので、この項を除いた他の項からは、平衡時の関係が得られる。また、左辺第 2 項は、 s 軸に沿って運ばれる流砂量を意味するので、結局、右辺の \tilde{q}_B は、平衡時の s 軸に沿う流砂量にほかならないことがわかる。これが、掃流力 T_* との間に式 (40) の関係にあるわけである。したがって、式 (40) に対して $\theta = 0$ とおけば、河床における掃流砂関数が求まる。いま、 $\nu = 0, m = 2, \cos \theta = 1$ とおき、 K_1, T_* をもとの形に戻して整理すると、

$$\tilde{q}_B = 2 \varphi d / \mu_s \cdot \{ 1 - u_{*c} / (\sqrt{2} u_{*e}) \} (\tau_{*e} - \tau_{*c}) u_{*e} d \dots\dots\dots (43)$$

となって、芦田・道上式にほぼ一致する。同様に、 $\nu = 1$ とおいた場合には、

$$\tilde{q}_B = \varphi d \sqrt{m} (\mu_s \tau_{*c}) \cdot (\sqrt{m} \tau_{*e} - \tau_{*c}) \cdot (\tau_{*e} - \tau_{*c}) u_{*e} d \dots\dots\dots (44)$$

が得られ、 $m = 1$ のときはブラウン型になる。しかし、係数に一般的な値を与える限り、 $m = 1$ は過大な見積りとなるので $m = 0.1$ 程度にとる必要がある。また、著者らの実験では、 $\nu = 1/3, m = 1$ とした。

$$\tilde{q}_B = \varphi d / \mu_s \cdot \{ (\tau_{*e} / \tau_{*c})^{1/3} - (\tau_{*e} / \tau_{*c})^{-1/3} \} \cdot (\tau_{*e} - \tau_{*c}) u_{*e} d \dots\dots\dots (45)$$

に対して、よい一致を示している。

一方、側岸が微細な砂で構成されていて、浸食後に浮遊するような場合には、式 (38) の左辺第 2 項が零となる。このとき、側岸の洗掘速度が、ただちに、

$$c(p) = \tilde{q}_B(p) / A(p) \dots\dots\dots (46)$$

にて与えられる。これによれば、 A は、 s 軸に沿って測った砂粒の平均移動距離に対応するものと解釈することができ、式 (39) よってその表式が示されていることがわかる。

b) 非平衡浸食量の解

さて、式 (38) は、ボルテラ第二種の積分方程の形式を備えており、その解は、

$$c(p) = \frac{\tilde{q}_B(p)}{A(p)} - \frac{1}{A(p)} \int_p^p \frac{\tilde{q}_B(\xi)}{p \tan \tilde{\varphi}(\xi) A(\xi)} \cdot \exp \left\{ \int_p^\xi \frac{d\xi'}{p \tan \tilde{\varphi}(\xi') A(\xi')} \right\} d\xi \dots\dots\dots (47)$$

にて与えられる。これを浸食量 q_{Bp} に変換することを考えると、両者の間には、

$$q_{Bp}(p) = \int_p^p \frac{c(p')}{p \tan \tilde{\varphi}(p')} dp' \cdot \tan \tilde{\varphi}(p) \dots\dots\dots (48)$$

なる関係が成立するので、これと、式 (38), (47) から

$$q_{Bp}(p) = \tan \tilde{\gamma}(p) \int_p^{\xi} \frac{\tilde{q}_B(\xi)}{p \tan \tilde{\gamma}(\xi) A(\xi)} \cdot \exp \left\{ \int_p^{\xi} \frac{d\xi'}{p \tan \tilde{\gamma}(\xi') A(\xi')} \right\} d\xi \dots \dots (49)$$

を得る。これが、求める非平衡浸食量式であるが、同式は、 P 点を、水際に限らず、河床波の頂点など任意の境界に選ぶことによって、横断面内のすべての斜面に適用することができる。ただし、流砂の向きが p 軸の向きに一致する場合に正、逆の場合に負となる。また、同式の両辺を $\tan \tilde{\gamma}(p)$ にて除すと、 s 軸に沿う非平衡流砂量 $q_B(p)$ が得られ、あるいは、 $A \rightarrow 0$ とすると、平衡時の流砂量の関係

$$\tilde{q}_{Bp}(p) = \tan \tilde{\gamma}(p) \cdot \tilde{q}_B(p) \dots \dots (50)$$

が求まる。

c) 微分表示と近似解

式 (49) を p で微分し、 $\tan \tilde{\gamma} \cdot A$ を乗じて整理すると、

$$\tan \tilde{\gamma}(p) A(p) q_{Bp}'(p) + \{1 - A(p) (\tan \tilde{\gamma}(p))'\} \cdot q_{Bp}(p) = \tilde{q}_{Bp}(p) \dots \dots (51)$$

を得る。これは、 q_{Bp} に関する微分方程式であり、式 (38) に対応する。ただし、プライムは p に関する微分を表わす。

上式において、 $A(\tan \tilde{\gamma})' \ll 1$ の場合は、この項を省略し、左辺を近似的に $q_{Bp}(p + \tan \tilde{\gamma} A)$ と表わすことができる。したがって、式 (49) の近似式として、

$$\tilde{q}_{Bp}(p) = \tilde{q}_{Bp}(p - \lambda) \dots \dots (52)$$

なる表現が可能になる。ここに λ は近似を表わし、 $\lambda = \tan \tilde{\gamma} \cdot A$ である。

式 (51) に戻って、両辺を $\tan \tilde{\gamma}$ で除し、必要な変換を行った後に、 $\theta=0$ とおくと、

$$A(x) q_B'(x) + q_B(x) = \tilde{q}_B(x) \dots \dots (53)$$

なる、河床における非平衡流砂量に関する微分表示が得られる。この式は、椿・齊藤^{13), 14)} に始まる非平衡流砂量式の基礎表示に一致しており、 A が砂粒の平均移動距離に対応するものであることが、確認される。

いま、 $\nu=0, m=2$ とし、 K_1, K_2 に前記の値を与えるると、 $A=75.2(\sqrt{2\tau_*'/\tau_{*c}}-1)d$ となり、 $A=(50\sim 200)d$ という一般に知られた長さをカバーする。したがって、先の k_* の見積りは妥当なものといえるが、平衡時とは異なる値をもつ可能性に関しては、疑問が残る。

3. 非平衡式、近似式の適用条件

(1) 計算例

前章で誘導した非平衡式は、必ずしも単純な形をしておらず、 θ と T_* が p に関する簡単な関数である場合

を除いて、積分は数値的に求めざるを得ない。ここでは、 θ, T_* が典型的な3つの例について計算を試み、非平衡式の性質と、非平衡性の示強パラメーターについて考察する。

a) θ, T_* が一定の場合

θ と T_* が場所によらず、一定の場合を想定すると、式 (49) の積分は、解析的に求まり、次式となる。

$$q_{Bp}(p_*) = \tilde{q}_{Bp} \cdot [1 - \exp\{-p_*/(\tan \tilde{\gamma} \cdot A/L)\}] \dots \dots (54)$$

ここに、 $p_* = |p - P|/L, L$: 考えている斜面の全長。

式形から明らかなように、非平衡性は、括弧内の第2項に表われており、 p が斜面境界の P に近づくほど流砂量が減ずる。しかし、その度合は、 $\tan \tilde{\gamma} \cdot A \equiv \lambda$ の絶対値を L にて除した値、すなわち、

$$\lambda_* \equiv |\lambda|/L = K_1 K_2 \sqrt{m} / \mu_s \cdot |\tan \theta| \cdot T_*^{(\nu-1)/2} \cdot \{\sqrt{m} T_*^{(\nu+1)/2} - 1\} d/L \dots \dots (55)$$

の大きさに関係しており、 λ_* を斜面全体の非平衡性の示強パラメーターとみることができる。図-5 は、 λ_* を変えて式 (54) を比較したものであり、パラメーターの意義は明らかである。

b) θ が一定で、 T_* が p の関数の場合

Ippen・Drinker¹⁵⁾ は、 $\tan \theta=0.5$ で一定であるが、

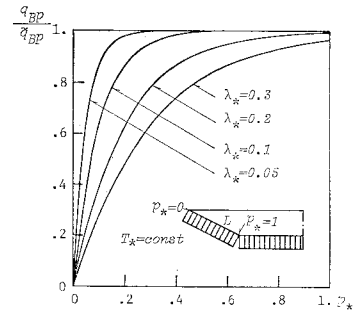


図-5 T_* が一定の場合の非平衡流砂量

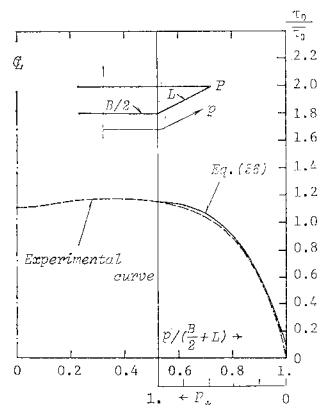
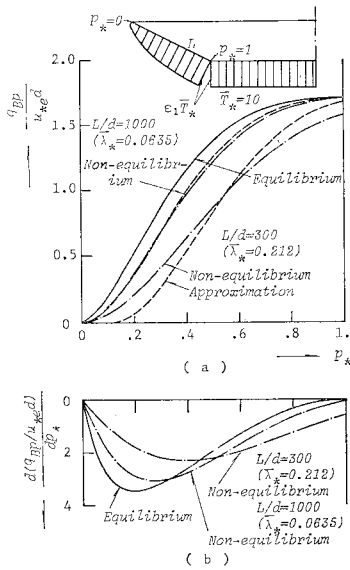


図-6 Ippen and Drinker¹⁵⁾ によるせん断力分布の実験曲線と関数のあてはめ



図一 (a) T_* が変わる場合の非平衡流砂量, (b) その p_* に関する微分

底幅 B と側壁斜面長 L の組合せが異なる数種の台形断面水路の直線部において、せん断力分布を測定し、図一6の実験カーブを得ている。測定値は、相似なまとまりを示しているの、斜面上の分布に関して、 p_* による関数表示を行うことにすれば、

$$\tau_{*e}(p_*) = \varepsilon_1 \bar{\tau}_{*e} \{1 - \varepsilon_2 (1 - p_*)^J\} \dots (56)$$

などの表現が可能であり、 $J=2 \sim 3$ が適当する。ただし、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は、上式の τ_{*e} の断面平均が $\bar{\tau}_{*e}$ に一致し、水際 ($p_*=0$) において $\tau_{*e} = \tau_{*c} \cos \theta$ (限界掃流力) になるように定めるものとして、

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - \tau_{*c} \cos \theta / \{ (J+1) \bar{\tau}_{*e} \} + B / (2L)}{J / (J+1) + B / (2L)} \dots (57)$$

$$\varepsilon_2 = 1 - \tau_{*c} \cos \theta / (\varepsilon_1 \bar{\tau}_{*e}) \dots (58)$$

である。図一6中に、 $J=3$ の場合の式 (56) を、実線にて示す。

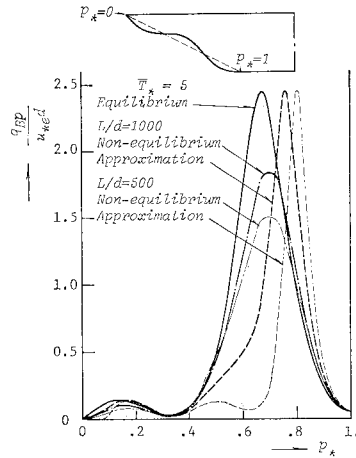
さて、 θ が一定で、 T_* が式 (56) から定まる場合を考える。図一7 (a) は、 $\bar{T}_* = \bar{\tau}_{*e} / (\tau_{*c} \cos \theta) = 10$, $\tan \theta = 0.5$, $\nu = 1/3$, $m = 1$ とし、 L/d を変えたときの計算例であり、非平衡式 (49), 近似式 (52), 平衡式 (50) の三者が比較されている。図によれば、式 (55) に対して \bar{T}_* を適用して求めたパラメーター $\bar{\lambda}_*$ が大きいほど、三者の開きが大きくなっており、 $\bar{\lambda}_*$ をもって、非平衡性の尺度とすることが可能である。

c) θ, T_* がともに p の関数の場合

T_* は、式 (56) で表わされるものとし、 θ が次式によって変化する場合を考える。

$$\theta(p_*) = \bar{\theta} [1 - 0.9 \cos \{3\pi(1 - p_*)\}], \tan \bar{\theta} = 0.5$$

このときの斜面形状は、図一8 に示すようなものとな



図一8 T_* と θ が変わる場合の非平衡流砂量

る。同図の非平衡、近似、平衡の各式に関する計算結果において、注目すべきことは、非平衡式によるものが、 θ の局所的な変化に対応して増減し、 $\theta \approx 0$ の点を越えては、非平衡の影響が伝播していないこと、および、近似式が、大きく外れていることである。このことは、斜面における非平衡性を評価する際に、 $\theta \approx 0$ の点をもって区分すべきこと、また θ の p に関する変化率が大きく $\lambda(\tan \theta)' \ll 1$ の条件が満たされない斜面では、平行移動による近似が困難になることを示している。したがって、いまの例では、 $p_*=1/3$ を境に2つの斜面に分け、非平衡性パラメーターを、次式のように表現するのがふさわしいものといえる。すなわち、

$$\bar{\lambda}_{*i} = |\bar{\lambda}_{i+1} - \bar{\lambda}_i| / L_i \dots (59)$$

ここに、 $\bar{\lambda}_{i+1}, \bar{\lambda}_i$ は、隣接する単位斜面ごとの $\bar{\lambda}$ であり、 L_i は、その斜面長である。

(2) 非平衡式、近似式の適用条件

平衡式および近似式の、非平衡式に対する相対差を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \int_0^1 \{ \bar{q}_{BP}(p_*) - q_{BP}(p_*) \} / q_{BP}(p_*) | dp_* \\ \hat{\lambda} &= \int_0^1 \{ \bar{q}_{BP}(p_*) - q_{BP}(p_*) \} / q_{BP}(p_*) | dp_* \end{aligned} \dots (60), (61)$$

はじめに、前節 b) のケースについて数値計算を行い直線斜面における相対差の性質を調べる。 $\nu = 0, 1/3, 1$ の3つの場合につき、 $\bar{T}_*, L/d, \tan \theta$ を種々に組み合わせることによって $\bar{\lambda}_*$ を変え、 $\hat{\lambda}, \hat{\lambda}$ を求めると、これらは、 \bar{T}_* の違いによっていくぶん異なるものの、 $\bar{T}_* > 5$ では、図一9 に示すように、 ν と $\bar{\lambda}_*$ によってほぼ一義的に定まる。特に $\hat{\lambda}$ に対しては、

$$\hat{\lambda} = \{ 2.11 / (\nu + 0.256) + 1.75 \} \bar{\lambda}_*^{1.12} \dots (62)$$

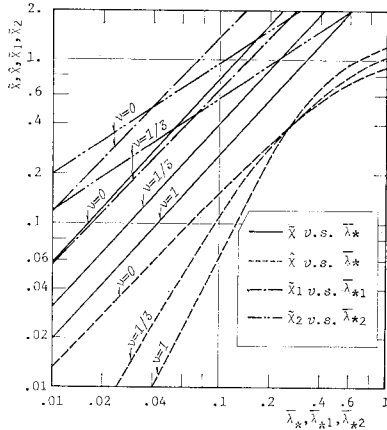


図-9 平衡および近似式と非平衡式の相対差のパラメーターによる変化

の表現が可能である。式の適用条件を考える際に、相対差の限界をいくらにとるべきかは、場合によるであろうが、いま、それらを 20% にとって条件を導く。

平衡式では不十分で、非平衡式を用いるべき場合の $\bar{\lambda}_*$ の範囲は、式 (62) の $\bar{\lambda}$ が 0.2 より大きいとすることにより、

$$\bar{\lambda}_* > 0.238 \{ 2.11 / (\nu + 0.256) + 1.75 \}^{-0.893} \dots \dots \dots (63)$$

このうち、近似式で十分な場合の条件は、図-9 から、

$$\bar{\lambda}_* < 0.13 (\nu=0) \sim 0.18 (\nu=1) \dots \dots \dots (64)$$

程度となる。これらは、式 (56) の掃流力分布をもつ特定の場合の値であるが、一般に単調な掃流力分布をもつ直線斜面に対しても、式の適用の目安として使用することが可能であろう。現実の河川では、 $\tan \bar{\theta} < 0.5$ 、 $\bar{T}_* < 50$ 、 $L/d > 1000$ の場合が一般なので、 $\bar{\lambda}_* < 0.07 (\nu=0) \sim 0.18 (\nu=1)$ のことが多く、したがって、直線斜面からもたらされる掃流砂量を見積るには、平衡式か近似式で十分であることがわかる。

次に、前節 e) のケースに関しては近似式が成立しないので、 $\bar{\lambda}$ のみに検討を加える。図-8 の $p_*=1/3$ の点をもって 2 つの斜面に分割し、上部斜面に対して $\bar{\lambda}_{*1} = \bar{\lambda}_1 / (1/3 \cdot L)$ および $\bar{\lambda}_1$ を、また下部斜面に対して $\bar{\lambda}_{*2} = (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) / (2/3 \cdot L)$ および $\bar{\lambda}_2$ を計算する。ただし、 $\bar{\lambda}_1$ 、 $\bar{\lambda}_2$ は、それぞれ $\bar{\theta}$ 、 $T_{*|p_*=1/3}$ および $\bar{\theta}$ 、 \bar{T}_* より計算される λ の値であり、 $\bar{\lambda}_1$ 、 $\bar{\lambda}_2$ は式 (60) の積分範囲をそれぞれ、 $0 \sim 1/3$ 、 $1/3 \sim 1$ としたときの $\bar{\lambda}$ の値である。先の例と同様に、 $\nu=0, 1/3, 1$ とし、変数を組み合わせて $\bar{\lambda}_{*1}$ 、 $\bar{\lambda}_{*2}$ を変えると、 $\bar{\lambda}_1$ 、 $\bar{\lambda}_2$ は、 $\bar{T}_* > 5$ に対して ν ごとにまとめ、図-9 の鎖線のようになる。曲線斜面の形状は、千差万別であり、しかもこれに対応して掃流力分布が異なるものと考えられるので、図の結果のみから一般的な適用条件を導くことは、無理であるが、 θ

≈ 0 で斜面を区分すべきこと、その場合の非平衡性のパラメーターが式 (59) で表現できること、および同じ $\bar{\lambda}_*$ に対して、 $\bar{\lambda}$ が直線斜面より大きめに表われ、非平衡式を用うべき範囲が式 (63) より広くなる傾向をもつことなどが察知される。

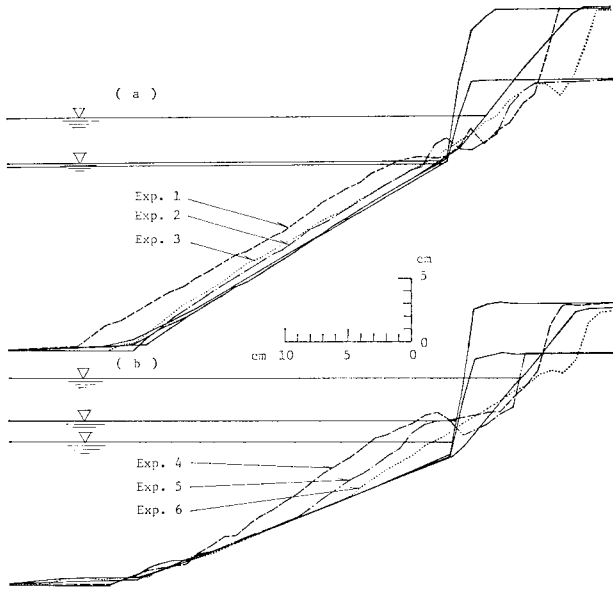
一方、斜面からもたらされる浸食量そのものではなく、側岸の浸食による変形を重視する立場からは、平衡式と非平衡式の p に関する導関数の違いが問題になる。図-7 (b) は、一例として前節 b) のケースの導関数を示すものであるが、 $\bar{\lambda}_*$ の値に応じて、平衡、非平衡両式の開きが大きくなっている。詳細は省くが、前記の方法と同様に、両者の相対差を求めると、浸食量の相対差に比べて小さな $\bar{\lambda}_*$ によって、有意な差が現われる。しかし、現実に重要なのは、洗掘速度の極大点の値であり、これは、平衡式によるものが常に大きい。したがって式 (63) の適用条件は、安全側をとることになり、これ以上に厳しい条件は不必要なものと思われる。

4. 側岸浸食過程に関する諸式

前章までに得られた横断方向流砂量式を流砂の連続条件式に適用することにより、横断面の変形過程を解析することができる。逆に、時間を隔てた横断面形の資料から、横断方向流砂量を間接的に推定し、これを理論と比較することも可能である。しかし、いかなる流路も、有限の側岸高を有しているので、浸食の進行とともにその一部分が水中に崩落する。その際問題となることは、崩落砂の堆積であって、理論によって導いた横断形状は、崩落砂による埋め戻しを加味したうえで、実際の形状と比較し得るし、また逆に、横断面の変形量から真の流砂量を推定するためには、崩落による分を加えることが必要である。

(1) 側岸崩落砂の堆積分布に関する実験

崩落砂が水中に広がった後どのような分布形状をもって堆積するかは、現在のところ、実験による以外に確実な推定法がない。しかし、流水中の側岸崩落砂の分布に関する実験は藤田⁹⁾による一例があるのみなので、側岸の崩落塊の落下速度が流速に比して十分大きいものと考え、静水中の崩落砂分布の実験を試みて、その応用を図ることにする。実験は、幅 60 cm、長さ 110 cm の水槽内に、後述の A 砂からなる種々の形状の側岸を設け、水位上昇によって崩落を発生させることによって行われた。図-10 (a) は、側岸の水中傾斜角が砂の水中安息角に近い場合の例であり、図-10 (b) は、同じくこれより小さい場合の例である。実験結果の再現性はよく、同一断面の側岸の崩落に対しては、ほぼ同一の堆積形状が



図一10 静水池における側岸崩落砂の堆積実験

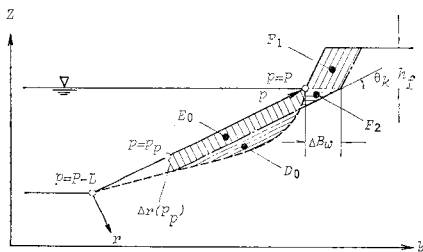
生ずる。これらの結果から得られる重要な結論は、崩落砂が斜面傾斜角の違いに無関係に、水中安息角をもって直線的な堆積を起こすということである。こうした現象は、流水中では異なる現われ方をするであろうが、後述するように、安息角を小さく見積ることにより、近似的に成立するものと見なし得るようである。

(2) 堆積分布を伴う変形過程

a) 崩落が連続的に生ずる場合

図一11のような流路を想定し、側岸の崩落が短い時間 δt の間隔で次々に発生するものとする。ある崩落直後の状態を初期断面と見なせば、この面は、安息角 θ_k に近い傾きをなし、図の実線がこれに相当する。その後、浸食が進行すると、図の破線の形になり、 δt 後には崩落によって一点鎖線の状態になる。このとき、崩落部の面積 $F_1 + F_2$ は、堆積面積 D_0 に等しく、また、 $D_0 + E_0$ は、堆積面の先端部（座標 p_p ）を通じて流出した見かけの浸食量に等しい。すなわち、

$$F_1 + F_2 + E_0 = D_0 + E_0 = [q_{Bp}(p_p)] \delta t / (1 - n_e) \dots (65)$$



図一11 側岸崩落を伴う流路断面のモデル

ここに、 n_e ：側岸構成砂の空隙率を 100 で除した値。一方、 p_p 点における洗掘深は、

$$\Delta r = [\partial q_{Bp} / \partial p]_{p=p_p} \delta t / (1 - n_e) \dots (66)$$

にて表わされ、さらに図の幾可学的関係から次式が成り立つ。

$$F_1 + F_2 + E_0 = \Delta r \cdot \{ |p_p - P| + h_f / \sin \theta_k \} \dots (67)$$

ここに、 h_f ：側岸の水上部分の高さ。式 (65) と (67) を等置し、 L で除した後整理すれば、

$$\frac{|p_p - P|}{L} = -h_f / (L \sin \theta_k) + \frac{|q_{Bp}(p_p)| / L}{[\partial q_{Bp} / \partial p]_{p=p_p}} \dots (68)$$

なる p_p に関する方程式が得られる。いま、 $|p_p - P| / L = p_{*p}$ 、 $h_f / (L \sin \theta_k) = h_{f*}$ とおき、掃流力分布を式 (56) で与えたときの結果を、図一12 に示す。さて、 p_p が定まったとき、断面の変形過程は、軸系を 図一11 のようにとり、時間を t としたとき、

$$\partial r / \partial t = [\partial q_{Bp} / \partial p]_{p=p_p} (1 - n_e), \quad (|p - P| < |p_p - P|) \dots (69)$$

$$\partial r / \partial t = (\partial q_{Bp} / \partial p) / (1 - n_e), \quad (|p - P| > |p_p - P|) \dots (70)$$

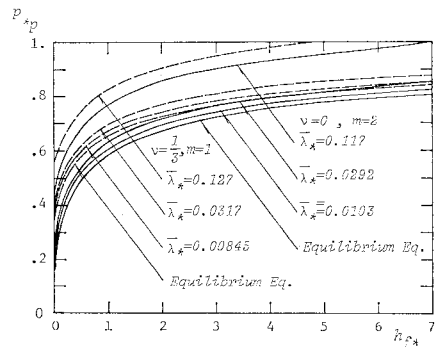
にて解くことが可能になる。すなわち、 p_p 点と水際点の間では、見かけ上洗掘が一様になり、流路幅 B_w の変化も、

$$dB_w / dt = [\partial q_{Bp} / \partial p]_{p=p_p} \{ (1 - n_e) \sin \theta_k \} \dots (71)$$

のように表わされることになる。このモデルは、平野³⁾ による拡幅モデルと同内容をもっており、 p_p は、彼が与えた斜面領域と河床領域の境界点に対応する。

b) 崩落が間欠的に生ずる場合

実際現象では、浸食がある程度進んだ後に、間欠的に崩落が発生することが多い。この点を重視すれば、拡幅量に対してあらかじめ崩落発生に限界値 ΔB_c を与え、



図一12 堆積の無次元長さに関する解

$$\left| \int_p^{p_p} \{r_t(p) - \Delta B_c \sin \theta_k\} dp \right| = h_f \Delta B_c + \frac{1}{2} \sin \theta_k \cos \theta_k \Delta B_c^2 \dots\dots\dots (72)$$

の条件が満たされるまで、崩落なしの条件で形状の時間変化を追う必要がある。ただし、 $r_t(p)$ は、時刻 t における p 点における洗掘深である。その際、変形が大きくなり、 $p-r$ 系による計算が困難になる場合は、図—11の $y-z$ 座標を用いて、

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{1-n_e} \frac{\partial q_{Bp}}{g_1 \partial p} \frac{\partial z}{g_1 \partial p} \dots\dots\dots (73)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{-1}{1-n_e} \frac{\partial q_{Bp}}{g_1 \partial p} \frac{\partial y}{g_1 \partial p} \dots\dots\dots (74)$$

$$g_1 = \sqrt{(\partial y / \partial p)^2 + (\partial z / \partial p)^2} \dots\dots\dots (75)$$

による解析が必要となる。

(3) 横断面変形量からの流砂量の推定

前節とは逆に、崩落を伴う場合の横断面の変形過程から、流砂量を推定することを考える。崩落砂の堆積が及ばない部分では、式 (70) からただちに、

$$\langle q_{Bp}(p) \rangle = (1-n_e) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_p^{p_p} r_t(p) dp + F_f \right\} \dots\dots\dots (76)$$

のように推定できる。ここに、 $\langle \rangle$ は推定値を意味し、 F_f は、実際上部の崩落面積の単位時間当たりの値であって、流砂の向きに関する符号を守れば、左岸で正、右岸で負となる。しかし、崩落砂の堆積する部分では、当初の断面形状に無関係に直線状となるので、 r のデータのみから推定値を得ることが不可能になる。そこで、一つの矛盾ではあるが、 q_{Bp} の理論式と、分布の直線性から、埋め戻された部分の砂量を決め、推定値を求めることにすれば、次式のようになる。

$$\langle q_{Bp}(p) \rangle = (1-n_e) \frac{\partial}{\partial t} \int_p^{p_p} r_t(p) dp + \phi(p) \dots\dots\dots (77)$$

$$\phi(p) = q_{Bp}(p) - [\partial q_{Bp} / \partial p]_{p=p_p} \cdot (p-P) \dots\dots\dots (78)$$

ここに、 $\phi(p)$ は、 p から P までの間で埋め戻された砂の、単位時間当たりの量を表わす。 p_p は、式 (68) から推測されるように、

$$\phi(p_p) = (1-n_e) F_f \dots\dots\dots (79)$$

から決まる。式 (77) は、崩落砂の堆積が十分直線的で、 p_p および p_p における浸食速度が理論と実測で一致する場合には、恒等的に $\langle q_{Bp}(p) \rangle = q_{Bp}(p)$ となり、一見無意味なようにみえるが、このことが起こるのは、与えた理論が現実に近いときのみなので、式の有効性は損われないものとい

える。

5. 実験による検証

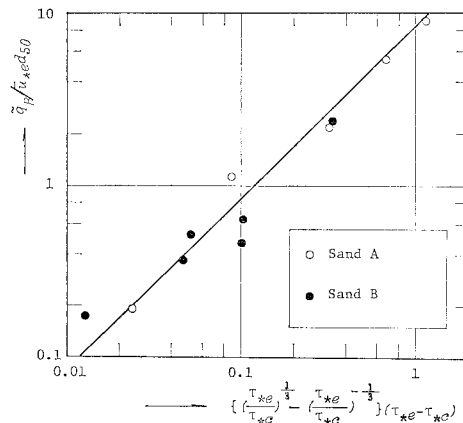
浸食量式の成立性を検討するために、以下の2種類の実験によって結果の比較を行う。その1は、浸食量の直接測定実験であり、他は、横断面の変形過程実験である。

(1) 予備実験

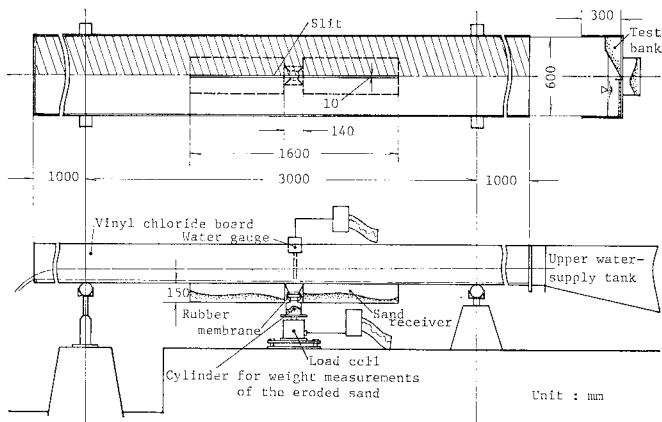
使用実験材料は、A砂、B砂の2種であり、表—1の諸元を有するが、これらの材料を用いたときの ν および m の値を知るために、河床上の掃流砂実験が行われた。図—13は、その結果を示すものであるが、いずれの砂

表—1 使用実験材料の諸元

Material Sand	Medium Diameter d_{50} (cm)	Grain-size Distribution	Specific Gravity ρ_s/ρ	Critical Tract. Force (after Iwagaki) τ_{sc}
A	0.0425	Uniform	2.661	0.041
B	0.0250	Uniform	2.831	0.053



図—13 河床流砂量測定実験の結果



図—14 側岸浸食量測定用水路の概要

表—2 側岸浸食量の直接測定実験における所与条件と測定結果

Run No.	Used Material	Discharge (l/s.)	Bed Slope	Effective Trct. Force τ_{*e}	Bank-erosion Discharge $q_{BP}/u_{*e}d_{50}$	$\bar{\lambda}_*$	h_{f*}	P_{*b}
S-1	A	5.0	1: 700	0.053~0.077	0.043~0.095	0.037~0.059	0.51~0.74	0.54~0.60
S-2	"	12.0	1: 700	0.108~0.125	0.076~0.168	0.037~0.088	0.05~0.09	0.52~0.54
S-3	"	6.0	1: 400	0.073~0.104	0.103~0.171	0.037~0.074	0.42~0.55	0.64~0.77
S-4	"	11.9	1: 400	0.121~0.146	0.159~0.264	0.034~0.114	0.01~0.12	0.54~0.58
S-5	"	6.0	1: 200	0.093~0.140	0.126~0.175	0.030~0.178	0.46~0.90	0.62~0.73
S-6	"	12.0	1: 200	0.167~0.203	0.409~0.563	0.048~0.136	0.12~0.20	0.60~0.64
S-7	"	6.0	1: 100	0.100~0.196	0.218~0.342	0.028~0.259	0.43~1.23	0.56~0.90
S-8	"	12.0	1: 100	0.406	1.022	0.074~0.281	0.31~0.51	0.79
S-9	"	6.0	1: 50	0.199	0.469	0.075~0.279	0.82~1.45	0.89

に対しても、 $\nu=1/3$, $m=1$ とした式 (45) が成立する。図によれば、式 (45) の係数は、ほぼ 8.5 程度となるが、これは、 $\varphi_d=8.5$, $\mu_s=1.0$ とした場合に相当する。ただし、有効掃流力の算定は、平坦河床の実験より得た相当粗度 $k_s \approx 2d_{50}$ (A砂) および $k_s \approx 3d_{50}$ (B砂) を用いて、勾配分割法 (A砂) および径深分割法 (B砂) によって行っており、以下の実験においても同様である。

(2) 浸食量の直接測定実験

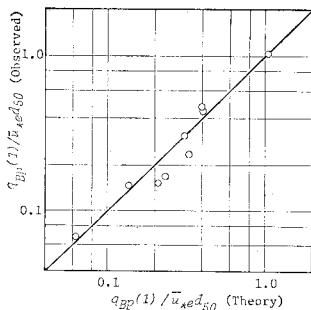
水路床に長さ 1.6 m, 幅 1 cm のスリットを設け、これを通じて落下する側岸浸食砂の一部を、直接荷重計によって測定する 図—14 に示すような装置の実験が、表—2 の条件によって行われた。

これらの実験は、浸食砂の路床堆積状態がスリット区間と他の区間とでは異なっていること、水路の絶対長の不足から、上下流端の影響が現われやすいことなど、水路全体としてはなり複雑な条件下に置かれている。しかし、測定部 (長さ 14 cm) を含むスリット区間に関する限り、側岸はほぼ一様な直線状斜面を形成し、部分的に等流状態と見なすことが可能である。問題は、この区間における局所的掃流力の計測であるが、エネルギー勾配の測定は上述の理由から難があるので、平均流速および径深の測定を綿密に行い、勾配分割法によって断面平均の有

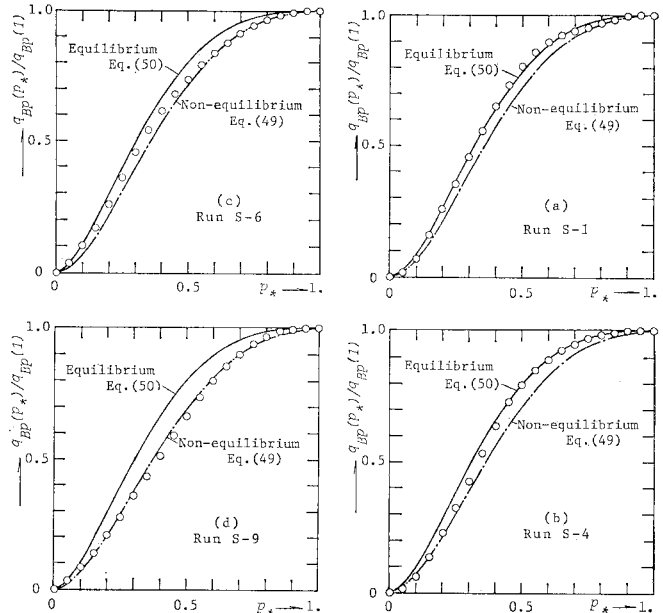
効掃流力を算定するとともに、式 (56) によってその分布を推定した。また、これらの実験は元来非定常的であるほか、実測浸食量が時間累加的にしか得られないので、一実験につき 2~4 回停水することによって必要水量の時間変化を求め、

これから算定される理論浸食量の時間平均を得て理論と実測の比較を行った。

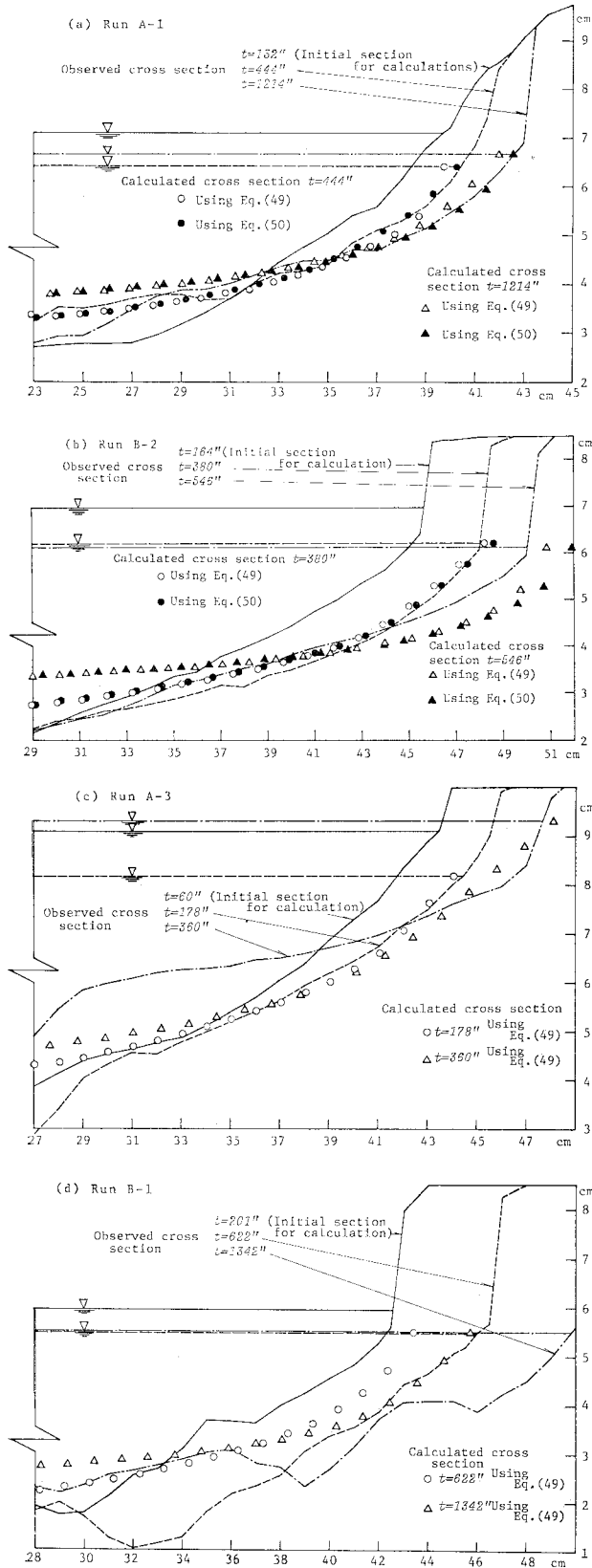
有効掃流力をはじめとする各パラメーターの時間変化は 表—2 に示すとおりであるが、 $\bar{\lambda}_*$ の最大値は 0.281 に達しており、これらの実験が非平衡式 (49) の検討にとって意味があることがわかる。図—15 は、上述の方法に従って、斜面下端 ($P_*=1$) における式 (49) の時間平均を求め、実測値と比較したものである。ただし、同式の計算には $\nu=1/3$, $m=1$, $\varphi_d=8.5$ を用いている。結果は、理論・実験とも多くの問題を有しているにもかかわらず、よい一致を示しているものといえる。ただし、これらは、非平衡性の弱まる $P_*=1$ という点に対する評価である。斜面の任意点における浸食量に関しては、実測値が存在しないので、式 (76), (77) を用いた検討を行わざるを得ない。 $\bar{\lambda}_*$ および h_{f*} の組合せが異なる 4 例の実験に関して、 $q_{BP}(P_*)/q_{BP}(1)$ の理論値と推定値を比較すると、図—16 (a)~(d) のようになる。



図—15 斜面末端における浸食量の理論値と実験値の比較



図—16 任意点における浸食量の理論曲線と推定値



図中には、式 (49) のほかに、平衡式 (50) が描かれているが、近似式は、式 (49) にほぼ重なるので省いてある。プロットされた推定値の計算に必要な n_e の値は、スリットを通じて落下した浸食砂の体積と斜面の変形量から得られる見かけの体積の比から 0.50 を与えている。

各実験における p_{*p} の値は、大部分が 0.7 以下であり、 $p_{*} > 0.7$ では崩落の影響が及んでいないので、この範囲で図をみると、推定値は比較的よく、式 (49) のまわりに集まっている。しかし、式 (50) 上にある例もあり、掃流力分布が明瞭でない現在、確定的な判断は難しい。 $p_{*} < 0.7$ における評価は、さらに困難であるが、4. (2) 節が考察したように、式 (49) あるいは式 (50) が、現実の浸食量に近いものであること、崩落砂の堆積が直線的としたモデルの成立性がよいことを示している。

(3) 浸食過程に関する実験

前節で述べた水路のスリットを密閉したのち、実験砂によって、 $B/2=30\text{ cm}$ 、 $\theta=30^\circ$ の半台形断面流路を設け、一定時間の通水後に浸食形状を測定する実験が行われた。ここに示すものは、解析にとって重要な 4 例であり、表-3 の条件で実施されたものである。図-17 (a)~(d) は、これらの測定結果を、理論による計算結果と比較して描いたものである。はじめに、これらの計算の方式に関して説明する。変形過程のモデルとして 4. (2) の b) を用いることにし、 $\Delta B_c=0.3 h_f$ 、 $\tan \theta_k=0.4$ を、実測の平均を参考にして与え、他の定数は、前節と同様とする。掃流力分布は、最も問題となるところであるが、式 (56) をそのまま用い、平均有効掃流力、水位など流れの運動に関わる変量は、停水時ごとに得た実測値を時間的に比例配分して与える。計算の初期断面は、第 1 回の停水時に選び、河床波が存在する場合は、その頂点において斜面を分割する。式 (73)~(75) から、 y 、 x を求めるために、時間に関する前進差分を用いるが、距離軸は、断面形状に三次のスプライン関数をあてはめることによって与え、時間ステップごとに更新する。こうすることによって、計算過程に含まれる $\theta(p)$ 、 $\theta'(p)$ からもたらされる誤差が減少する。また、計算の安定条件は、断面形状の局所的な曲率と、平衡式を

図-17 断面変形過程実験の測定結果と計算値の比較

表—3 断面変形過程実験の所与条件と結果

Run No.	Used Material	Discharge (l./s.)	Initial Bed Slope	Effective Tract Force τ_{*e}	Initial Value of λ_*
A-1	A	5.7	1:400	0.106~0.168	0.049
A-3	A	12.1	1:200	0.173~0.306	0.035
B-1	B	7.5	1:500	0.229~0.293	0.055
B-2	B	14.6	1:500	0.417~0.534	0.099

用いた洗掘速度との関係から、

$$dt \leq \frac{0.1(1-n_e) \Delta p^2}{K_1 / \mu_s \cdot m \sqrt{\epsilon_1} \{ \sqrt{m T_*^{(3p-1)/2}} - \bar{T}_*^{p-1} \} (\bar{T}_* - 1) \bar{u}_{*e} d_{s0}} \dots \dots \dots (80)$$

を用いる。ここに、 dt , Δp はそれぞれ t , p に関する差分間隔。

図—17 (a), (b) は、初期断面が平坦河床の場合の例であるが、水平部分を除いて計算値と実測値の一致の度合はよい。実測において、水平部が低下一方になっているのは給砂がなされなかったことが原因している。同図には、非平衡、平衡の両式による結果が示されている。非平衡性の強い Run B-2 においては、平衡式による計算値が過大となっている一方、Run A-1 では、平衡式によるものの方が実測に近く、 $\bar{\lambda}_* = 0.05$ すなわち式(63)の限界値程度では、掃流力をはじめとする水理量の誤差によって両者の適、不適の判別は難しくなる。図—17 (c), (d) は、いずれも河床波が発達した場合の例であるが、Run A-3 では河床波発達の前段の状態を、Run B-1 では発達後を初期断面にとって計算を進めている。Run A-3 は、河床波の発達前で計算と実測が非常によく合っているが、発達後では両者の差は著しい。また、Run B-1 は、当初から計算と実測の違いが明瞭であり、計算値が過小に表われている。これらの結果から以下の事柄が指摘できる。すなわち、仮定した掃流力分布が実際のもに近くなる平坦河床の場合には、計算と実測が一致し、この限りで式(49)および(50)ならびに計算方式の正しさが検証されている。その場合、 $\bar{\lambda}_*$ が式(63)の条件を外れる程度になると式(49), (50)両式のいずれかの優越性を特定できなくなる。また、掃流力分布を不変なものとする限り、計算においては、初期断面の起伏が消滅し、実態に合わなくなる。この場合の実際の変形は計算値より大きく、河床波の発達に伴う局所的な掃流力の増加が認められる。

6. 結 論

前章までに明らかにされた事柄を要約すれば、以下の箇条書によって整理される。

(1) 流路側岸を構成する静止砂粒が移動を始めて後、定常運動に至るまでに要する時間は、一般に非常に短く、流路の変形に伴う非定常性は、砂粒運動に直接及

ばない。しかし、移動を開始する際の慣性抵抗は無視できず、浸食現象の非平衡性の原因をなしている。

(2) 流れの掃流力が、定常運動中の砂粒群の衝突による抵抗と、移動開始時の砂粒群の慣性抵抗、および流体自身の抵抗の三者の線形和に等しいものと考えることにより、側岸の任意点における非平衡浸食量が、式(49)の形に導かれる。また、慣性抵抗の項を零と見なすことにより、平衡時の式(50)が導かれる。浸食量の直接測定実験および横断面の変形過程の実験による検証では、これらの式は、おおむね成立する。

(3) 浸食過程にある斜面系の非平衡性の強さは、砂粒の平均移動距離に対応する長さ λ の、斜面全体にわたる変化率 λ_* (式(55))によって表わすことができ、非平衡式と平衡式の相対差は、ほぼ一義的に、 λ_* の関数となる。また、傾斜角の場所的变化が小さい斜面では、平衡式を λ だけ平行移動することにより、非平衡式の近似化が可能となる。

(4) 掃流力分布が緩やかに変化する直線斜面に関しては、非平衡式および近似式の適用範囲が式(63)および(64)にて与えられ、実験においても確かめられた。これらによれば、一般の流路では、浸食量および洗掘形状の見積りに、平衡式あるいは近似式を用いても不都合が起こらないものと考えられる。

(5) 曲線斜面において、傾斜角が零となる点が含まれる場合には、非平衡性がこの点を越えて伝播することはない。したがって、 λ_* の評価は、傾斜角が零となる各点で区切られた単位の斜面について行う必要がある。

(6) 側岸の崩落に関する静水池実験によれば、崩落砂はもとの形状によらず、一定勾配で堆積する。この結果は、堆積勾配を小さめに見積ることにより、流水中にも適用することができる。その場合、堆積の先端の位置は、式(68)または式(79)にて求めることができる。

(7) 横断面の変形過程は、側岸の崩落が、時間的に連続的か、間欠的かによって異なる。前者に対しては、崩落砂の堆積範囲で式(69)、堆積の及ばない範囲で式(70)が適用される。後者に関しては、式(73)~(75)による浸食面積が限界の崩落幅から計算される崩落面積に等しくなった場合に、崩落を認め、直線状の堆積を与えるという、やや技巧的な方法が必要となる。

(8) 流路に河床波が存在する場合には、掃流力分布を固定して考える限り、計算結果が実態から大きく外れる。

河床波上の掃流力分布の特性を加味した側岸浸食過程の動的解析は、河床波の発達機構にもかかわり、今後の大きな課題となる。

謝 辞：本論文は、著者が、この5年間に行ってきた研究をとりまとめたものであるが、この間、山岡 勲

教授ならびに岸力教授の懇切なご指導と有益なご討議をいただいていた。また、実験ならびに計算プログラムの作成は、道口敏幸技官および、当時在学中の長田京司君らの助力を多としている。計算は、北海道大学大型計算機センター HITAC-180 を利用した。末尾ながら、上記の方々ならびに関係者の方々に深謝の意を表す次第である。

参 考 文 献

- 1) 芦田和男・村本嘉雄・奈良井修二：河道の変動に関する研究(2)——安定流路の形状と形成過程——，京大防災研究所年報第14号B, 1971.
- 2) 村本嘉雄・田中修市・藤田裕一郎：河道の変動に関する研究(3)——流路変動の一次元解析と蛇行流路の形成過程——，京大防災研究所年報第15号B, 1972.
- 3) 平野宗夫：拡幅を伴う流路変動について，土木学会論文報告集第210号, 1973.
- 4) 藤田裕一郎：直線流路の側岸侵食機構，京大防災研究所年報第22号B-2, 1979.
- 5) 長谷川和義・長田京司：直線状流路の側壁侵食機構に関する研究，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集，II-224, 1977.
- 6) 長谷川和義：直線状流路の側壁侵食機構に関する研究(2)，同上第33回概要集，II-273, 1978.
- 7) Luque, R.F. and R. van Beek : Erosion and Transport of Bedload Sediment, Journal of Hydraulic Research, IAHR 14 No. 2, 1976.
- 8) Graf, W.H. and G.C. Paxis : Les Phenomenes de Deposition et d'Erosion dans un Canal Alluvionnaire, Journal of Hydraulic Research, IAHR 15 No. 2, 1977.
- 9) 中川博次・辻本哲郎・宮本博司：16mm撮影による掃流砂運動の特性量解析と流砂の平衡状態について，京大防災研究所年報第21号B-2, 1978.
- 10) Bagnold, R.A. : The Flow of Cohesionless Grains in Fluids, Philosophical Trans., Royal Soci. of London, Vol. 249 A., 1957.
- 11) 芦田和男・道上正規：移動床流れの抵抗と掃砂流量に関する基礎的研究，土木学会論文報告集第206号, 1972.
- 12) 中川博次・辻本哲郎・細川泰廣・村上正吾：平坦河床上の砂れきの運動機構解明における確率論的取り扱い，土木学会第24回水理講演会論文集, 1980.
- 13) 椿東一郎・斉藤 隆：流れによる Sand Wave の発生限界，九大工学集報第40巻第5号, 1967.
- 14) Tsuchiya, Y. : On the Mechanism of the Local Scour from Flows Downstream of an Outlet, Proc. 12th Congress of IAHR, Vol. No. 3, 1967.
- 15) Ippen, A.T. and P.A. Drinker : Boundary Shear Stresses in Curved Trapezoidal Channels, Proc. ASCE Vol. 88, No. HY 5, 1962.

(1980.10.14・受付)