

鋼板要素の座屈後における有効幅理論と設計への適用

EFFECTIVE WIDTH AND DESIGN FOR STEEL STRUCTURAL PLATES

長谷川 彰 夫*・宇佐美 勉**
By Akio HASEGAWA and Tsutomu USAMI

1. まえがき

鋼構造物および鋼構造部材に対する非線形、非弾性解析が進歩するとともに、板要素の後座屈挙動に関する検討も進み、有効幅理論の工学的重要性が土木・建築の分野でも認識されつつある。板要素の座屈後の有効幅に関しては、航空機、船舶等の分野で古くから注目を集め、圧縮を受ける板の座屈後の弾性挙動の解をもとに Marguerre, Sechler, Koiter らにより実用評価式が提案されている¹⁾。また、冷間加工鋼部材を対象とする建築の分野でも、von Karman²⁾, Winter^{3), 4)}, Lind⁵⁾ らによる有効幅公式が用いられている。

一方、土木鋼構造の分野では有効幅理論の設計への適用はまれであるが、板要素の強度評価は座屈強度から終局強度へと設計式の関心も移りつつあるのも事実である。このノートでは、従来、鋼構造物の設計に適用されている有効幅理論を整理して見直し、土木・建築構造物の特性を考慮したうえで有効幅理論の適用法について考察する。さらに、土木・建築技術者にとって理解しやすい幅厚比の関数としての板の終局強度の立場から、有効幅理論を表現することを試みる。

なお、土木・建築を含めた諸分野で発表されている有効幅公式を集大成し、概説を加えたものに文献 6) があり、本ノートの内容と類似する部分も多い。しかしながら、この文献は単に一般の土木技術者が入手しにくい論文であるのみならず、かなり専門的な内容となっており本ノートで主張しようとしている有効幅理論の実用面における重要性を認識してもらうことは難しいと考え、あえて本ノートを発表するものである。

2. 有効幅理論の鋼構造部材に対する適用

純圧縮を受ける板の有効幅の概念図を Fig. 1 に示す。ここでは、鋼構造部材、特に冷間加工鋼部材の設計に対して一般に用いられている von Karman, Winter, Lind の式を例に考察する。

板の座屈応力 σ_{cr} は一般に、

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{w^2 t} \quad \text{ただし, } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots (1)$$

で表わせる。式 (1) を変形すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{w}{t} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{E}} &= m \\ \text{ただし,} \\ m &= \frac{\pi \sqrt{k}}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} = 0.951 \sqrt{k} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)'$$

ここで、 w, t は板幅、板厚、 k は座屈係数、 E, ν は弾性係数、ポアソン比であり、式 (1)' では $\nu=0.3$ とした。両側辺単純支持の場合、式 (1)' の m は、

$$m = 1.9 \quad (k=4.0)$$

と評価される。

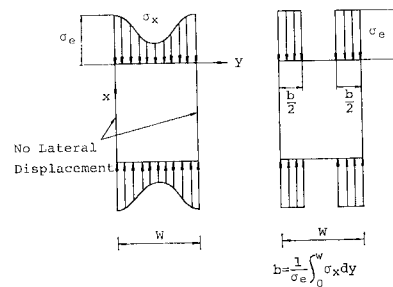


Fig. 1 Concept of Effective Width.

(1) von Karman の有効幅

a) von Karman²⁾ は最初に $\sigma_{cr} = \sigma_y$ となる板幅を実際の板幅に無関係に有効幅と考えた。すなわち、圧縮応

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 土木工学科

** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

力が降伏応力 σ_y に到達すると同時に弾性座屈が発生するような板の特別な幅を有効幅とよんだ。両側辺単純支持のもとで、式 (1)' に $\sigma_{cr} = \sigma_y$, $w = b$ (b は有効幅) を代入すると

$$b = 1.9 t \sqrt{E/\sigma_y} \dots\dots\dots (2)$$

を得る。式 (1)', (2) より、有効幅評価式は、

$$b/w = \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_y} \dots\dots\dots (2)'$$

と表現することもできる。式 (2), (2)' は側辺の応力 σ_e が $\sigma_e = \sigma_y$ の状態を表わし、側辺の面外剛性が高い場合の終局状態 (最高荷重時) での有効幅を表わす。

b) 側辺の面外剛性が弱い場合の終局状態、または、終局状態に至る前の座屈後の任意荷重時では、側辺応力 σ_e が降伏応力 σ_y に至らない場合がある。このときは、式 (2), (2)' の σ_y が σ_e に変わり

$$b = 1.9 t \sqrt{E/\sigma_e} \dots\dots\dots (3)$$

または、

$$b/w = \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_e} \dots\dots\dots (3)'$$

となる。式 (3)' 自身は特に理論的根拠をもつわけではないが、 b/w が σ_{cr}/σ_e の関数で与えられる点で、精密な計算にある程度の根拠をもつ Marguerre その他の結果に共通する。

式 (3) は式 (2) の拡張であるが、実際の鋼構造部材の終局状態では、側辺が降伏応力に到達する場合はほとんどであることを考えると、次のような本質的な相違がある。

終局状態

$$b = 1.9 t \sqrt{E/\sigma_y} \dots\dots\dots (2)$$

座屈後から終局までの状態

$$b = 1.9 t \sqrt{E/\sigma_e} \quad (\sigma_e < \sigma_y) \dots\dots\dots (3)$$

支持側辺が必ずしも強固でない場合には、式 (3) で終局状態を表わすことも論理的にあり得るが、鋼構造部材での具体例は少なく、また、あったにしても、所詮、近似式としての性格を考えると、式 (2) と大きく異なるものではない。

一方、設計への適用の観点から考えると、式 (2) と式 (3) は計算手続において非常に異なる。すなわち、式 (2) では、試行錯誤計算を必要とせず、簡単に処理できるのに対し、式 (3) は側辺応力 σ_e そのものも有効幅 b に依存するため、一般にはかなりの繰り返し計算が必要とされる。終局状態に対する計算では、式 (2) と式 (3) の適用による結果の差違が少ないことを考えると簡単な計算で済む式 (2) の適用が積極的に検討されるべきであろう。

ただし、たわみ、剛性など終局状態に至る前の変形性能を正確に知る必要のある場合は、式 (3) の繰り返し計算を前提とする有効幅式を適用しなければならない。

(2) Winter の有効幅

Winter の有効幅公式^{3),4)}は、Karman の式 (3) を実験データで検証のうへ、修正したもので、

$$b = 1.9 t \sqrt{E/\sigma_e} (1 - 0.415(t/w) \sqrt{E/\sigma_e}) \dots\dots (4)$$

または式 (3)' にならって、

$$b/w = \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_e} (1 - 0.22 \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_e}) \dots\dots\dots (4)'$$

で与えられる。この公式は、米国の冷間加工鋼部材の設計に関する AISI 示方書 (1969)⁷⁾ に採用されている。

(3) Lind の有効幅

Lind の有効幅公式⁸⁾は、Karman, Winter の式を参考にしながら、実験データの回帰分析により統計学的に求めた単純化された実験式で、

$$b = 1.64 t \sqrt{E/\sigma_e} \dots\dots\dots (5)$$

または、

$$b/w = 0.86 \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_e} \dots\dots\dots (5)'$$

で与えられる。この公式は、カナダの冷間加工鋼部材の設計に関する示方書 CSA-S 136 (1974)⁹⁾ で採用されている。

通常、鋼構造の設計に用いられている式 (3)~(5) は、設計の際、試行錯誤による計算が要求されるが、前に述べたように、終局状態に対する計算は、

$$\sigma_e = \sigma_y$$

とおいて十分と思われる。このようにすれば、有効幅の計算に不可避免的に必要と考えられていた繰り返し計算は不要となり、設計が簡素化される。この場合、われわれが対象とする土木・建築構造物では実用上問題となる誤差を生ずることは少ないと考えてよい。

3. 有効幅公式の基本パラメーターと図による表現

式 (3)~(5) に与える有効幅公式の例を表現する際には、次のパラメーターを定義すると便利である。

有効幅パラメーター

$$B_e = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}} \quad \text{または} \quad B_y = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \dots\dots (6 \cdot a)$$

全幅パラメーター

$$W_e = \frac{w}{t} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}} \quad \text{または} \quad W_y = \frac{w}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

有効幅の慣用的な表現式 (3)~(5) はこれらのパラメーターを用いて次のように統一的に表現される。

$$B_e = \bar{m} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$\bar{m} = \begin{cases} 1.9 & \text{von Karman} \\ 1.9(1 - 0.415/W_e) & \text{Winter} \quad \dots (8) \\ 1.64 & \text{Lind} \end{cases}$$

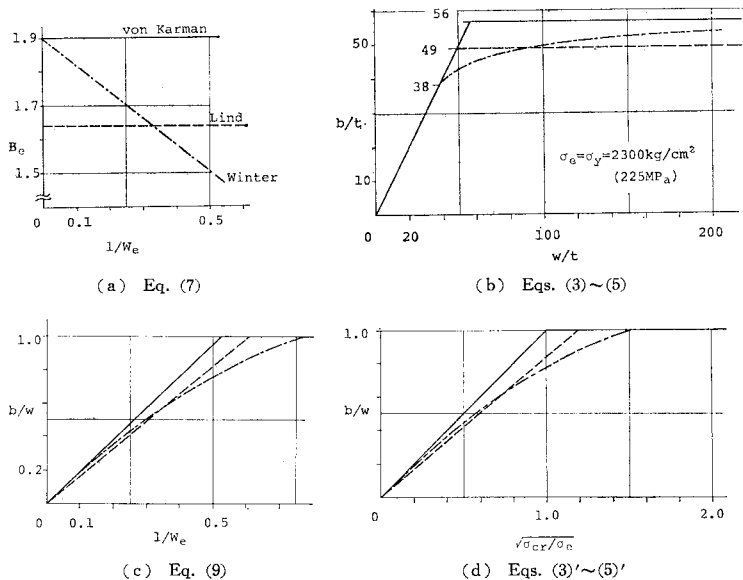


Fig. 2 Graphical Presentation for Effective Width Formulae (Solid : von Karman, Dot and Solid : Winter, Dot : Lind).

有効幅のいま一つの慣用的表現式 (3)'~(5)' は、式 (7) を W_e で割ることにより統一的に表現される。

$$b/w = \bar{m}/W_e \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 \bar{m} は式 (8) と同一である。ただし、当然のことながら、有効幅の定義より、

$$b \leq w$$

であることに注意しなければならない。式 (7)、式 (3)~(5)、式 (9)、および式 (3)'~(5)' による有効幅の表現は、それぞれ Fig. 2 (a)~(d) に図示される。ここで取り上げた有効幅公式のほかに、種々の分野でかなり多くの有効幅公式が提案、利用されているが、基本的には、ここでまとめたように表現され、図示され得ることは注意されてよい。実用鋼構造部材のように $\sigma_e = \sigma_y$ と考え得る場合には、パラメーター B_e 、 W_e の代わりに B_y 、 W_y を用いればよい。

4. 有効幅理論と耐荷力公式

簡単のため、座屈後から終局状態に至るまでの負担強度を終局強度に含め、 P_u と表示する。したがって、 P_u は必ずしも最高強度のみを意味しない。Fig. 1 の板に対して、

負担強度

$$P_u = b t \sigma_e$$

断面の降伏強度

$$P_y = w t \sigma_y$$

したがって、降伏強度で無次元化した板の負担強度は、

$$P_u/P_y = (b/w) (\sigma_e/\sigma_y) \dots\dots\dots (10)$$

と表わすことができる。

いま、弾性座屈強度を負担強度とみなす場合には、

$$P_u/P_y = \sigma_{cr}/\sigma_y = 1/\lambda^2$$

ここで

$$\lambda = \frac{w}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \dots\dots\dots (11)$$

と考えることができる。

有効幅理論によって表現される後座屈強度を考慮した負担強度は、式 (10) で与えられ、ここで取り上げた有効幅公式 (3)'~(5)' を適用すれば、最終的に座屈パラメーター λ を用いて以下のように表現される。

1) von Karman の有効幅

$$\begin{aligned} \frac{P_u}{P_y} &= \frac{b}{w} \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}} \frac{\sigma_e}{\sigma_y} = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_y}} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}} = \sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$\alpha = \sigma_e/\sigma_y$$

2) Winter の有効幅

$$\begin{aligned} \frac{P_u}{P_y} &= \frac{b}{w} \frac{\sigma_e}{\sigma_y} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}} \left(1 - 0.22 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}}\right) \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_y}} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}} \left(1 - 0.22 \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_e}} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}}\right) \\ &= \sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{0.22}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

3) Lind の有効幅

同様に、

$$\frac{P_u}{P_y} = 0.86 \sqrt{\alpha} \frac{1}{\lambda} \dots\dots\dots (14)$$

$\alpha = \sigma_e/\sigma_y < 1$ は側面負担応力が降伏応力に到達しない場合であり、実質的には、終局状態以前の座屈後の板の負担強度を表わす。

実用上のほとんどの鋼構造部材のように、終局時において側面が降伏に至ると考えてよい場合は、 $\alpha = 1$ となり、単純化される。このとき、たとえば von Karman の有効幅理論に基づく耐荷力は、式 (12) より、

$$P_u/P_y = 1/\lambda \dots\dots\dots (15)$$

となり、式 (11) の弾性座屈強度に対応して非常にわかりやすく簡単な式となる。この場合はもちろん有効幅理論特有の繰り返し計算は必要としない。Winter, Lind の式についても同様である。

以上の考察から、板の耐荷力は一般に、

$$\left. \begin{aligned} P_u/P_y &= c/\lambda \\ \text{または,} \\ P_u/P_y &= f(1/\lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

のような形で一般化でき、定数 c や関数 f は荷重条件や周辺拘束条件、または残留応力や初期たわみの性状などに依存して決定されるものと考えられる^{9),10)}。

われわれが対象とする土木・建築分野の鋼構造部材では、支持側辺を単純支持と考えて板要素の設計を行う場合がほとんどである。

ここで注意すべきことは、単純支持条件は弾性状態だけでなく、崩壊に至る非弾性状態でも適用しているのが普通で、このような条件下では、側辺が終局状態に至ったときは、必ず降伏すると考えるのが自然であろう。これは単純支持条件だけでなく、固定条件も含めて、単純支持よりも強い拘束条件をもつ場合にも該当する。

一方、われわれが対象とする鋼構造部材の設計では、板要素の耐荷力式が式 (16) に示すような座屈パラメーター λ の関数で与えられるのが普通である。今後、後座屈強度を積極的に利用する設計法を考える場合、式 (3) ~ (5) で代表される古典的な有効幅公式の表現を採用するよりも、式 (16) で表わされるような座屈パラメーター λ の関数としての耐荷力式による表現が一般的で好ましいと考えられる。

式 (16) の表現に基づく式 (12) ~ (14) の有効幅理論の結果を Fig. 3 に示す。参考までに、側辺応力 σ_e が $\sigma_e < \sigma_y$ の場合の結果の例も、Fig. 3 に与えるが、これは終局強度というより、終局に至る前の板要素の負担強度と理解すべきもので、耐荷力としての実用上の意味はほとんどない。

参 考 文 献

1) たとえば、Szilard, R. : Theory and Analysis of Plates,

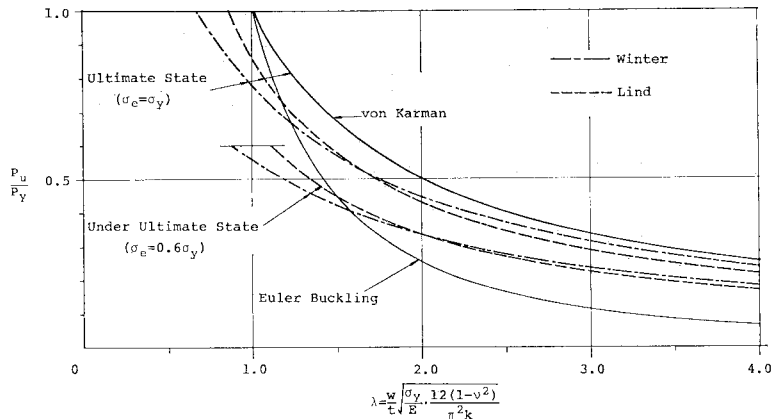


Fig. 3 Ultimate Strength Curves due to Effective Width Formulae.

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.
 2) von Karman, T., E.E. Sechler and L.H. Donnell : The strength of thin plates in compression, Trans. ASME, Vol. 54, pp. 53~57, 1932.
 3) Winter, G. : Strength of thin steel compression flanges, Trans. ASCE, Vol. 112, pp. 527~554, 1947.
 4) Winter, G. : Performance of thin steel compression flanges, Preliminary Publication, 3rd Congress of IABSE, Liege, pp. 137~148, 1948.
 5) Lind, N.C., M.K. Ravindra and G. Schorn : Empirical effective width formula, Proc. of ASCE, ST Div., Vol. 102, No. ST 9, pp. 1741~1757, Sept., 1976.
 6) Faulker, D : A Review of Effective Plating for Use in the Analysis of Stiffened Plating in Bending and Compression, Jour. of Ship Research, Vol. 19, No. 1, pp. 1~17, March, 1975.
 7) AISI : Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, 1968, American Iron and Steel Institute.
 8) CSA : Cold Formed Steel Structural Members, CSA Standard S 136, Canadian Standards Association, 1974.
 9) 宇佐美 勉 : 板要素の抵抗強度の評価と信頼性, 第35回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第1部, pp. 669~670, 1980年9月.
 10) 長谷川彰夫・稲吉明男 : プレート・ガーダーの抵抗強度の評価と信頼性, 第35回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第1部, pp. 671~672, 1980年9月.

(1980.8.20・受付)