

スペクトル解析を利用した再曝気係数の推定法

AN ESTIMATION OF REAERATION COEFFICIENT IN NATURAL
STREAMS BY SPECTRAL ANALYSIS OF TIME SERIES DATA

松尾 友 矩*・四 倉 信 弘**

By Tomonori MATSUO and Nobuhiro YOTSUKURA

1. はじめに

河川や湖沼における汚染状態を測る一つの指標として、水中の溶存酸素(DO)が使われている。そして水系における溶存酸素の消長をいかに予測するかという問題は Streeter-Phelps¹⁾ の先覚的な研究以来変わることのない古くてかつ新しい問題である。

溶存酸素の挙動は水中での酸素の収支を取ることにより記述され、その一般的な形はすでに確立されたモデルになってきている。しかしながら、このモデルを有効に機能させるためにはいまだ解決しなければならない問題が残されていることも事実である。これらの問題の一つに、“モデルに含まれる諸係数値を実用的なレベルでいかに簡便な方法で、しかも対象としている河川に即した形で定量的に求めていくか”という問題がある。

本論文はこの間に対して、Schurr・Ruchti²⁾ の方法を参考にしながら、一観測地点での時系列データのスペクトル解析から諸係数値(特に再曝気係数)を求める方法について検討した結果の報告である。

ここに示す方法の特長は、① 実際河川での再曝気係数をすでに標準化されている統計処理によって簡便にもとめられる。② いくつかの係数値を個別のプロセスでそれぞれ推定していくことが可能である、という点にある。

2. 問題の所在と解説

(1) 位相差に基づくモデルについて

一階の常微分方程式(式(1))を考える。

$$\frac{dC(t)}{dt} + KC(t) = G \cos \theta t \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 K, G は正の定数。

初期条件として、 $t=0$ で $C=C_0$ を与えるとき、式(1)の解は式(2)として求められる。

$$C(t) = \frac{G}{\sqrt{K^2 + \theta^2}} \cos(\theta t - T) + \left(C_0 - \frac{G}{\sqrt{K^2 + \theta^2}} \cos T \right) e^{-Kt} \dots\dots\dots(2)$$

ただし、

$$T = \tan^{-1}(\theta/K) \dots\dots\dots(3 \cdot a)$$

または、

$$K = \theta / \tan T \dots\dots\dots(3 \cdot b)$$

T : 外力項との位相差

ここで t を十分大きくとった時点を考えれば式(2)は式(4)と簡単化して表わされる。

$$C(t) = \frac{G}{\sqrt{K^2 + \theta^2}} \cos(\theta t - T) \dots\dots\dots(4)$$

ここで、溶存酸素の時間変化が主として日照強度の時間変化に伴う光合成量(酸素の発生量)によって支配されているような状況を考え、式(1)中の $C(t)$ を溶存酸素濃度、 $G \cos \theta t$ で示される外力項を日照強度とみなせる場合には(このような場合を特定していくことが本論文の一つのポイントである)、日照量の時間変化と溶存酸素濃度の時間変化の位相差(式(2)における T)を求めることにより、再曝気係数に相当する定数 K を式(3・b)によって求めることができる。

この原理的な取扱いは Schurr と Ruchti の研究に負うものではあるが、本論文はこれをさらに改良して、① 水温変化に伴う飽和溶存酸素量の変化を取り入れるようにしたこと、② 必要記録長を3日間程度にまで縮小できるようにしたこと、③ 最小読み取り間隔を2~3時間ごとと大きくできるようにしたこと、④ 不適当な時系列データを排除する基準的な指標とその大きさを定めたこと、⑤ この方法の適用される状況についての解析を

* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部都市工学科

** 正会員 Ph.D. アメリカ合衆国内務省地質調査所水理研究室

加えたこと、の5点を追加したことを特長とするものである。

しかし、一般的に記述される酸素収支式を式(1)のような簡単な形の関係にまで導くことは必ずしも自明のことではない。したがって、単純化のために必要になる条件(仮定)の明確化、条件を確認していくプロセスが問われることになる。

(2) 酸素収支式とその解

水中の溶存酸素濃度を支配する主たる要素として、移流による輸送、縦分散などによる混合、水面における再曝気、水中微生物による有機物分解に伴う酸素消費、光合成生物による酸素生成を考えると、溶存酸素の収支を一次元的に表わす関係は式(5)のように示される。

$$\frac{\partial}{\partial t}(AC) + \frac{\partial}{\partial x}(AVC) = \frac{\partial}{\partial x} \left(AD_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + K_L B(C_s - C) - AK_1 XL + A\alpha YI \dots (5)$$

ただし、

- A: 流水断面積
- B: 流路の水面積
- C: 溶存酸素濃度 (断面平均値)
- C_s: 飽和溶存酸素濃度
- D_x: 縦分散係数
- I: 水中における日照強度 (断面平均値)
- K₁: 脱酸素定数
- K_L: 水面における酸素移動にかかわる液膜係数
- L: BOD で表わした有機物濃度 (断面平均値)
- V: 平均流速 (断面平均値)
- X: 脱酸素に有効な微生物量 (断面平均値)
- Y: 光合成に有効な生物量 (断面平均値)
- α: 日照強度を酸素生成量に換算するための係数 (溶存酸素発生率)

この関係式は流れの状態については(仮定1)定常等流を仮定し、H=A/Bで定義される平均水深を導入することにより式(6)と変形される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_2(C_s - C) - K_1 XL + \alpha YI \dots (6)$$

ただし、

$$K_2 = K_L/H: \text{再曝気係数}$$

ここで、(仮定2)式(6)におけるD_x, K₂, K₁, α, およびX, Yは考えている期間、区間で一定であると仮定し、さらに(仮定3)C, C_s, Iの変数は、それぞれが時間平均の項と変動部分の項に分けて式(7・a~c)として表わせるものとする。

$$C = \langle C \rangle + C' \dots (7 \cdot a)$$

$$C_s = \langle C_s \rangle + C_s' \dots (7 \cdot b)$$

$$I = \langle I \rangle + I' \dots (7 \cdot c)$$

ただし、⟨ ⟩ は時間平均を表わす。したがって、

$$\langle C' \rangle = \langle C_s' \rangle = \langle I' \rangle = 0$$

さらに(仮定4)BOD 負荷の時間変化は相対的に小さいものとして無視し得る。

このような条件を仮定すると、式(6)は時間的に変化しない量についての関係と時間とともに変化していく量についての関係との2つの関係式に分離して表わすことができる。

すなわち、

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} = 0 = K_2(\langle C_s \rangle - \langle C \rangle) - K_1 XL + \alpha Y \langle I \rangle + D_x \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x^2} - V \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} \dots (8)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial t} = K_2(C_s' - C') + \alpha Y I' + D_x \frac{\partial^2 C'}{\partial x^2} - V \frac{\partial C'}{\partial x} \dots (9)$$

式(8)の関係は定常解として従来から多くの研究者によって検討されてきた基本的な関係である。多くの場合、式(8)はD=⟨C_s⟩-⟨C⟩で定義される溶存酸素不足量で表わされ式(10)のように書き換えられる^{3),4)}。

$$K_2 D - K_1 XL + \alpha Y \langle I \rangle - D_x \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + V \frac{\partial D}{\partial x} = 0 \dots (10)$$

ただし、式(10)の輸送項を得るには∂⟨C_s⟩/∂x=0が仮定されている。また通常の取扱いにあっては、P_e=VI/D_x(I:流れ方向への距離)で評価されるペクレ数が十分大きな流下距離を考え、(仮定5)縦分散係数(D_x)の影響は小さいとして無視されることが多い。河川における水温の変化を解析したJackman・四倉⁵⁾の研究においても移流項の影響に比べてこの分散の項の影響は小さいことが示されている。式(10)をx=0でBOD負荷が点源として流入する場合の解は溶存酸素垂下曲線(Oxygen Sag Curve)として知られている。

式(9)においても縦分散の影響を無視し、項の順番を整理すると式(11)のように表わされる。

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + V \frac{\partial C'}{\partial x} + K_2 C' = K_2 C_s' + \alpha Y I' \dots (11)$$

式(11)の関係は定性的には、主として水温変化に伴う飽和溶存酸素の変化と日照強度の変化による酸素発生量の変化が外力として作用するときの溶存酸素濃度のレスポンスを規定する方程式になっているといえる。

そこで、前記2つの外力要素を合わせたものを改めてGF'とし、GF'をフーリエ級数に展開して表わすことを考えれば式(11)は式(12)のように書き換えられる。

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + V \frac{\partial C'}{\partial x} + K_2 C' = GF' = G \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) \dots (12)$$

GF'の内容についてはここでは詳細にはふれないが、環境条件を限定していく過程で支配的要素は限られてい

く。

式 (12) に対して 初期条件, 境界条件を式 (13・a), (13・b) で与えるとき, その解は O'Connor・Di Toro⁹⁾ が求めたように式 (14) として求められる。

初期条件として, $t=0$ において,

$$C'(x, 0) = 0 \quad x > 0 \quad \dots\dots\dots(13 \cdot a)$$

境界条件として, $x=0$ において,

$$C'(0, t) = C_0'(t) \quad t \geq 0 \quad \dots\dots\dots(13 \cdot b)$$

また, (仮定 6) GF' については $x \leq 0$ では 0, $x \geq 0$ では x に独立であると考える。

このとき式 (12) の解は, (仮定 7) 十分大きな t に対して, 式 (14) のように求められる。

$$C'(x, t) = C_0' \left(t - \frac{x}{V} \right) e^{-K_2 \left(\frac{x}{V} \right)} + G \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{K_2^2 + \Omega_n^2}} \cos \left\{ \Omega_n t - \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_n}{K_2} \right) \right\} - e^{-K_2 \left(\frac{x}{V} \right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{K_2^2 + \Omega_n^2}} \cos \left\{ \Omega_n \left(t - \frac{x}{V} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_n}{K_2} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(14)$$

(3) 式 (14) の簡単化とその条件

式 (14) において $e^{-K_2(x/V)}$ が小さくなるとき, (すなわち $K_2(x/V)$ の十分大きくなる条件が満足されるような場合には), この式はただちに式 (15) の形に簡単化される。

$$C'(x, t) = G \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{K_2^2 + \Omega_n^2}} \cdot \cos \left\{ \Omega_n t - \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_n}{K_2} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots(15)$$

この関係式において $C'(x, t)$ は結局, t だけの関数になり場所にはよらないことになり, 式 (4) で示した基本的な関係の式と同形のものに帰着する。

(仮定 8) K_2x/V の値が十分大きいという条件は, また点源としての BOD 負荷の影響など各種の境界条件の影響が及ばなくなるまでの流下距離を考えることになる。この距離は K_2, V の大きさによって決まるが, $e^{-3} = 0.05$ を一つの目安とすれば, $x = 3 \cdot V/K_2$ の値より大きい方が望ましい流下距離となる。

一方, 湖沼などにおいて, 湖内あるいは表層中でほぼ一様な溶存酸素濃度の分布が考えられる場合には, 式 (6) において $\partial C/\partial x = 0$, 式 (9) において $\partial C'/\partial x = 0$ と置くことにより, 式 (15) の関係が成立することになる。

しかし, 現実の河川, 湖沼にあっては, ある測定点がこのような条件を満足しているかどうかを判定することは非常に難しいといえる。一つの解決策は流下方向, あるいは湖沼内に複数の測定点を設けることであるが, それではこれから示す方法の簡便さがいささか失われてし

まうことになる。

したがって, 逆説的にいうなら, 本法のねらいは「経験的な要素を含めて適当な測定点を選ぶことにより酸素収支式に現われる諸係数値 (特に再曝気係数) の第 1 近似値を簡便な方法で求めていく」ということになるであろう。

3. 観測データの特性

(1) 観測データ

水温, 溶存酸素, 河川流量についての観測データは U.S. Geological Survey (米国政府内務省地質調査所) の Ohio 支所が日常業務として行っている河川水質のモニタリングシステムによって集められた連続データである。観測地点は Cuyahoga 河 (Ohio 州の北部を流れ Erie 湖へ流入している) 中流域と下流域に位置する Old Portage と Independence の 2 点である。それぞれの地点の緯度, 経度は Table 1 に示す。

Table 1 Locations of Observation Stations.

Station code of U.S. Geological Survey	Cuyahoga River	Latitude	Longitude
04206000	Old Portage	41°08'08"	81°31'50"
04208000	Independence	41°23'43"	81°37'48"

解析に使用したデータは 1976 年度と, 1977 年度の 2 年間の中から河川流量が比較的安定していると認められる 3~6 日間の連続時間データである。

一方, 日照強度については, 現地での実測データがなかったため, 理論太陽高度を示す数式モデルを使って特定の地点, 特定の日時での太陽高度を計算して代用した。

日照強度と太陽高度の関係は次のように考えられる。

日照強度の単位は単位面積当たり, 単位時間当たりを受ける熱量で表わされる。一方, 太陽高度は地平から天頂側への角度 (h) で表わす。日照強度の近似値として太陽高度を使うことは大気透過率を 1.0 と近似していることに相当する (この手法も本法の一つの特長であるが, 日照強度を実測することはそれほど難しいことではないので, 実測値を使う方が望ましいと思われる)。

理論太陽高度は式 (16) で与えられる。

$$\tilde{I} = \sin h \begin{cases} = \sin \phi \sin \rho + \cos \phi \cos \rho \cos \{ \omega(t + \tau_1 - 12) \}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ = 0, & 0 \leq t < t_1 \text{ または } t_2 < t \leq 24 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ただし,

\tilde{I} : 太陽高度で表わした日照強度

t : 現地での時刻 (標準時刻による)

- t_1 : 日の出の時刻
- t_2 : 日没の時刻
- τ_1 : 標準時刻の経度と現地の経度の差を時間に直した補正項
- ϕ : 現地の緯度
- ρ : 赤緯
- ω : 地球の自転角速度 ($\omega=2\pi/24$)

溶存酸素濃度, 水温から換算した飽和溶存酸素濃度, 太陽高度で表わした日照強度などの観測値, 計算値の変化の様子を代表例として Fig. 1~3 に流量のデータとともに示す.

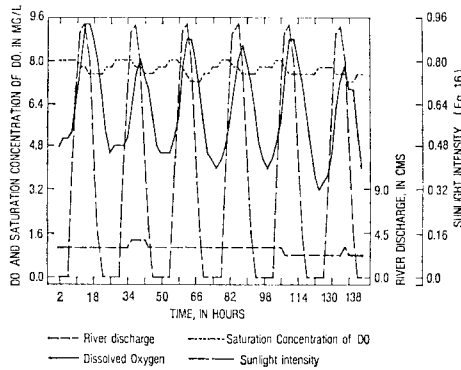


Fig. 1 Diurnal Variations of Four Parameters (The Cuyahoga River at Old Portage, June 10 to June 15, 1976).

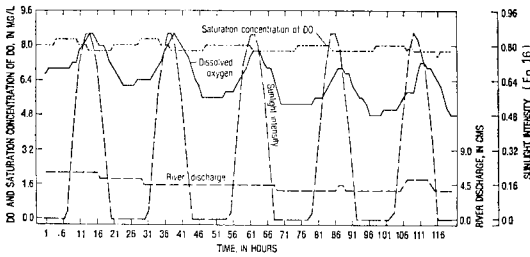


Fig. 2 Diurnal Variations of Four Parameters (The Cuyahoga River at Old Portage, Aug. 23 to Aug. 27, 1976).

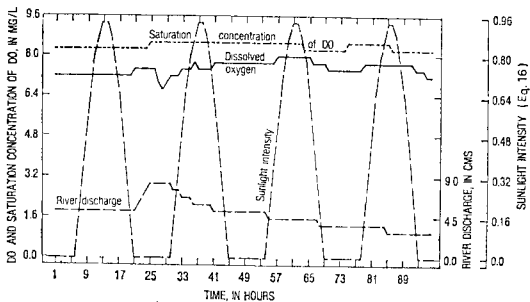


Fig. 3 Diurnal Variations of Four Parameters (The Cuyahoga River at Independence, July 16 to July 19, 1976).

(2) データの変動特性

原データの変動特性を調べるために, 各変量についてパワー・スペクトルを計算した^{7),9)}.

一般的にいってデータの変動特性はデータの読み取り間隔, データ長さによってその主要な特性が見かけ上異なってくることがあるが, ここでは定性的な判断から「日間変動」付近の変動を主として調べることを目的として, 3~6日間の時間データを使った.

Fig. 1~3 に示したケースについて, 溶存酸素, 水温

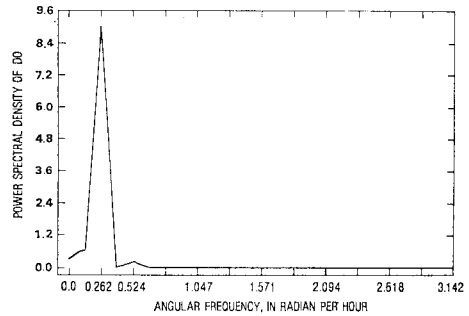


Fig. 4 Power Spectrum of Dissolved Oxygen (The Cuyahoga River at Old Portage, June 10 to June 15, 1976).

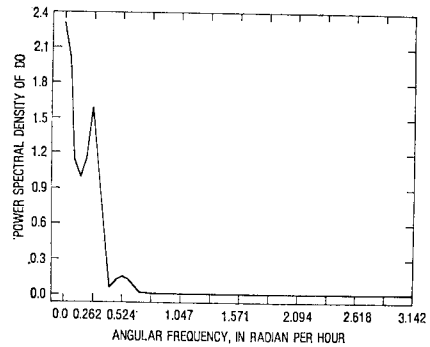


Fig. 5 Power Spectrum of Dissolved Oxygen (The Cuyahoga River at Old Portage, Aug. 23 to Aug. 27, 1976).

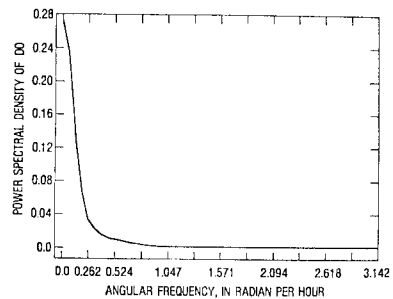


Fig. 6 Power Spectrum of Dissolved Oxygen (The Cuyahoga River at Independence, July 16 to July 19, 1976).

について求めたパワー・スペクトラムを Fig. 4~9 に示す。これらの図において横軸は角周波数、縦軸はスペクトル密度を取っている。角周波数 0.524 は 12 時間周期成分に、0.262 は 24 時間周期成分に対応している。

流量のパワー・スペクトラムは示していないがすべてのケースに対して Fig. 6 または 9 に示されるようなパターンを示しており特別な周期成分の存在は認められなかった。

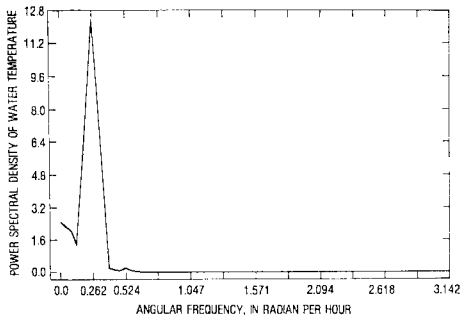


Fig. 7 Power Spectrum of Water Temperature (The Cuyahoga River at Old Portage, June 10 to June 15, 1976).

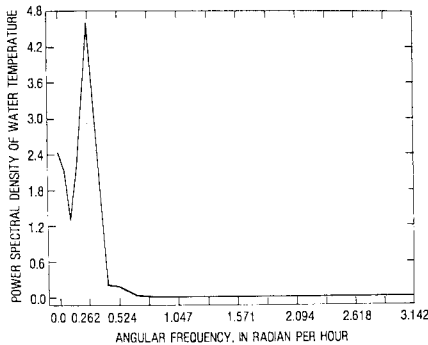


Fig. 8 Power Spectrum of Water Temperature (The Cuyahoga River at Old Portage, Aug. 23 to Aug. 27, 1976).

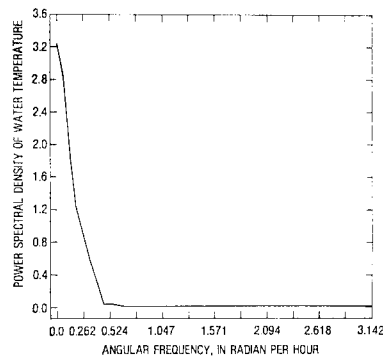


Fig. 9 Power Spectrum of Water Temperature (The Cuyahoga River at Independence, July 16 to July 19, 1976).

溶存酸素および同飽和値（水温）については、流量の定常性、適度な水温（藻類などの活動にとって）といった環境条件が満足される場合には、Fig. 4, 7 に示されるように 24 時間成分が唯一の卓越成分になっており他の周期成分は事実上無視し得ることがわかる。しかし、環境条件によっては（この場合は流量が大きく、しかも変化がある）Fig. 6, 9 に示されるように、長周期成分または傾向的な成分のみしか含まないものになる。またこれら 2 つのケースの中間的な場合として、長周期成分に 24 時間成分が乗っているような変動特性を示すものが Fig. 5 のように認められた。しかし、いずれの場合にも 24 時間以下の短い周期成分をもつ変動要素はほぼ無視し得るものであった。このことは式 (11) の右辺に示した外力項は $n=1$, $\Omega_1=2\pi/24$ の成分だけについて考えていけばよいことを示している。

外力項は主として日照強度あるいはその影響を受けた水温変化によるものであることを考えれば、24 時間周期の現象が卓越した現象として現われてくることは当然の結果でもあるが、他の高周波成分の寄与分が小さいケースが存在するという事実が確認できたことは注目すべきであろう。

また水温の変化については従来解析では無視されることが多いが、絶対値としても日間で $7\sim 8^\circ\text{C}$ も変化するときがあり、溶存酸素の時間変化を対象とする場合には水温変化の影響を取り入れていくことが必要である。

4. スペクトル解析法の応用

(1) 基本的な関係式の整理

2. でいくつかの仮定のもとに得られた式 (15) の関係は式 (11) を式 (17) のように整理し、常微分化し、その特殊解を求めたものに相当している。

$$\frac{dC'}{dt} + K_2 C' = K_2 C_s' + \alpha Y \tilde{I}' \dots\dots\dots (17)$$

この方程式の特殊解を求める方法として直観的わかりやすさから次のような手順が取られる。

まず、この関係を支配する基本的な量として日照強度を取る。次に飽和溶存酸素（水温）は日照の影響によって変化し、その変化は日照の変化とある位相差をもつ。そして溶存酸素の変化も日照の変化とある位相差をもった変化として記述される。

ここで、 \tilde{I}' , C_s' , C' の各変動を \tilde{I}' の変動を基準としフーリエ級数として表わすと式 (18)~(20) としてそれぞれ表わされる。

$$\tilde{I}' = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos(\Omega_n t) \dots\dots\dots (18)$$

$$C_s' = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\Omega_n t - S_n) \dots\dots\dots (19)$$

$$C' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\Omega_n t - T_n) \dots\dots\dots (20)$$

ただし、

J_n ：日照強度の変動に関する第 n 位のフーリエ係数

B_n ：飽和溶存酸素の変動に関する第 n 位のフーリエ係数

C_n ：溶存酸素の変動に関する第 n 位のフーリエ係数

S_n ：日照強度と飽和溶存酸素の第 n 位のフーリエ成分の位相差

T_n ：日照強度と溶存酸素の第 n 位のフーリエ成分の位相差

t ：時刻の単位で表わした時間

このとき、式 (18)~(20) を式 (17) に代入し、それぞれのフーリエ係数を合わせることににより、式 (17) の特殊解は求められる。 J_n, B_n, C_n, S_n, T_n の関係は式 (21・a, b) の連立方程式として示される (補遺-1 参照)。

$$C_n \Omega_n \cos T_n - K_2 (C_n \sin T_n - B_n \sin S_n) = 0 \dots\dots\dots (21 \cdot a)$$

$$C_n \Omega_n \sin T_n + K_2 (C_n \cos T_n - B_n \cos S_n) = \alpha Y J_n \dots\dots\dots (21 \cdot b)$$

ここで、式 (21・a, b) の関係を別の形で書き直してみると式 (22), (23) の関係として表わすことができる。

$$K_2 = \frac{C_n \Omega_n \cos T_n}{C_n \sin T_n - B_n \sin S_n} \dots\dots\dots (22)$$

$$\alpha = \frac{K_2 \{C_n - B_n \cos(T_n - S_n)\}}{Y J_n \cos T_n} \dots\dots\dots (23)$$

これらの関係は、もし B_n, C_n, S_n, T_n それに J_n がなんらかの方法によって定量的に求められるなら、再び係数 K_2 , 溶存酸素発生率 α が決定されることを示している。この関係で $B_n=0$ とおくと Schurr・Ruchti の求めた関係と同形のものになる。

さらに、式 (22), (23) の関係を式 (8) において移流項および拡散項を省略し簡単化した関係式に代入することにより式 (24) のようにして脱酸素定数 K_1 も求められることになる。

$$K_1 = \frac{K_2 \langle C_s \rangle - \langle C \rangle + \alpha Y \langle I \rangle}{XL} \dots\dots\dots (24)$$

ここに示した手順を踏むことにより K_2, α, K_1 といった係数値を推定していくことができれば、それは実用的な見地からの効用は大きいといえる。

本論文においてはデータの制約から再曝気係数に限ってその推定方法を検討していく。

(2) スペクトル解析の適用

上述した日照強度、水温、溶存酸素の日間変動の特性を利用した再曝気係数等の推定法を実用化するためには

J_n, B_n, C_n, S_n, T_n の諸量を定量的に求めることが必要となる。これらは、各変量の時系列データを統計的に処理することによって求められる。

時系列解析の手法としては、相関関数による方法とスペクトル解析による方法があるが、高速フーリエ変換 (FFT) を利用したスペクトル解析の方法を使う方が、① データの読み取り間隔を長くできる、② 必要データ長が短くてすむ、という利点があるのでここでは FFT によるスペクトル解析法を利用していく。

すでに調べたデータの変動特性を考慮すれば、式 (22) の関係は $n=1$ とした式 (25) で事実上代表される。

$$K_2 = \frac{C_1 \Omega_1 \cos T_1}{C_1 \sin T_1 - B_1 \sin S_1} \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

B_1, C_1 ：飽和溶存酸素および溶存酸素の変動における 24 時間周期成分に対応するスペクトル密度の平方根

S_1, T_1 ：上記各変動と理論太陽高度の 24 時間周期成分間の位相差

スペクトル密度は各変量のパワー・スペクトルを、位相差は 2 変量のクロス・スペクトルを計算することによって求められる。

(3) スペクトル計算の結果

計算の結果得られた主要な変量のパワー・スペクトラムは Fig. 4~9 に示したとおりである。クロス・スペクトルについてはコーヒーレンシー・スペクトラムとフェイズ (位相)・スペクトラムの 2 種のスペクトラムを求め代表例を Fig. 10, 11 に示した。横軸は角周波数、縦軸はそれぞれコーヒーレンシーと位相差である。

再曝気係数の水温に対する補正は、Elmore・West⁹⁾ が求めた関係式 (式 (26)) によって 20°C の条件下にそろえた。

$$(K_2)_{20} = (K_2)_T \cdot \theta^{(20-T)} \dots\dots\dots (26)$$

ただし、

T ：°C で表わした水温 (測定期間の平均値)

$$\theta = 1.0241$$

得られた結果は、河川流量、水温、スペクトル計算によって求めた各スペクトル密度および位相差、再曝気係数の推定値、を一括して Table 2 (a), (b) に示した。

(4) スペクトル解析法適用上の問題点

a) 有効な時系列データの判定基準

ここに示してきた再曝気係数の推定法が有効であるためには、2.(2) で列挙してきたようないくつかの仮定が満足されていなければならない。しかしそれらの仮定を完全にチェックする手段は事実上ない状態ではあるが、

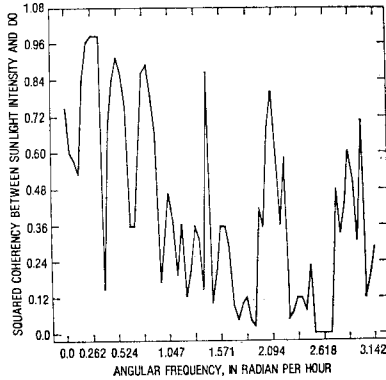


Fig. 10 Coherency Spectrum between Sunlight Intensity and DO (The Cuyahoga River at Old Portage, June 10 to June 15, 1976).

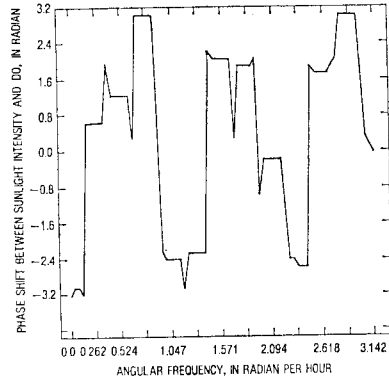


Fig. 11 Phase Spectrum between Sunlight Intensity and DO (The Cuyahoga River at Old Portage, June 10 to June 15, 1976).

Table 2 (a) Summary of Results at Old Portage.

Run No.	Year, Month Date (Number of Days)	Discharge (Min-Max) (CMS)	Water Temperature (Min-Max) (°C)	DO Concentration (Min-Max) (mg/l)	Amplitude of 24 hr Period Component of C (mg/l)	Amplitude of 24 hr Period Component of C _s (mg/l)	Phase Difference between C and I in 24 hr Period Component (rad)	Phase Difference between C _s and I in 24 hr Period Component (rad)	Reaeration Coefficient at 20°C (Base e) (day) ⁻¹
I-1	1975, Dec. 23~27 (5)	12.2 (9.4-17.1)	2.7 (1.7- 3.8)	11.8 (11.4-12.4)	0.255	0.116	0.365	0.434	53.5*
I-2	1976, May 4~ 9 (6)	9.1 (7.7-12.0)	16.7 (14.0-19.9)	9.3 (7.1-12.3)	2.07	0.415	0.422	-2.09	10.6
I-3	1976, June 10~15 (6)	2.9 (2.4-3.8)	27.9 (24.4-31.9)	6.1 (3.3-9.4)	3.01	0.415	0.701	-1.62	5.06
I-4	1976, July 26~28 (3)	6.6 (5.2-7.6)	25.6 (21.9-29.6)	6.8 (5.3-7.9)	0.804	0.319	0.312	-1.86	7.61
I-5	1976, Aug. 23~27 (5)	4.6 (3.7-6.2)	25.9 (23.2-28.4)	6.4 (4.7-8.4)	1.26	0.254	0.402	-1.80	8.54
I-6	1976, Sep. 2~ 6 (5)	3.6 (3.2-4.2)	22.8 (19.1-25.9)	5.9 (3.7-8.0)	1.51	0.386	0.412	-1.72	8.23
I-7	1976, Sep. 21~24 (4)	23.4 (18.6-26.8)	18.1 (16.7-20.0)	8.0 (7.3-8.6)	0.274	0.077	0.006	-2.99	131.0*
I-8	1977, May 26~29 (4)	2.9 (2.8-3.2)	25.5 (21.7-29.6)	5.6 (3.0-9.5)	2.91	0.444	0.596	-1.56	6.36
I-9	1977, July 13~15 (3)	5.3 (4.2-6.5)	29.6 (26.5-33.6)	1.4 (0.2-3.4)	1.17	0.339	-0.05*	-1.89	—*

Table 2 (b) Summary of Results at Independence.

Run No.	Year, Month Date (Number of Days)	Discharge (Min-Max) (CMS)	Water Temperature (Min-Max) (°C)	DO Concentration (Min-Max) (mg/l)	Amplitude of 24 hr Period Component of C (mg/l)	Amplitude of 24 hr Period Component of C _s (mg/l)	Phase Difference between C and I in 24 hr Period Component (rad)	Phase Difference between C _s and I in 24 hr Period Component (rad)	Reaeration Coefficient at 20°C (Base e) (day) ⁻¹
I-1	1976, April 9~12 (4)	22.4 (19.5-26.3)	10.0 (7.2-12.2)	9.1 (8.2-10.0)	0.346	0.294	0.799	-1.53	3.55*
I-2	1976, June 10~15 (6)	5.5 (3.9-7.4)	24.8 (22.2-26.9)	7.0 (5.0-10.1)	2.13	0.277	1.09	-1.52	2.54
I-3	1976, July 16~19 (4)	49.8 (31.2-85.0)	22.0 (20.1-23.7)	7.5 (6.7-7.9)	0.183	0.127	0.430	-1.30	5.02*
I-4	1976, Aug. 23~27 (5)	7.1 (5.5-9.8)	23.1 (21.8-24.4)	7.6 (5.8-10.1)	1.77	0.146	1.18	-1.72	2.23
I-5	1976, Sep. 2~ 6 (5)	5.6 (4.2-6.7)	19.3 (16.6-21.0)	7.7 (6.7-9.4)	1.16	0.248	1.06	-1.59	2.90
I-6	1977, May 16~19 (4)	8.0 (6.8-9.0)	21.3 (17.7-24.5)	6.0 (3.9-8.6)	2.08	0.261	1.01	-1.57	3.34
I-7	1977, May 20~23 (4)	7.0 (6.0-8.5)	23.8 (21.4-25.9)	6.0 (3.4-9.9)	2.96	0.233	1.09	-1.62	2.76
I-8	1977, May 26~29 (4)	5.7 (4.2-8.3)	22.6 (20.1-24.7)	5.6 (3.0-7.5)	1.69	0.256	1.10	-1.44	2.54
I-9	1977, May 29~31 (3)	4.6 (3.9-5.4)	21.8 (20.0-23.8)	5.7 (3.0-8.3)	1.52	0.196	1.20	-1.30	2.06

一方で、この方法をただ機械的に適用していくことには問題が残される。

そこでデータの有効性を判定する一応の目安として、① 式 (17) として単純化された関係式のもつ線形方程式としての特性が保証されること、および、② 24 時間周期成分の受け持つ変動が全体的変動の中で占める割合が十分大きいこと、③ 定性的に非負の再ばっ気係数が得られること、さらには、④ 流量の変動が少ないことなどが考えられる。

具体的な指標としては、① の線形性の問題については日照強度と溶存酸素および同飽和値とのコーヒレンシーを取ることとし、数値的には日照と溶存酸素に対して 0.9、日照と飽和値に対しては 0.7 の値を目安とする。② の 24 時間成分の寄与率については、式 (27)、(28) で定められる比 R_1, R_2 を計算し、 R_1, R_2 ともに 0.3 より大きいことを目安とする、③ の K_2 非負の条件は、 $0 \leq T_1 \leq \pi/2$ で与えられる。

$$R_1 = \frac{C_1^2 \Delta\omega}{V_{D_0}} \dots\dots\dots (27)$$

$$R_2 = \frac{B_1^2 \Delta\omega}{V_{SD_0}} \dots\dots\dots (28)$$

ただし、

C_1^2 : 24 時間成分に対するパワー・スペクトル密度 (溶存酸素)

B_1^2 : 同 (飽和溶存酸素)

V_{D_0} : 溶存酸素変動の全分散

V_{SD_0} : 飽和溶存酸素変動の全分散

$\Delta\omega = \frac{1}{T_0}$: スペクトルの分解幅、 T_0 は日数で表わした記録長

判定基準の計算結果を Table 3 (a), (b) に示す。

ここに定めた判定のための指標数値についての絶対値の検討は今後に残される問題であるが、判定の結果不相当としてチェックされるケースには * 印を付した。

これら、チェックされたケースについて河川の流況等の面から検討してみると次のような点が指摘される。

① 河川流量の大きいときは 24 時間周期の変動が見かけ上現われなくなる。移流項の影響が残る場合や、流量の大きいときは天候の悪いときに対応していると思われる実際の日照と理論日照の差が大きくなっている場合が考えられる。

② 低水温の時期にも 24 時間周期の変動が卓越成分とならない。光合成作用を支配する生物の活性が弱い状況が推定される。

③ 平均の溶存酸素濃度が低いときには負の K_2 値になっている。このような場合には有機物負荷の変動も考慮すべきことになるのであろう。

b) データの最小長さとは最大読み取り間隔

24 時間周期成分のスペクトル密度を計算するための最小データ長さとは最大読み取り間隔は、理論的には、それぞれ 2 日間と 12 時間間隔で十分である。実際のデータを対象とする場合はできるだけ長いデータ長、できる

Table 3 (a) Summary of Criteria of Applicability (at Old Portage).

Run No.	Variance of C	Variance of C_s	Spectral Density of 24 hr Period Component of C	Spectral Density of 24 hr Period Component of C_s	Ratio of R_1	Ratio of R_2	Coherency of C by I in 24 hr Period Component	Coherency of C_s by I in 24 hr Period Component
I-1	0.060 5	0.029 7	0.065 2	0.013 5	0.22*	0.09*	0.64*	0.12*
I-2	1.57	0.085 5	4.27	0.172	0.45	0.34	0.96	0.90
I-3	2.72	0.055 3	9.04	0.172	0.55	0.52	0.99	0.98
I-4	0.452	0.071 1	0.647	0.102	0.48	0.48	0.90	0.74
I-5	0.959	0.028 5	1.59	0.064 3	0.33	0.45	0.96	0.94
I-6	0.915	0.081 8	2.28	0.149	0.50	0.36	0.96	0.96
I-7	0.074 1	0.019 6	0.075 0	0.006 0	0.25*	0.08*	0.78*	0.12*
I-8	3.69	0.082 6	8.48	0.197	0.57	0.60	0.97	0.97
I-9	0.870	0.066 5	1.37	0.115	0.52	0.58	0.94	0.96

Table 3 (b) Summary of Criteria of Applicability (at Independence).

Run No.	Variance of C	Variance of C_s	Spectral Density of 24 hr Period Component of C	Spectral Density of 24 hr Period Component of C_s	Ratio of R_1	Ratio of R_2	Coherency of C by I in 24 hr Period Component	Coherency of C_s by I in 24 hr Period Component
II-1	0.214	0.131	0.120	0.086 6	0.14*	0.17*	0.62*	0.54*
II-2	1.46	0.028 7	4.53	0.076 7	0.52	0.45	0.95	0.97
II-3	0.071 3	0.017 5	0.033 6	0.016 2	0.12*	0.23*	0.64*	0.79
II-4	1.27	0.008 82	3.12	0.021 3	0.49	0.48	0.96	0.96
II-5	0.516	0.034 5	1.35	0.061 6	0.52	0.36	0.97	0.96
II-6	1.82	0.056 0	4.32	0.068 2	0.59	0.30	0.99	0.84
II-7	3.63	0.024 7	8.77	0.054 2	0.60	0.55	0.99	0.98
II-8	1.21	0.031 0	2.84	0.065 5	0.59	0.53	0.99	0.90
II-9	1.32	0.022 4	2.30	0.038 3	0.58	0.57	0.97	0.95

だけ短い読み取り間隔が望ましいが、流量、天候等の環境条件の定常性を確保するためと扱う総データ数を小さくするためには、短いデータ長、長い読み取り間隔が有利な条件になってくる。

そこで実際の意味で許容され得るデータ長さと読み取り間隔について検討を行った。

データ長さを2日間、3日間と変えたときの理論太陽高度および溶存酸素のパワー・スペクトラムを Fig. 12 ~15 に示す。

日照、溶存酸素ともに24時間の周期成分を明確に抽出するためには最小でも3日間は必要であることがわかる。今回の解析においては流量の定常性を考慮しながら3~6日間のデータ長を採用した。

読み取り間隔については、1時間間隔を最小間隔として2時間、3時間、6時間、8時間、12時間の6種類の場合について K_2 値に現われる影響を調べた。

結果は Table 4 に示されるようである。

3時間間隔までは大きな差がないことがわかる。今回の解析には1時間を読み取り間隔としている。

Schurr・Ruchti らの解析においては位相差を求めるのに相互相関関数を使っていた。相互相関関数から位相

差を求める場合はその精度はデータの読み取り間隔の絶対値によって規定されてくる。彼らは12分間隔という相対的には小さい読み取り間隔を使ってはいるが、12分以下の時間遅れ(位相差)を検出することはできないことになる。実際に入手し得るデータの状態で、データ処理の問題からいって読み取り間隔をはるかに大きくし得る本法の利点は大きなものであるといえよう。

5. 既存データとの比較

ここに求めた再曝気係数の数値の妥当性を検証していく一つの方法として、既存の再曝気係数の予測式を使っ

Table 4 Digitizing Intervals and Reaeration Coefficient in the Run Number I-3.

Digitizing interval (hour)	K_2 value (Base e) at 20°C (day) ⁻¹
1	5.06
2	5.26
3	5.14
6	7.82
8	8.40
12	∞*

* Phase shift between the sunlight intensity and DO was zero.

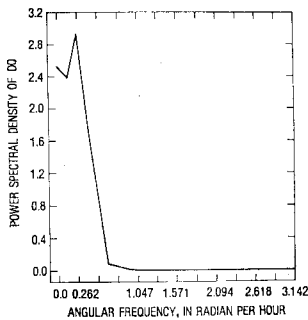


Fig. 12 Power Spectrum of Dissolved Oxygen (The Cuyahoga River at Old Portage, June 10 to June 11 (2 days), 1976).

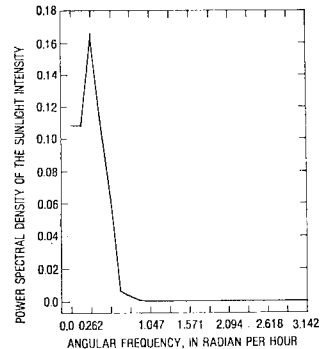


Fig. 14 Power Spectrum of Sunlight Intensity (Eq. 16) (At Old Portage, June 10 to June 11 (2 days) 1976).

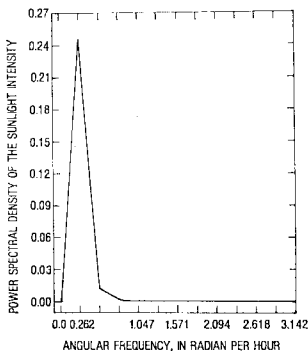


Fig. 13 Power Spectrum of Dissolved Oxygen (The Cuyahoga River at Old Portage, June 10 to June 12 (3 days), 1976).

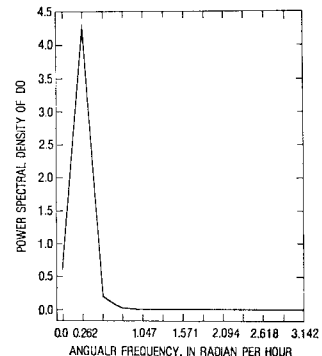


Fig. 15 Power Spectrum of Sunlight Intensity (Eq. 16) (At Old Portage, June 10 to June 12 (3 days) 1976).

Table 5 Abridged Summary of Results of O'Connor and DiToro (1970)⁹⁾.

River	Discharge (CMS)	Temperature (°C)	Reaction Coefficient (Base e) (1/day)
Grand	8.35	28.0	5.5
Clinton	0.94	21.0	6.0
Truckee (1)	5.10	27.8	6.8
Truckee (2)	5.52	27.8	6.9
Truckee (3)	7.67	27.8	8.0
Flint (1)	3.79	28.0	4.2
Flint (2)	4.92	28.0	3.5
Flint (3)	4.92	28.0	2.5
Flint (4)	5.78	28.0	6.1
Flint (5)	5.78	28.0	2.7

て推定値どうしを比較するということが考えられたが、今回のケースにおいてはエネルギー勾配または粗度係数、河川断面形状などについての情報が不十分であったため有効な検証の方法を欠くことになっている。

もとより、再曝気係数はその河川の流況によって固有の影響を受けるものであり、単にその数値を比較しても意味のない場合も多いが、ここでは、ここに得られている数値が、他の河川での実測値と比べて非常に特異な値であるのか通常あり得る範囲のものであるのかを検討する目的で既存のデータとの比較を行ってみる。

既存のデータとしては、O'Connor・DiToroらがアメリカの河川において酸素収支を取る方法で求めた計算値である。彼らの結果は **Table 5** にまとめられる。流量のデータをたよりとする範囲に限れば今回求めた数値はオーダー的には有効なものであり得ることがわかる。

6. 再曝気係数と河川流量の関係

再曝気現象は主として流体力学的諸因子によって支配されるものであることはよく知られている。しかし、再曝気係数と流量の関係にだけ限ってみると検討されている例は少ない。

Morel-Seytoux ら¹⁰⁾は既存の再曝気係数の予測式を整理して流量との関係を考察している。その結果として、6つの公式の中で1つだけ(Tsvoglou・Wallou¹¹⁾の予測式)が流量の増大に対応して再曝気係数が大きくなるとしている。

Fig. 16 に今回対象とした2地点での流量と再曝気係数の関係を示した。傾向としては Tsvoglou らの結果を支持するものになっている。

また、**Fig. 16** で注目されることは、Old Portage, Independence の地点による再曝気係数の差が大きいことである。観測地点付近の河川の状態についての情報が十分ではないので不明な点も多いが、再曝気係数には局所的な影響が大きな因子として作用していることが推定

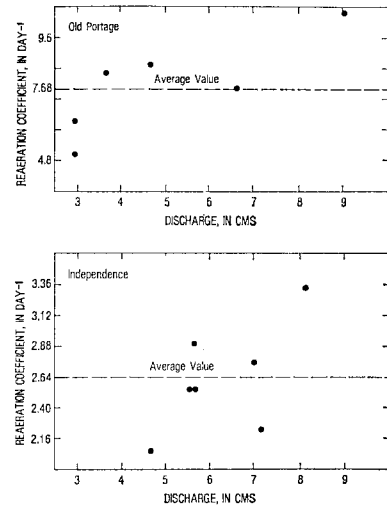


Fig. 16 Relationship between Reaeration Coefficient and Discharge.

される。

7. スペクトル解析法の適用限界

スペクトル解析法の特徴は水系における溶存酸素、水温が日照の影響だけを受けて示す日間変動に注目するところにある。したがって、水質データの日間変動がモデルで想定した変動のパターンを示さないような場合は適用できないことになる。

このような不適当なケースの出現する割合は一般的には議論しにくいだが、Gunnerson・Bailey¹²⁾の Sacramento 河での調査結果はある程度の目安を与えてくれる。

彼らは溶存酸素の日間変動を8種類のパターンに分類しその出現頻度を調べている。この分類において、スペクトル法の想定するモデルが満足するパターン——溶存酸素の最小値が日の出直前にあり最大値が正午から日没までの間に現われるパターン——の出現頻度を次のように与えている。すなわち、河川上流域では62%、中流域では48%、下流域では28%、停滞水域では38%となっており、この数値がスペクトル解析法の一つの限界を示すものになる。

これらの状況に対する解決策としては、実測の日照量を使うこと、BOD 負荷の変動などを考慮することが考えられる。

8. まとめ

河川水質データの日間変動の特性を解析することから始め、実際河川の再曝気係数の第1次近似値的推定値を

溶存酸素、水温、日照強度（理論太陽高度）の時系列データの統計的解析から求める方法について述べてきた。

要点をまとめると次のようにいえる。

(1) 河川流量が安定していて、水温も高い期間にあつては溶存酸素濃度の日間変動は 24 時間周期成分が唯一の卓越成分となる。

(2) 水温の日間変動も溶存酸素の場合とほぼ同様な変動特性を示す。日間変化の絶対値も大きく酸素収支においても無視し得ないものであることがわかる。

(3) 溶存酸素および同飽和値と日照強度の 24 時間周期成分のコーヒーレンシーが 1 に近くなるケースが確認され、両者の間に線形性を満足する関係が存在することがわかる。

(4) 4.(4) a) に示した「有効な時系列の判定基準」のもとで有効とされた時系列データを使えば式 (25) によって再ばつ気係数が推定できる。

(5) FFT を使ったスペクトル解析を利用することにより読み取り間隔を大きくし、データ長さを小さくすることができる。

(6) ここに得られた結果は実測値との比較など実証性の点で不十分な点は残るが（実験室レベルのモデル酸化池を使った実験によっては本法の有効性を確認している¹²⁾（補遺-2 参照）。得られた推定値のオーダーなどから判断してその有効性は十分評価される。

(7) 湖沼、感潮部等に対しても、溶存酸素の空間的な一様性が仮定されるような場合には本法の応用範囲を拡大していくことが期待される。

(8) 自動化した観測システムの進歩を考えるととき本法の利便性はますます高くなることが期待されるが、一方で流入負荷の変動、生物相の変化など今後の検討事項も残されている。

謝 辞：本論文は第 1 著者が 1979 年 4 月から 10 月までアメリカ合衆国政府内務省地質調査所 (U.S. Geological Survey) に滞在した間に行った作業を中心としてまとめたものである。研究の機会を与えて下さった同調査所水資源部本部およびデータの提供を受けた同 Ohio 支所の方々に大変お世話になった。

また、本論文の前段的な研究は現・東洋エンジニア (株) 味村立一氏に負うところが大きい。これに対して感謝の意を表する。

スペクトルの計算には SAS Institute INC の “SPE-CTR” プログラムを利用した。

補 遺 1

式 (18)~(20) を式 (17) へ代入すると式 (A・1) のように書き直される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\Omega_{nt} - T_n) + K_2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\Omega_{nt} - T_n) \\ = K_2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\Omega_{nt} - S_n) + \alpha Y \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos \Omega_{nt} \\ \dots\dots\dots (A \cdot 1) \end{aligned}$$

式 (A・1) の各項を計算して整理すると式 (A・2) のように示される。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \Omega_n \sin T_n + K_2 C_n \cos T_n - K_2 B_n \cos S_n) \\ \cdot \cos \Omega_{nt} - \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \Omega_n \cos T_n - K_2 C_n \sin T_n \\ + K_2 B_n \sin S_n) \sin \Omega_{nt} = \alpha Y \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos \Omega_{nt} \\ \dots\dots\dots (A \cdot 2) \end{aligned}$$

cos Ω_{nt} と sin Ω_{nt} は直交関数であるから式 (A・2) が成立するためには式 (21・a, b) の関係が満足されなければならない。

すなわち、cos Ω_{nt} の係数であり、sin Ω_{nt} の係数は左右両辺で等しくなければならない。

したがって、

$$C_n \Omega_n \cos T_n - K_2 (C_n \sin T_n - B_n \sin S_n) = 0 \dots\dots\dots (21 \cdot a)$$

$$C_n \Omega_n \sin T_n + K_2 (C_n \cos T_n - B_n \cos S_n) = \alpha Y J_n \dots\dots\dots (21 \cdot b)$$



補 遺 2

スペクトル法による再ばつ気係数の推定値を求める方法を定量的な側面から補強する目的で、実験室レベルでの簡単な実験を行っているので、その結果のみを参考として示しておく。

実験装置としては、溶存酸素の変化が式 (15) で示される解が得やすい諸条件をできるだけ満足するものを考えクロレラを培養した攪拌機つきのモデル酸化池を使っている。

与えた光量の条件は水槽内全体の平均値として、式 (16) で表わされる変化を再現できるように遮蔽板を水平の位置から半周期は回転させ、半周期は停止させるように作動させた。装置全体は 20°C の恒温室内に設置しているので水温の変化は無視し得る。式 (22) において

Table A・1 Comparison between Estimated K_2 and Observed K_2 .

Period (hour)	Pattern of Light Intensity (Eq. 16)	Estimated K_2 by Spectral Method (1/hour)	Observed K_2 by Non-steady Method (1/hour)
16		0.17	0.20
24		0.24	

$B_n=0$ としてよいことになる。

一方、この装置の攪拌羽根による攪拌によって規定されてくる再曝気係数は窒素ガスによる脱酸素後の溶存酸素の変化から非定常法で求められる。

溶存酸素の時系列データから求めた再曝気係数の推定値と、非定常法で求めた再曝気係数の観測値は **Table A・1** にまとめられる。

第1次近似値的な推定値としての有効性は認められよう。

参 考 文 献

- 1) Streeter, H.W. and E.B. Phelps : A Study of the Pollution and Natural Purification of the Ohio River, Public Health Bulletin 146, U.S. Public Health Service, Washington D.C., 1925.
- 2) Schurr, J.M. and J. Ruchti : Dynamics of O_2 and CO_2 Exchange, Photosynthesis, and Respiration in Rivers from Time-Delayed Correlation with Ideal Sunlight, *Limnology and Oceanography*, Vol. 22(2), pp. 208~225, March, 1977.
- 3) Dobbins, W.E. : BOD and Oxygen Relationships in Streams, J. Sanitary Engineering Division, ASCE, Vol. 90, No. SA 3, pp. 53~78, June, 1964.
- 4) Camp, T.R. : Field Estimates of Oxygen Balance Parameters, J. Sanitary, Engineering Division, ASCE, Vol. 91, No. SA 5, pp. 1~6, October, 1965.
- 5) Jackman, A.P. and N. Yotsukura : Thermal Loading of Natural Streams, Geological Survey Professional Paper 991, 1977.
- 6) O'Conner, D.J. and D.M. Di Toro : Photosynthesis and Oxygen Balance in Streams, J. Sanitary Engineering Division, ASCE, Vol. 96, No. SA 2, pp. 547~571, April, 1970.
- 7) Barr, A.J., J.H. Goodnight, J.P. Sall and J.T. Helwig : A User's Guide to SAS 76, SAS Institute INC., 1976.
- 8) 日野幹雄 : スペクトル解析, 朝倉書店, 1977.
- 9) Elmore, H.L. and W.F. West : Effect of Water Temperature on Stream Reaeration, J. Sanitary Engineering Division, ASCE, Vol. 87, No. SA 6, pp. 59~71, November, 1961.
- 10) Morel-Seytoux, H.J. and D.H. Lau : Discussion of "Statistical Evaluation of Reaeration Prediction Equations", by L.C. Brown, J. Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 101, No. EE 5, pp. 859~861, October, 1975.
- 11) Tsivoglou, E.C. and J.R. Wallace : Waste Load Allocation for the Eagle River and Gore Creek, MacCall-Ellingson and Morill, INC., Report to State of Colorado, April, 1974.
- 12) Gunnerson, C.G. and T.E. Bailey : Oxygen Relationships in the Sacramento River, J. Sanitary Engineering Division, ASCE, Vol. 89, No. SA 4, pp. 95~124, August, 1963.
- 13) 味林立一 : 河川における酸素の挙動について, 東京大学大学院修士論文, 1979.

(1980.10.2・受付)