

横流式沈殿池の諸特性の簡易計算法

A METHOD FOR PREDICTING THE FEATURES OF RECTANGULAR SETTLING TANK

粟谷 陽一*・藤崎 一裕**

By Yōichi AWAYA and Kazuhiro FUJISAKI

1. はしがき

横流式沈殿池は、固液分離装置として用廃水処理に広く利用されており、この沈殿池における除去率の評価には、Camp の式¹⁾が一般に用いられている。Camp の式は、池内の流速分布と拡散係数の分布に一様分布を仮定している。

一方、池内の流況をより細かく考えると、底面摩擦の影響をはじめ、種々検討すべき事項がある。この問題は沈降性粒子を含む開水路流れとも関係があり、近年いくつかの報告がなされている。その例として、粒子の挙動をラグランジュ的に追跡するシミュレーション²⁾、現象を表わす基礎式の差分計算^{3),4)}のような電子計算機を利用した数値解や、モーメント法を応用した解析的な取扱⁵⁾などを挙げることができる。また、筆者も同様の現象に対して、基礎式の解を変数分離形として取り扱い、固有値と固有関数を用いて、除去率や池内の濃度分布を求めた⁶⁾。これらの報告では、流速分布に対数分布、拡散係数の分布に放物形分布が用いられるなど、池内の流況に対して、より現実的な検討がなされている。

しかしながら、実際の沈殿池では、池内の偏流、密度流など、種々の要因により複雑な状況を呈していて、現在まで、これらの池内の状況の細部にまで立ち入った検討は十分にはなされていない。したがって、上述したような研究の成果は、いずれも池内の2次的な流れの影響を除外した、ある種の理想化された沈殿池の状態を知るための目安となるものである。また、現状では、個々の場合における除去率の値を詳細に計算することよりも、むしろだいたいの値を簡便に求めることが要求される場合が多い。

本報は、このような見地から、沈殿池の濃度分布の概

略を簡潔に把握する目的で検討を行ったものである。そして、池内の拡散係数には放物形分布を用い、流速分布を一様分布で近似すると、濃度分布を解析的に表現できることを示した。また、その結果を用いて、除去率や濃度分布を近似する実用的な簡略式を示した。なお、沈降性粒子に関する分散理論の、これらの事項に対する応用についても一部検討を行った。

2. 基礎式および解

沈殿池内の流れを2次元開水路等流状態と考えて、流下方向にx軸、底面から水面へ鉛直にy軸をとると、定常状態における粒子の保存式および境界条件式は、次の式(1)、式(2)で表わされる。

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} + wC \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$D \cdot \partial C / \partial y + wC = 0, \quad x > 0, \quad y = h \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

$$D \cdot \partial C / \partial y = 0, \quad x > 0, \quad y = 0 \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

$$C = 1, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq h \quad \dots\dots\dots (2-3)$$

Cは粒子濃度、uは流速、Dは拡散係数、wは粒子の沈降速度である。式(1)で、右辺の第2項を他の項に比べて省略し、かつ以下の無次元量

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x/h, \quad \bar{y} = y/h, \quad \bar{u} = u/(\kappa u_*), \\ \bar{D} &= D/(h\kappa u_*), \quad Z = w/(\kappa u_*) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

を用いると、式(1)、(2)はそれぞれ式(4)、(5)となる。

$$\bar{u} \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + ZC \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\bar{D} \cdot \partial C / \partial \bar{y} + ZC = 0, \quad \bar{x} > 0, \quad \bar{y} = 1 \quad \dots\dots\dots (5-1)$$

$$\bar{D} \cdot \partial C / \partial \bar{y} = 0, \quad \bar{x} > 0, \quad \bar{y} = 0 \quad \dots\dots\dots (5-2)$$

$$C = 1, \quad \bar{x} = 0, \quad 0 \leq \bar{y} \leq 1 \quad \dots\dots\dots (5-3)$$

上式中のhは水深、κはカルマンの定数(=0.4とした)、u*は摩擦速度であり、Zは沈降のパラメーターと

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水土木学科

** 正会員 工博 九州工業大学助教授 開発土木工学科

もよばれる。

式 (4) の流速を、対数分布 \bar{u} (式 (6)) の平均流速 \bar{U}_m で近似すると式 (9) が得られる。

$$\bar{u} = A/\kappa + 1/\kappa^2 \ln(u_* y/\nu) = 1/\kappa^2 \ln(y/y_0) \dots (6)$$

$$\bar{U}_m = 1/\kappa^2 (\ln(h/y_0) - 1) \dots (7)$$

A は定数、 ν は動粘性係数、 y_0 は式 (6) で $\bar{u}=0$ となる y の値である。また、拡散係数の分布形には式 (8) を用いる。

$$\bar{D} = \bar{y}(1-\bar{y}) \dots (8)$$

$$\bar{U}_m \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + ZC \right) \dots (9)$$

式 (9) に変数分離形の解を想定して、

$$C(\bar{y}, \bar{x}/\bar{U}_m) = C_0(\bar{y}) \cdot T(\bar{x}/\bar{U}_m) \dots (10)$$

とすると、次の 4 つの式が得られる。

$$T' = \exp(-\lambda \cdot \bar{x}/\bar{U}_m) \dots (11)$$

$$\bar{y}(1-\bar{y})C_0'' + (Z+1-2\bar{y})C_0' + \lambda C_0 = 0 \dots (12)$$

$$\bar{y}(1-\bar{y})C_0' + ZC_0 = 0, \text{ at } \bar{y}=1 \dots (13-1)$$

$$\bar{y}(1-\bar{y})C_0' = 0, \text{ at } \bar{y}=0 \dots (13-2)$$

λ は分離定数で、式 (12) と (13) から定められる固有値である。

式 (13) を満たす式 (12) の解を求める。式 (12) より $\bar{y}=0$ と $\bar{y}=1$ とは C_0 の確定特異点となるから、

$$C_0 = (1-\bar{y})^Z \sum_{n=0}^{\infty} E_n \bar{y}^n \dots (14)$$

において、未定係数法によると

$$\left. \begin{aligned} (Z+1)E_1 &= \{Z(Z+1) - \lambda\}E_0 \\ 2(Z+2)E_2 &= \{(Z+1)(Z+2) - \lambda\}E_1 \\ &\dots \dots \dots \\ n(Z+n)E_n &= \{(Z+n-1)(Z+n) - \lambda\}E_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

となる。いま、級数は有限の項までで切れるとすると

$$\lambda = \lambda_n = (Z+n)(Z+n+1), n=0, 1, 2, \dots n \dots (16)$$

として、固有値 λ_n が順次定められる。また、このときの固有関数 C_{0n} は、式 (14) の n 項までの部分和として、

$$C_{0n} = (1-\bar{y})^Z \sum_{i=0}^n E_i \bar{y}^i, n=0, 1, 2, \dots \dots (17)$$

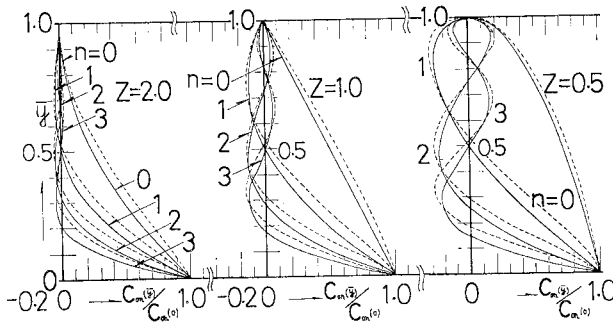


図-1 固有関数

で与えられる。ただし、

$$E_i = \frac{(-1)^i \Gamma(2Z+n+i+1) \Gamma(Z+1)n!}{i! \Gamma(2Z+n+1) \Gamma(Z+i+1) (n-i)!} E_0, \quad i=1, 2, \dots \dots (18)$$

であり、 Γ はガンマ関数である。図-1 に C_{0n} と \bar{y} との関係を示す (実線)。図から、 Z が大きくなるにつれて、水面近傍での C_{0n} の変化が小さくなる様子などがわかる。

C_{0n} を用いると、式 (9) の解は、

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_{0n} \exp(-\lambda_n \cdot \bar{x}/\bar{U}_m) \dots (19)$$

$$a_n = \frac{\int_0^1 1(\bar{y}/(1-\bar{y}))^Z C_{0n} d\bar{y}}{\int_0^1 (\bar{y}/(1-\bar{y}))^Z C_{0n}^2 d\bar{y}} \dots (20)$$

と表わされる。 a_n は、入口での境界値、 $C=1$ を C_{0n} で展開したときの係数であり、 $\{\bar{y}/(1-\bar{y})\}^Z$ は関数 C_{0n} が直交するための重み関数である。

なお、図-1 中の破線は、 \bar{U}_m の代わりに式 (6) の \bar{u} を用いたときの固有関数⁶⁾で、 \bar{U}_m を用いた場合に比較的近い値を示している。このことから \bar{u} を \bar{U}_m で近似しても、現象を精度よく近似することの可能性がうかがえる。

また、式 (12) を変形すると、超幾何微分方程式の標準形が得られる。したがって、式 (9) の解は超幾何関数を用いて表現することもできる^{6),7)}が、その解を級数展開すると本報で記したものと同一のものとなる。

3. 濃度分布と除去率

図-2 (a)~(c) に式 (19) で求めた濃度分布の一例を示す。×が式 (19) による値、実線が流速分布に対数分布、拡散係数に放物形分布を用いた解による値⁶⁾、○が Camp の解による値¹⁾で (記号は以後の図の場合も同様である)、○や×でプロットした値は実線に比べて、水面部や中間の水深部で一定の傾向をもつ相違が出ているが、底部で三者は非常に近い値となっている。なお、計算例はいずれも、Reynolds 数 $R_e=20000$ の場合の値であるが、本報で対象とした現象は、 R_e の影響を受けることが少なく、他の R_e についてもまったく類似の結果が得られる。また、流下方向の距離としては、 \bar{x}/\bar{U}_m の代わりに次の

$$w/w_0 = \bar{x}/\bar{U}_m \cdot Z \dots (21)$$

を用いた。 w_0 は表面負荷率 (=流量/沈殿池の床面積) である。

図-2 中の破線は、式 (19) の第 1 項のみによる値を示し、 w/w_0 の増大とともに、高次の項が小さくなり、次式でも池内の濃度分布が近似でき

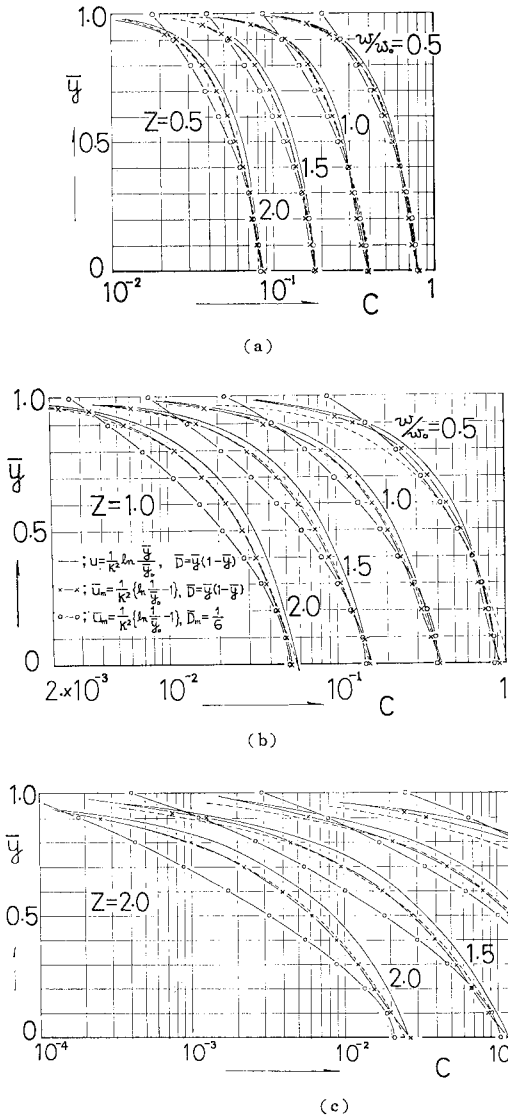


図-2 濃度分布

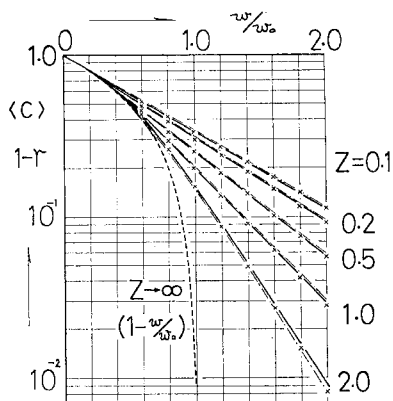


図-3 w/w_0 と $\langle C \rangle$ との関係

ることを示している。

$$C = a_0 (1 - \bar{y})^Z \exp\{-(Z+1) \cdot w/w_0\} \dots\dots (22)$$

$$a_0 = \Gamma(2Z+2) / \Gamma(Z+2)^2 \text{ 注} \dots\dots (23)$$

または、

$$a_0 = 1 + 0.5Z^2 + 0.005Z^6 \dots\dots (24)$$

式 (24) は $0 < Z \leq 2.5$ の範囲で、式 (23) の a_0 を 0.5% 以内の誤差で近似する近似式である。

図-3 には、水深方向に平均した粒子濃度 $\langle C \rangle$ の流下方向の変化を示す。Z が小さいほど、 w/w_0 の小さな値から、 $\log \langle C \rangle$ と w/w_0 との間に直線関係が成立している。

$$\begin{aligned} \langle C \rangle &= \int_0^1 C d\bar{y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{-\lambda_n/Z \cdot w/w_0\} \int_0^1 C_{0n} d\bar{y} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\{-\lambda_n/Z \cdot w/w_0\}, A_n = a_n \int_0^1 C_{0n} d\bar{y} \end{aligned} \dots\dots (25)$$

であるから、Z が小さいほど高次の項の影響が小さいことが表われている。

除去率 r は次式で計算される。

$$\begin{aligned} r &= \left\{ \int_0^1 \bar{u} d\bar{y} - \int_0^1 \bar{u} C d\bar{y} \right\} / \int_0^1 \bar{u} d\bar{y} = 1 - \bar{U} \int_0^1 C d\bar{y} / \bar{U}_m \dots\dots (26) \\ &= 1 - \langle C \rangle = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \exp(-\lambda_n/Z \cdot w/w_0) \end{aligned}$$

式 (20)、(25) から、

$$\begin{aligned} A_0 &= \Gamma(2Z+2) / \Gamma(Z+2)^2 = a_0 \\ A_1 &= A_0 (2Z+3) \{Z / (Z+2)\}^2 \dots\dots (27) \end{aligned}$$

などとなり、n の増大とともに A_n が複雑になる。式 (26) による除去率の値は、 $Z < 0.5$ の範囲では、実用上は第 1 項のみ(式 (28-1))で十分であるが、Z が大きくなると、より高次の項も無視できず、計算が複雑になる。

図-3 中の一点鎖線は次の近似式によるもので、式 (26) との差は 2% 以下である。

$$r = 1 - a_0 \exp\{-(Z+1) \cdot w/w_0\} \quad (Z \leq 0.5) \dots\dots (28-1)$$

$$\begin{aligned} r &= 1 - \frac{(Z+1)/a_0 + w/w_0}{1 + w/w_0} \\ &\quad \cdot \frac{a_0 \exp\{-(Z+1)w/w_0\}}{1 + Z \exp\{-(Z+1)w/w_0\}} \quad (0 < Z \leq 2) \end{aligned} \dots\dots (28-2)$$

式 (28-2) は、沈殿池の流入部の近傍および遠方において、それぞれ

$$\begin{aligned} \langle C \rangle &\rightarrow 1 - w/w_0 \quad (w/w_0 \rightarrow 0) \\ \langle C \rangle &\rightarrow a_0 \exp\{-\lambda_0/Z \cdot w/w_0\} \quad (w/w_0 \rightarrow \infty) \end{aligned} \dots\dots (29)$$

注) このとき $\int_0^1 C_{00} d\bar{y} = 1$ となるよう $E_0 = 1 + Z$ とした。

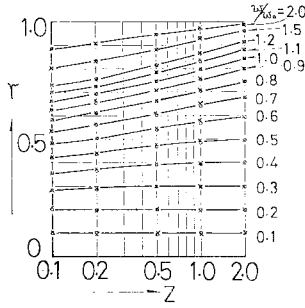


図-4 除去率 γ と Z との関係

となることを考慮して導かれている。図-4 に、除去率について、従来の結果^{1),6)}と式(28)の値とを比較した。最終的な除去率に関しては、いずれの場合も大差がない。このことは、図-2において、除去率に大きく影響する沈殿池底部の濃度に、差が少ないことから理解される。したがって、除去率の推算には式(28)が利用できるといえる。

4. 分散理論による検討

前項で、池内の濃度分布などは、 Z が小さい場合や、 w/w_0 が大きい場合には、0 次の固有値と固有関数を用いて十分に近似できることを示した。このような場合に対しては、別に検討した沈降性粒子に関する分散理論⁷⁾を用いても、濃度分布や除去率の推算が可能である。

移流分散に関連して現象を取り扱う場合には、式(25)の $\langle C \rangle$ が次式により直接求められる。

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + (\bar{U}_s + \mu) \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = \bar{D}_L \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x^2} - \lambda_0 \langle C \rangle \tag{30}$$

上式中、 \bar{U}_s は浮遊粒子基準の平均流速、 μ は流下方向の濃度勾配と粒子の沈積のために生じる、粒子のみかけの平均流速の変動分、 \bar{D}_L は分散係数である。これらの値と Z との関係を図-5 に示す。 $\bar{x}=0$ で $\langle C \rangle=1$ のときの(もう1つの条件は $\langle C \rangle \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$)、定常状態における式(30)の解は、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \langle C \rangle &= 1 \exp(-R\bar{x}) = \exp(-R \cdot \bar{U}_m / Z \cdot w/w_0) \\ R &= U_s^+ / (2 \bar{D}_L) \cdot \{-1 + (1 + 4 \bar{D}_L \cdot \lambda_0 / U_s^{+2})^{1/2}\}, \\ U_s^+ &= \bar{U}_s + \mu \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

表-1 に $\langle C \rangle = \exp(-R_Z \cdot w/w_0)$ としたときの R_Z の値を示す。(イ)が流速分布に対数分布を用いた最も一般的な場合⁶⁾、(ロ)が式(25)の一樣分布によるもの ($R_Z = \lambda_0 / Z$)、(ハ)が式(31)の分散理論による値を示す。定常問題では、一般に分散係数そのものの影響は小

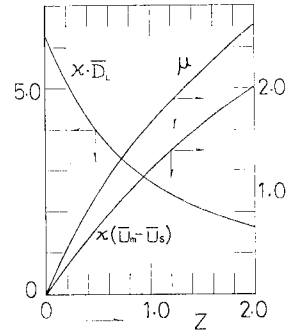


図-5 $\bar{D}_L, \bar{U}_s, \mu$ と Z との関係

表-1 Z と R_Z との関係

Z	0.1	0.2	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0
(イ)	1.12	1.21	1.49	1.67	1.95	2.42	2.90
(ロ)	1.1	1.2	1.5	1.7	2.0	2.5	3.0
(ハ)	1.10	1.19	1.47	1.66	1.94	2.41	2.88

さいことが予想されるが、表-1 からは、本報で検討したような場合に対しても、分散理論による取扱いが適用できることがわかる。

以上、沈殿池を開水路等流状態と仮定して、池内の濃度分布や除去率を求める簡略式について検討した。本報で考察した事項は、沈殿池の概略を知るうえに有用であるばかりでなく、たとえば、海域や感潮河川などのような沈降性粒子を含む水域の解析にも応用できるものと考えられる。なお本論文の一部は、第35回土木学会年次学術講演会で発表したものである。

参考文献

- 1) Camp, T.R.: Sedimentation and the Design of Settling Tanks, Proc. ASCE, Vol. 71, pp. 895~958, 1945, または水理公式集, 土木学会編, pp. 415~416, 1971.
- 2) Li, R.M. and H.W. Shen: Solid Particle Settlement in Open-Channel Flow, Proc. ASCE, Vol. 101, No. HY 7, pp. 917~931, 1975.
- 3) Sarikaya, H.Z.: Numerical Model for Descrete Settling, Proc. ASCE, Vol. 103, No. HY 8, pp. 856~876, 1977.
- 4) Sayre, W.W.: Dispersion of Silt Particles in Open Channel Flow, Proc. ASCE, Vol. 95, No. HY 3, pp. 1009~1038, 1969.
- 5) Sumer, B.M.: Settlement of Solid Particles in Open-Channel Flow, Proc. ASCE, Vol. 103, No. HY 11, pp. 1323~1337, 1977.
- 6) 粟谷陽一・藤崎一裕: 開水路等流状態としての沈殿池の特性, 土木学会論文報告集, 第277号, pp. 133~136, 1978.
- 7) 粟谷陽一・藤崎一裕: 開水路流れにおける沈降性粒子の平均移流速度と縦分散係数, 土木学会論文報告集, 第311号, pp. 71~79, 1981.

(1980.11.10・受付)