

時定数スペクトルを用いた山地小流域の洪水流出解析

RUNOFF ANALYSIS OF MOUNTAINOUS SMALL BASINS
BY THE USE OF TIME CONSTANT SPECTRUM山 田 正*
By Tadashi YAMADA

1. 序 論

著者は先に本論文報告集において「山地小流域の瞬間単位図と斜面長分布の関係」と題して、流域面積が数 km^2 以下の森林におおわれた山地小流域における瞬間単位図、流域を構成する斜面の長さの分布および斜面を特徴づける時定数（物理的には1つの斜面を雨水が流下するのに要する時間——到達時間）の分布等に関して議論を行っている。そのなかで用いた時定数分布のことを以後は時定数スペクトルとよぶことにする。この時定数スペクトルは次節以降においても述べるように流域のもつ空間的な分布特性を表現しているものと解釈することができるが、本論文の目的は、上記の時定数スペクトルの概念をより一般的に拡張し、また時定数スペクトルを精度よく求める手法を提案し、この特性量を通して山地小流域における洪水流出の物理機構を明らかにすることである。さらに本論文はこのような水文学的知見を基礎とする比較的簡便な流出解析手法を提案するものである。

2. 従来の研究

流域に降った雨水はさまざまな特性を備えた流域内の各小領域を通過する過程において変形を受けつつ流域末端にまで達する。しかしこの過程を数学的に表現するには従来よりタンクへの流入出としてとらえるいわゆるタンクモデル、偏微分方程式系で与える kinematic wave 法、常微分方程式系で与えるいわゆる ARMA を用いる方法等さまざまな試みがなされている。しかし著者はほとんどすべての手法が同一の数学的概念の範ちゅうに入るものと考えている。すなわち方程式が定常、非定常、線形、非線形にかかわらずこれらの解はすべて積分形で表現することが可能であり、問題はこれらの解を支配する積

分核がどのような形をしているのかということが問題になる（用いるパラメーターの軽重、精度、計算手法の難易等は別にして）。このとき降雨流出のシステムを定常、線形の最も単純化された場合としてとらえると周知の単位図の概念になる。よって上記のさまざまな流出解析手法を用いる限り、それらの解析そのものの間に本質的（数学的）な差異はないと極論することも可能であろう。しかし水文学の立場からいえばそれらの解析そのもの間には歴然とした違いがあり、各方程式（モデル）を立てた時点でその方程式がもつ物理性の有無が問題となる。たとえば流域を1つのシステムと考え、それに対して雨水の挙動を示す方程式を1個立てたところで（実用的な観点からの）結果は別にして、その方程式のもつ物理性は希薄なものである。よって方程式のもつ物理的対応性（現象との対応性）を考慮に入れるために流域内を水平あるいは鉛直方向に幾組かの領域や層に区切り、その小範囲の空間スケールにおいて成立する方程式群（やモデル）を設置し、より実際の雨水の挙動に近いモデル構成を試みるのが、今日までになされている。たとえばタンクモデルでは¹⁾ 何段何列かのタンクを設けたり、高棹²⁾ や Linsley³⁾ のモデルのように流域を垂直方向に何層かに区切り、その層ごとに成立する方程式や関係式を設けたり、また大スケールの流域では流域を何個かの小流域に分割し、その結合として解析したりする方法が提案されている。さらに最近、日野・長谷部⁴⁾ らにより、流出過程に何組かの ARMA 過程を適用する試みがなされており、流出分離の非線形性が提唱されている。いずれにせよ、これらの解析方法は大小なりモデルのもつ物理性を保ちつつ、流域内の特性分布を考慮していると評価することができる。一方、流域のもつ水文学的特性の空間分布を知る目的およびその分布を基礎とする流出解析手法が四俵⁵⁾、平野ら^{6),7)}、角屋ら⁸⁾および著者¹⁶⁾によって行われている。このなかでは流域のもつ水文学的特性は分割された各小流域の特性の和としてとらえら

* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

れている。

この点に関して四俵⁵⁾は洪水ハイドログラフの逓減部の数学的表現に着目し、それを exponential で分解する考え方を提案した。さらにこの exponential での展開はさまざまな減衰率を有する1段タンクによって表現できることを示し、これを逓減率スペクトルと名づけている。著者¹⁶⁾は1つの単位斜面内を流れる浸透流の特性が、ある減衰率を有する1個のタンクからの流出特性に近似的に等しい(具体的には両者の応答関数が近似的に等しい)ことを明らかにし、このことから逆にさまざまな斜面長をもった流域全体をさまざまな減衰率をもったタンクの集合で表わす表現方法を提案した。また、平野ら^{6),7)}は流出解析モデルとして定評のある kinematic wave 法に基づき、これを数学的に展開することから、洪水流出とはさまざまな到達時間をもったサブシステムからの流出の総和であることを明らかにした。また彼らの解析により到達時間の分布と流域における斜面長の分布との間に等価な関係が成立することが初めて提示された。これにより、流域のもつ地形学的な要素と雨水の運動学とが有機的に結合されたといえよう。後に角野ら¹⁸⁾も同様の解析を行い、上述の事柄を確認している。これらの研究においては各小領域の全流域に占める割合が、流域とそのなかでの雨水の流出過程を説明する特性量として扱われている。

3. 1 段タンクの応答関数と時定数スペクトルによる流出表現

ここで、文献 16) および 17) においてすでに発表されている著者の研究を簡単に説明する。いま流域末端での流出量を $Q_0(t)$ 、流域面積を A 、降雨強度を $r(t)$ とすると、

$$Q_0(t) = A \int_0^\infty \varphi(T) \int_0^t \frac{1}{T} e^{-\tau/T} \left\{ 1 - \frac{\partial F(t-\tau)}{\partial R(t-\tau)} \right\} \cdot r(t-\tau) d\tau dT \dots \dots \dots (1)$$

となる。ここに F, R は本来一雨降雨の総損失量、総降雨量であるが、式 (1) においてはこの関数関係 $F=F(R)$ を時間単位の資料にも適用しており、このときには F, R はそれぞれ累積損失量、累積雨量を意味している。ここで式 (1) 中の $T^{-1}e^{-\tau/T}$ の項は、1つの流域単位を特徴づけるある時定数を T としたときのその流域のもっている降雨に対する応答関数であり、ここではそれを1個のタンクによって代表させているわけである。さらに $\varphi(T)$ はそのような小流域が全体に占める割合を示している。式 (1) のもつ水文学的意味および $\varphi(T)$ に対する物理的解釈はすでに文献 16) において発表しているのでここでは省略する。

4. n 段タンクの応答関数と時定数スペクトルによる流出表現

式 (1) においては小流域に対する応答関数を $T^{-1}e^{-\tau/T}$ とおいているが、この時定数の逆数をハイドログラフの逓減率と考えたときには $\varphi(T)$ は四俵の提唱した逓減率スペクトルになっている。ところで $T^{-1}e^{-\tau/T}$ の形の応答関数では降雨に対する流出の応答があまりに迅速であり、たとえば降雨の土中への鉛直浸透の効果が考慮されていないと考えることができる。よってこのままではさまざまな特性をもった流域や降雨に対して十分な適応性を期待することはできない。よってここでは時定数を同じくするタンクを n 段重ねたときの応答関数である n 次のガンマ分布の関数を採用する。このとき式 (1) は書き改められて、

$$Q_0(t) = A \int_0^\infty \varphi(T) \int_0^t \frac{T^{-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\tau}{T} \right)^{n-1} e^{-\tau/T} \cdot \left\{ 1 - \frac{\partial F(t-\tau)}{\partial R(t-\tau)} \right\} r(t-\tau) d\tau dT \dots \dots (2)$$

あるいは、

$$Q_0(t) = A \int_0^t \left\{ 1 - \frac{\partial F(t-\tau)}{\partial R(t-\tau)} \right\} r(t-\tau) \cdot \underbrace{\int_0^\infty \varphi(T) \frac{T^{-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\tau}{T} \right)^{n-1} e^{-\tau/T} dT d\tau}_{(*)} \dots \dots \dots (3)$$

となる。ここで式 (2) あるいは式 (3) のもつ水文学的な意味を模式的に示したものが図-1 である。この図より、 $\varphi(T)$ は降雨の側からいえば雨水を各時定数 T のサブシステムに分配する仕方を与える分配関数であり、降雨の受け皿としての流域の側からいえば時定数 T をもつサブシステムの流域全体に占める面積割合と考えられる。さらに時間的に変化する応答関数があるとも考えられる。このとき時定数 T あるいは $\varphi(T)$ のもつ意味は必ずしもハイドログラフの逓減部の挙動のみを説明するものではなく、以下に示すように小流域を特徴づける1つの時定数と考える方がより自然である。その意味において $\varphi(T)$ を時定数スペクトルとよぶわけである。

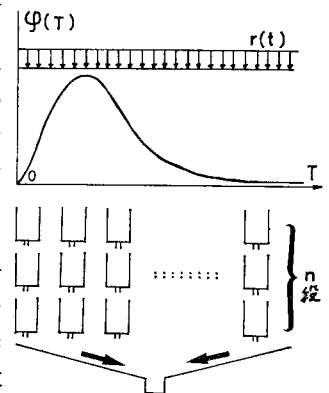


図-1 式 (1)~(3) のもつ水文学的意味の概念図

ところで式 (3) 中の (*) 印の項はいわゆるオーバーオールな (流域全体に対する) 応答関数・瞬間単位図になっており、これを $H(\tau)$ と書くと、

$$H(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi(T) \frac{T^{-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{n-1} e^{-\tau/T} dT \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで式 (4) のもつ水文学的意味は別にして $\varphi(T)$ は数学的には、従来のシステム工学において応答関数 $H(\tau)$ を $e^{i\omega T}$ (ω は角周波数) で展開して得られるシステム関数に対応していると考えることができる。

5. 瞬間単位図について

瞬間単位図 $H(\tau)$ を算出する計算手法としては従来より数多く提案されているが、山地小流域における流量資料のようにハイドログラフそのものが滑らかではなくまた誤差の介入もあるような資料についてそれらの手法を適用すると激しく振動したり、大きな負の値を示したりする場合がある⁹⁾。ところで、このような物理的に解釈の困難な結果を生じさせないために Eaglson⁹⁾ は瞬間単位図に $H(\tau) \geq 0$ の条件を課し、L.P. (Linear Programming) の手法によって比較的滑らかな形状をした瞬間単位図を求める方法を提案している。しかしこの条件が解に与える影響を定量的に評価できない以上、必ずしも十分な計算手法とは思われない。ところで著者はこのように誤差を含む資料を用いたときの応答関数 (瞬間単位図) を求める計算方法として田辺¹⁰⁾によって提案されている B-Spline 関数を用いたたみこみ積分の解析方法を使用し、水文現象に適用したところ、良好な結果を得ており、文献 17) にその解析方法と結果を発表している。よってここではその計算方法の説明は省略し、得られた応答関数のみを 図-2 から 図-9 に示す (付録において、その精度が検討されている)。なお、以後の流出解析に用いた山地小流域は表-1 に掲げる 4 流域であり、それぞれ A, B, C, D 流域と略称する。ここで 図-

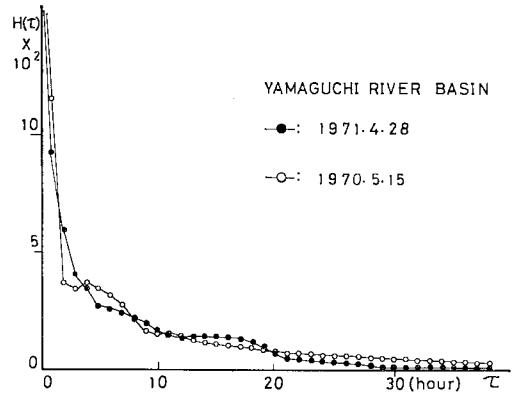


図-2 A 流域の $H(\tau)$

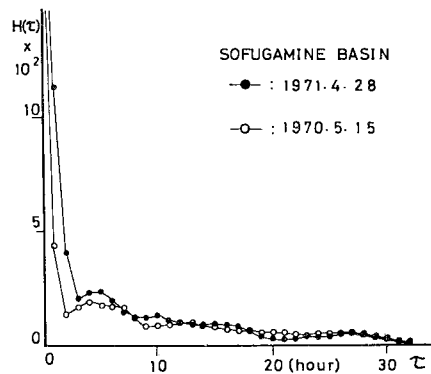


図-3 B 流域の $H(\tau)$

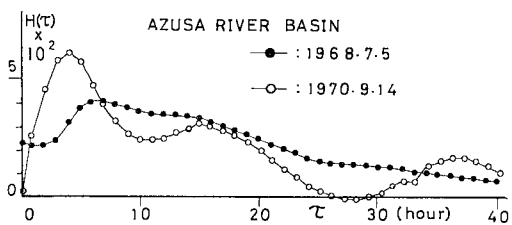
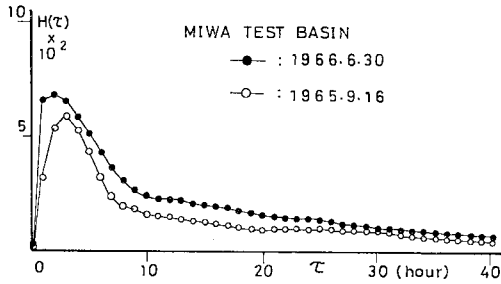


図-4 C 流域の $H(\tau)$

表-1 山地小流域の概要

試験地名	所在地	流域面積 A (km ²)	流域最大辺長 L ₀ (km)	形状係数 F (F=L ₀ ² /A)	流域平均勾配
一流域 A— 裏筑波流域小試験地 山口川流域	茨城県筑波山麓霞ヶ浦支流桜川 左支川 山口川 (流域 B を含む)	3.12	3.00	2.9	25° (等高線延長法) 1/13 (河床勾配)
一流域 B— 裏筑波流域小試験地 祖父ヶ峰流域	同上 山口川右支流	0.16	0.70	3.0	1/16 (河床勾配)
一流域 C— 梓川流域小試験地	山梨県甲府市下積翠寺荒川 右支流 相川 左支流 梓川	0.40	0.77	1.5	21° (水位観測地点から最も 遠い尾根の間の勾配)
一流域 D— 美和小試験地	長野県南部天竜川 左支川 三峰川 右支川 小犬沢	1.30	1.83	2.6	30° (等高線延長法)



図—5 D流域の H(τ)

2 から 図—5 よりわかるように瞬間単位図 $II(\tau)$ は流域ごとにかなり異なり、またこの程度の流域面積の違いでは流域面積の大小が $H(\tau)$ に与える影響を論じることはできず、むしろかつて石原ら¹¹⁾が指摘したように、個々の流域においても降雨の特性の違いによる瞬間単位図の変化の方がより系統的な傾向を有しているように思われる。たとえばC流域の 図—4 の2例はそれぞれ総降雨量が 47.5 mm と 147.7 mm の場合であるが、明らかにその瞬間単位図は異なっている。これらの特性の相違を定量的に評価することは次章以降で展開される時定数スペクトルの導入によって初めて行われる。

6. 時定数スペクトルの算出方法

本章では式 (4) において既知量として瞬間単位図 $H(\tau)$ を与え、時定数スペクトル $\varphi(T)$ を求める方法を提示する。なお式 (4) 中のタンクの段数 n は $H(\tau)$ の形状によって $n=1$ から 4 程度の範囲内で決定する。たとえば A, B 流域の $H(\tau)$ では $n=1$ か 2 と決める。 n として 3, 4 をとる流域の場合では後に述べるように結果的には $n=3$ でも 4 でも算出される $\varphi(T)$ に大きな違いはみられなかった。ところで式 (4) において、後の計算の便を考え $p=1/T$ の変数変換を施しておく。このとき式 (4) は、

$$H(\tau) = \frac{\tau^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^0 \varphi\left(\frac{1}{p}\right) p \cdot p^{n-1} e^{-\tau p} (-p^n) dp \dots\dots\dots (5)$$

となる。さらに $\varphi(1/p) = \varphi_0(p)$ とおき、整理すると、

$$\Gamma(n) \tau^{1-n} H(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi_0(p) p^{n-2} e^{-\tau p} dp \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで式 (6) の左辺 $=F(\tau)$ 、右辺の $\varphi_0(p) p^{n-2} = g(p)$ とおくと簡潔になり、

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} g(p) e^{-\tau p} dp \dots\dots\dots (7)$$

となる。ところで式 (7) はラプラス変換の形をしていることより、既知の左辺に対して未知の $g(p)$ を求めることは、原理的に可能である。よって既知量 $H(\tau)$ (あるいは式 (7) の $F(\tau)$) が解析関数として与えられている

場合には通常のラプラス逆変換の解析的な手段を用いることができる。一方、本研究のように $H(\tau)$ (あるいは $F(\tau)$) が離散値として与えられている場合にはその解析には当然困難な問題が付きまとうことが考えられる。ここでは式 (7) のラプラス逆変換に対して、前章のたみこみ積分から瞬間単位図を求めるところで述べている手法とほぼ同様の B-Spline 関数を用いる計算手法を提示する。まず式 (6) の未知量 $g(p)$ を B-Spline 関数 $\phi_{i,l}(p)$ で展開する。

$$g(p) = \sum_{i=1}^{N_p+1} \alpha_i \cdot \phi_{i,l}(p) \dots\dots\dots (8)$$

ここで l は B-Spline 関数の階数、 N_p はいわゆる内部節点数である。次に式 (8) を式 (7) に代入すると、

$$F(\tau) = \sum_{i=1}^{N_p+1} \alpha_i \cdot \int_0^{\infty} \phi_{i,l}(p) e^{-p\tau} dp \dots\dots\dots (9)$$

を得る。ここで式 (9) 中の積分は B-Spline 関数 $\phi_{i,l}(p)$ が既知であることから未知数として N_p+1 個の α_i が決定できることになる。すなわち式 (9) 中の積分値を $P_i(\tau)$ とし、 $F(\tau)$ のデータ数を N_D とすると、未知量 α_i の数 (N_p+1) 個より既知量 $F(\tau)$ や $P_i(\tau)$ の数 (N_D 個) の方が多い $N_D \times (N_p+1)$ 行列 $P_i(\tau)$ を係数行列とする連立方程式を得る。よってこれの最小自乗解を求めることにより α_i がわかり、これを式 (8) に代入することにより $g(p)$ が決定される。なおこのとき用いた B-Spline 関数の階数 l や内部節点数の数 N_p は文献 10) と同様の方法 (AIC を最小にする組合せ、または再現された $F(\tau)$ の実測資料との適合性から判断する) によって決定する。

7. 山地小流域における時定数スペクトルとその解釈

前章のラプラス逆変換に対する数値計算手法により、図—2 から 図—5 に示す 4 つの山地小流域における瞬間単位図 $H(\tau)$ を与え、時定数スペクトル $\varphi(T)$ を求めたものが 図—6 から 図—18 である。本章では、本論文の目的の 1 つである各流域の時定数スペクトル $\varphi(T)$ を通して山地小流域における洪水流出の諸特性を検討した。

(1) A, B 流域の流出特性

A, B 流域の $\varphi(T)$ を示す 図—6 から 9 をみてわかるように、この両流域の時定数スペクトルはすべてほぼ同様の形をしていることが特徴である。すなわち時定数 T が 2~3 時間以内の成分からの流出が洪水流出においては圧倒しており、ほかに 10~30 時間程度の時定数をもったシステムから若干の寄与がある。降雨特性 (総降雨量、降雨継続時間等) の相違による時定数スペクトル

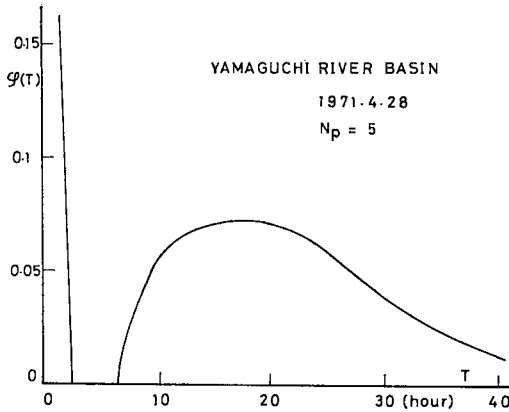


図-6 A流域の $\varphi(T)$ ($n=1$, 以下 A, B 流域はすべて $n=1$)

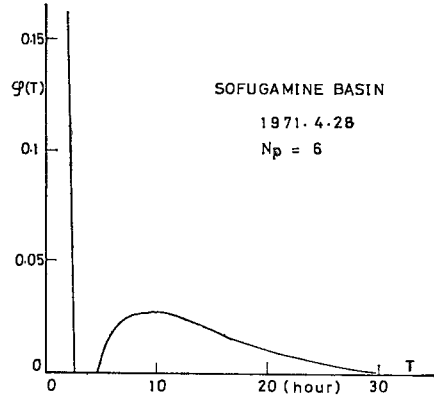


図-8 B流域の $\varphi(T)$

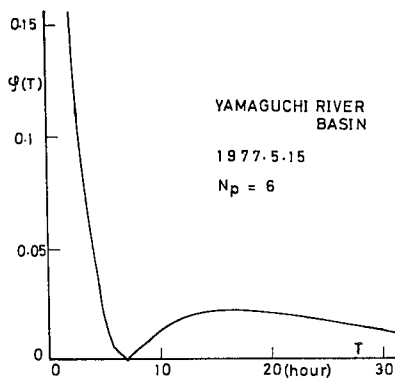


図-7 A流域の $\varphi(T)$

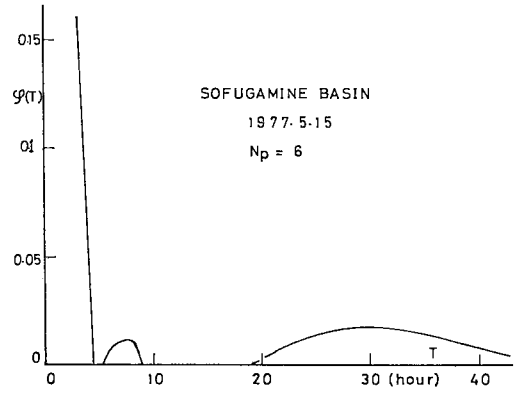


図-9 B流域の $\varphi(T)$

$\varphi(T)$ の値そのものの定量的な変化特性をみることは本解析手法の精度の制約から不可能であるが、少なくとも時定数スペクトルが示す上記の特性（ある時定数 T のところの $\varphi(T)$ にピーク値が現われる）は降雨にかわりなく共通している。また A, B 流域を相互に比較しても両者の特性に本質的な形状の相違はみられない。ところで本論文で提案している時定数スペクトル $\varphi(T)$ はそれぞれ異なった時定数をもった流域内部の各サブシステムの全体に占める割合を示していると考えられるが、A, B 流域にみられる $\varphi(T)$ の同等性は両流域のもつ水文学的構成の同等性を示している。あるいは少なくとも A, B 流域のように地質、植性、あるいは地形的にみて同様の特性を有する流域は（山地小流域、流域面積数 km^2 の範囲において）、流域面積の大小に関係なく同じ形の $\varphi(T)$ をもち、洪水流出の基本的特性には変化がないといえる。このように時定数スペクトル $\varphi(T)$ の導入によって山地小流域（の斜面）のもつ空間的な分布特性の把握が可能になったと思われる。さらに A, B 流域の $\varphi(T)$ の T の非常に小さいところでの極端に大きい値のもつ水文学的な意味に関して、著者は次のよう

に考えている。すなわち A, B 流域での降雨流出において時定数の小さい河道および河道に沿った常に多量の水分を保有している限られた狭い領域からの流出が、全体の流出に対して大きな比重を占めている。なぜならば T の小さい成分には上述の河道および河道沿いの狭い領域からのものと、いわゆる overland flow 等が考えられるが、この A, B 流域においては降雨強度の大きい（たとえば 91.6 mm/h ）1973 年 8 月 4 日洪水も、小さい洪水も降雨に対する流出の開始時刻はともに 1 時間前後であり、現地踏査してみたが、少なくとも B 流域において overland flow の発生した形跡はなく、かつ A, B 流域の $\varphi(T)$ の同等性から考えてこの両流域においては T の小さい成分の 1 つである overland flow からの寄与はないか、あっても僅少であり、 T の小さい成分は上述の河道および河道沿いの領域からのものであると判断し得るからである。

(2) C流域の流出特性

図-10 と 11 は C 流域における時定数スペクトルであるが、一見してわかるようにこれらの図が上述の流域

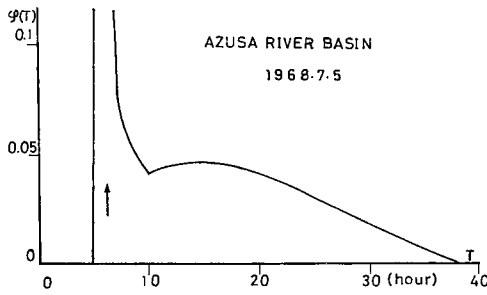


図-10 C流域の $\varphi(T)$ (図中の矢印は時定数スペクトルがその点で線スペクトルになることを示している。 $N_p=10$, $n=3$, 以下 C, D 流域の $\varphi(T)$ はすべて $n=3$ で計算されている)

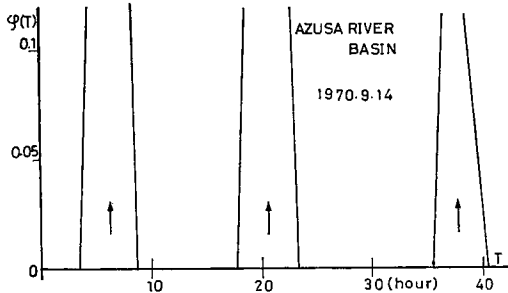


図-11 C流域の $\varphi(T)$ ($N_p=14$)

A, B において得られたものとはまったく異なっているのがわかる。すなわち A, B 流域において $\varphi(T)$ は T の小さいところに集中していたのに対して、C流域のそれらは全般に T の大きいところに集中しており、降雨に対する流出の遅れを予想させる。このことは $\varphi(T)$ をみなくとも C流域のハイトグラフ、ハイドログラフ(後出)をみてもわかり、降雨終了時刻に対して数時間から 10 数時間を経てピーク流量が現われている。

結局、流出の遅れが C流域の特徴といえよう。ところで C流域の瞬間単位図はところどころに極値をもつ凸凹のある形状をしていたが、それに伴い時定数スペクトルも何箇所かの T の値で鋭いピークをもち、その両側で大きな負の値を示している(図-11)。これはピーク値を示す時定数をもったサブシステムのところに降雨が集中して配分されていると考えられ、他の流域の場合と比較して際立った特徴といえよう。ところで 図-10, 11 等は AIC (Akaike's Information Criterion) を最小とするように決定された内部節点数 N_p をもつ場合の図であるが、 N_p が変われば大なり小なり $\varphi(T)$ の形状は変わってくる。たとえば N_p を大きくすると $\varphi(T)$ は非常に上下に振れはじめ、 N_p を小さくすると内部節点 1 点当たりを受けもつデータ数が多くなり、結果的に移動平均を掛けた形で非常に滑らかな $\varphi(T)$ を生じる。結局 N_p の大小は解析の分解能の高低に響いてくる。いま内

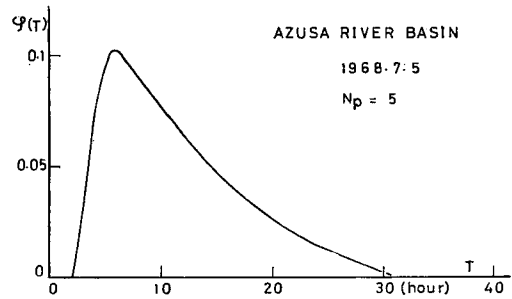


図-12 分解能を落としたときの $\varphi(T)$ (図-10 に対応する。 $N_p=5$)

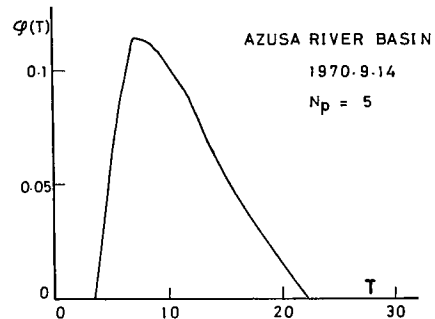


図-13 分解能を落としたときの $\varphi(T)$ (図-11 に対応する。 $N_p=5$)

部節点数 N_p を 図-10, 11 に示した値より少なくして分解能を落とすと、図-12, 13 を得る。より具体的には 図-4 の瞬間単位図の凹凸をならして単峰型のなめらかな $H(\tau)$ にして計算していることになる。この場合の $\varphi(T)$ は分解能の高い 図-10, 11 の $\varphi(T)$ とはまったく異なり、連続した単純な一山の形をしている。どちらのスペクトルが真のものかと問われれば、数学的には分解能*の高い前者であるが、水文学的には両者ともに正しいといえるであろう。なぜならば水文現象の理解とは本来分解能の概念(あるいは時間-空間スケールの取り方の問題)とは不可分のものであると思われる。たとえば 1つの流域で(空間スケールを固定して)瞬時瞬時の雨量を観測したものと、10 分間、1 時間、あるいは 1 日ごとに平均したそれらの量を使って流出解析を行えば、算出される結果には大なり小なりの差異が生じてしまう。しかしながら数学的にはそれらはどの結果も真実であり、そこから得られる流域に対する認識も互いに異なってい

* B-Spline 関数を使った本文式 (8), (9) に示すラプラス逆変換の数値解法において、分解能を数学的に表現することは困難であり、ここでは直感的な意味において使用している。なお B-Spline 関数を使った解法では内部節点の間隔を自由に変えることができ、実際に本報告のなかでもそのようにして計算している(用いる関数やデータの変化の急激なところで内部節点の間隔を小さくしている)。よって分解能といっても T の領域ごとに異なっており、この意味においても直感的な表現にならざるを得ない。

でもなんら不思議ではないのである。すなわち、いま考えている時間スケールの範囲内で合理的であるといえる。ひるがえって本問題に立ち返れば、仮に $T=5, 10, 15$ 時間のところに線スペクトルの形で $\varphi(T)$ が得られても、分解能を落として $T=10$ 時間のところにピークをもつ単峰型の $\varphi(T)$ が得られても、それらは両者ともに分解能の注釈付きで合理性を有しているといえよう。このような理解の上に立って 図-12, 13 をみると、これらの $\varphi(T)$ がすべてガンマ分布と類似の形状をしていることがわかる。

ところで、かつて著者は山地小流域の斜面長の分布を地形図から読み取り、それらの分布形がガンマ分布で表わされることを報告している¹⁰⁾。このとき斜面の長さ l 、斜面を流れ下る雨水の流下速度 v_0' とすると $l=v_0'T$ が近似的に成立している。よって l の分布がガンマ分布ならば T の分布もガンマ分布となる。ゆえにある縮尺の地図から作製した斜面長の分布と前章までの方法で計算した $\varphi(T)$ が同じ形になるということは両者の分解能-考慮した時間-空間スケールが同じ程度であったのではないかと推察し得る。なぜならもし現地の地形そのものから斜面長分布- T のスペクトルを作ったならば、その分解能ははるかに高く、おそらく非常に激しく上下に振動する形状か、あるいはある縮尺の地形図から読み取った斜面長の分布とはかなり異なった形状になることが考えられるからである。

次に降雨の特性の違いによる時定数スペクトル $\varphi(T)$ の挙動の変化をみてみる。図-10 は総降雨量が 47.5 mm、図-11 は 147.7 mm の場合であるが、図-10 の $\varphi(T)$ は比較的平坦であり、図-11 の $\varphi(T)$ はある時定数のところに偏在している。すなわち総降雨量の小さい一雨降雨は流域内の各サブシステムに比較的平等に降雨を配分しているのに対し、一方総降雨量が大きいとその分配関係はある時定数のところに集中している（この議論は流量の相対値にのみ言及しているので両者の絶対量を比較しているのではないことに注意しなければならない）。著者は当初、“小さい雨”は流域の中で一番流れやすいところだけを流れ、“大雨”になると流れにくいところまでも流れるので小さい雨ほど偏在した時定数スペクトルとなり、大雨ほど比較的平坦なスペクトルになると予想していたが、結果はまったく逆であった。結局大雨ほど、ある時定数のサブシステムに自己集中して流れ下っていると結論される。しかしこのような結論も、さらに事例を増したうえで検討されねばならないであろう。

(3) D流域の流出特性

図-14 と図-15 は流域 D の $\varphi(T)$ である。これら

はすべて比較的滑らかな単峰型の時定数スペクトルになっている。また時定数 T の大きいところでも少なからぬ値をもっており、遅れの大きな成分もかなり寄与していることがわかる。一方、流域 D のハイドログラフをみるとわかるように（後出）、この流域の洪水のハイドログラフの逓減部においては、ピーク流量からただちに下がる曲線と、その傾向とはかなり異なり、あたかも別の逓減率をもったハイドログラフに乗り移るかのような挙動が見受けられる。この原因を 図-14, 15 の時定数スペクトルから推察すると、前者の速い逓減を示す部分は時定数 T の小さいサブシステムからの寄与が、一方、後者のゆっくりとした逓減部は T の大きいところからの寄与があると考えられる。図-16 は 図-15 のデータで分解能を高くした（内部節点数を多くした） $\varphi(T)$ であ

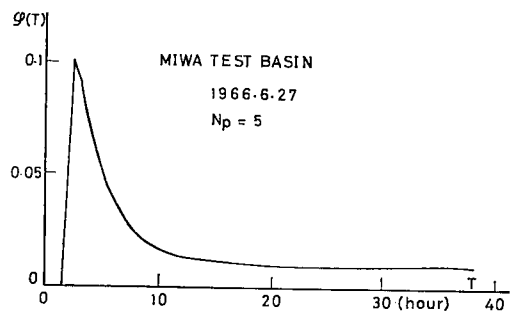


図-14 流域 D の $\varphi(T)$

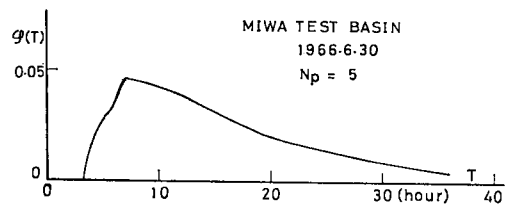


図-15 流域 D の $\varphi(T)$

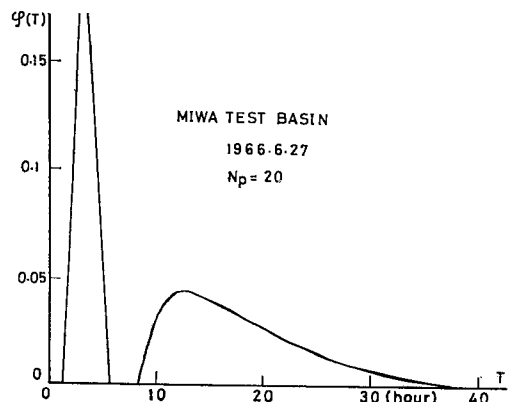


図-16 分解能を高くしたときの $\varphi(T)$
(図-15 に対応している)

るが、この図では $T=2$ 時間前後に 1 つのピークを示し、また $T=12$ 時間あたりに 1 つのピークを示しており、両者からの寄与がかなり接近しているように思われる。このことは上記のハイドログラフの遞減部にみられる特徴を説明していると考えられる。

8. 流出解析

前章において山地小流域で得られる $\varphi(T)$ と斜面長の分布が同じ分解能の範囲において同じ形のガンマ分布形で表わされる場合があることを示した。ここではこの知見をもとに $\varphi(T)$ として以下の式 (10) で表わされるガンマ分布の関数形を用い、このとき現われる k と α の 2 つのパラメーターに適当な数値を代入することにより流出解析 (ハイドログラフの再現計算) を行い、前章までの推論の妥当性を検討してみた。さらに用いたパラメーターを通して洪水流出の特性を探ってみた。ここで $\varphi(T)$ として上述のようにガンマ分布形をとると、

$$\varphi(T) = \frac{\alpha}{\Gamma(k)} (\alpha T)^{k-1} e^{-\alpha T} \dots \dots \dots (10)$$

となる。次に式 (10) を式 (3) に代入して瞬間単位図 $H(\tau)$ を計算すると、

$$H(\tau) = \int_0^\infty \frac{n}{\Gamma(k)} (\alpha T)^{k-1} e^{-\alpha T} \frac{T^{-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{n-1} e^{-\tau/T} dT$$

$$= \frac{\alpha^k \tau^{n-1}}{\Gamma(k)\Gamma(n)} \int_0^\infty T^{(k-n-1)} \cdot e^{-\tau/T} e^{-\alpha T} dT \dots (11)$$

となる。ここで式 (11) の演算にラプラス変換を用いると、

$$H(\tau) = \frac{2^{3-(n+k)}}{\Gamma(k)\Gamma(n)} \cdot \alpha (2\sqrt{\alpha\tau})^{k+n-2} K_{(n-k)}(2\sqrt{\alpha\tau}) \dots \dots \dots (12)$$

となる。ここに $K_{(n-k)}(\)$ は $(n-k)$ を次数とする第 2 種変形ベッセル関数である。ここで式 (12) において n, k, α の 3 つのパラメーターが現われたが、 n は本来タンクの段数であったことより、流域の地層構成を示す指標であり、 k は時定数 T をもつそのような地層の空間分布を示す指標である。さらに α はその空間分布の集中度 (分散に関係している) を表わしている。ここで興味あることは式 (12) において n と k を互いに入れ換えてもベッセル関数の性質の 1 つである $K_{(n-k)}(\) = K_{(k-n)}(\)$ よりまったく同じ式であり続けることである。このことは流域のもつ平面的な分布特性と鉛直構造との間の互換性を意味しており、逆にハイドログラフ等からこれらの特性を抽出しても、その答は“重根”になる (空間構造と鉛直構造を互いに取り違えて解釈しても同じ認識を得たことになってしまう) ことを示唆してい

る。もちろん、この結論は著者の提案した本モデルの枠内から得られたものであり、その一般性は今後、検討されねばならないであろう。

ところで式 (12) で与えられる瞬間単位図の概観をみるために、 n, k, α に適当な数値を代入して計算した $H(\tau)$ を 図-17 に示している。

次に式 (12), (3) に基づきハイドログラフを再現する前に、A, B, C, D 4 流域の $F-R$ 関係は 図-18 から

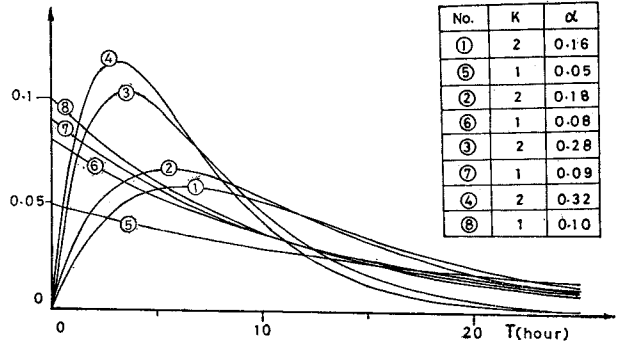


図-17 式 (12) の $H(\tau)$ の概観

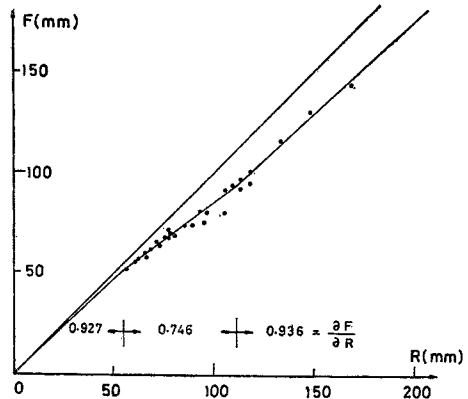


図-18 A 流域の $F-R$ 関係

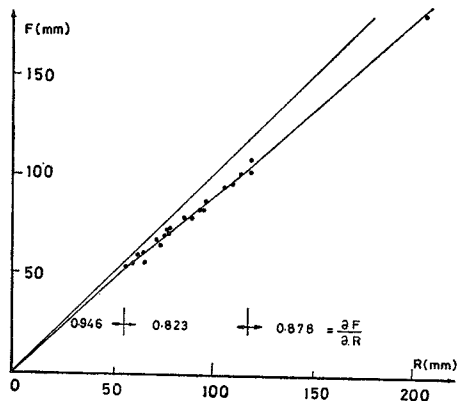


図-19 B 流域の $F-R$ 関係

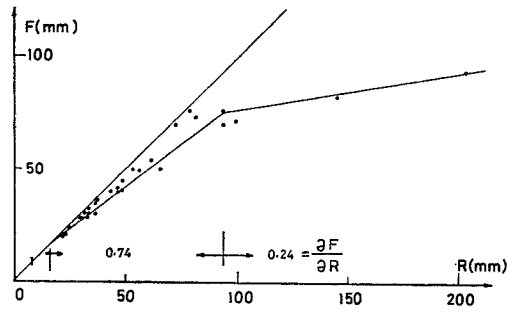


図-20 C流域の F-R 関係

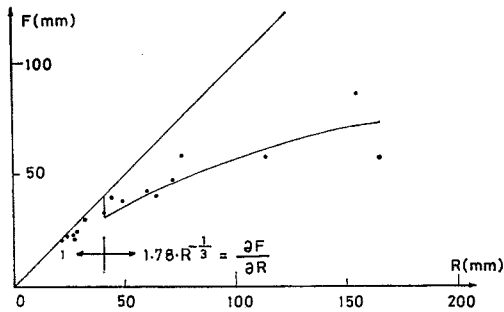


図-21 D流域の F-R 関係(図-18 から 21 中の実線は流出計算に用いた F-R の関係式を示している)

21 に示されている。この F-R 関係の示す水文学的意味は文献 16), 17) において詳述されているのでここにおいては省略するが、以下にこれらの F-R 関係を式 (3) に用い、また式 (12) の瞬間単位図 $H(\tau)$ を用いてハイドログラフの再現計算を行ってみた。このとき式 (12) 中のパラメーター n, k, α は実測と計算のハイドログラフが誤差の自乗和を最小にする意味で最適に選ばれている。

(1) A, B 流域

この 2 流域に関して再現されたハイドログラフと観測のハイドログラフをそれぞれ一例ずつ掲げておく(図-22, 23)。また他の洪水について選ばれた n, k, α の値と洪水特性とを表-2 に示しておく。これらの図では $n=1$ の場合の計算結果だけが掲げられているが、 n が 3 以上の値をとったときはいくら α を調整しても 図-22, 23 に示すほどの再現性を得ることはできなかった。ところで表-2 より、A, B 流域の流域面積の大小に関係なく、 k, α の値はそれほど違わず、むしろ降雨の違いによる値の変動の方が大きいことがわかる。よって以下に k, α のもつ水文学的意味およびその降雨の違いによる変化に関して議論をしてみた。

a) k, α のもつ意味

A, B 流域に関して、 $n=1$ に固定したときの k は 1 か 2 のみをとっている。ところで k の値は既述のように

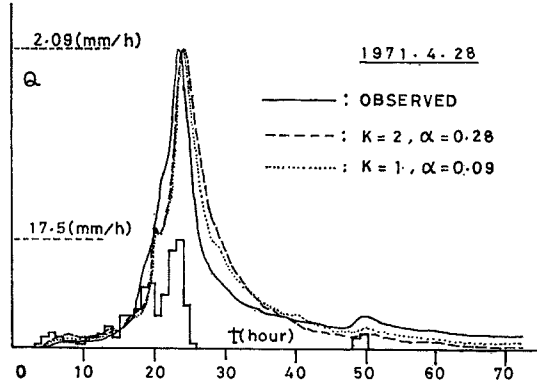


図-22 A流域の再現されたハイドログラフと観測のハイドログラフ

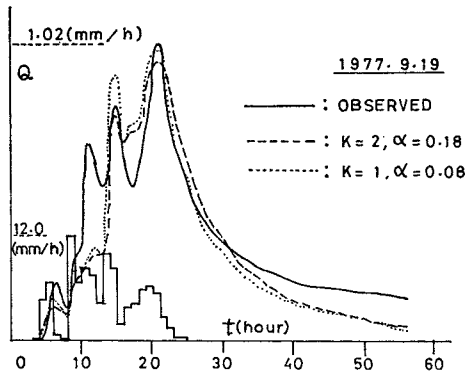


図-23 B 流域

表-2 A, B 流域の n, k, α の値と洪水特性

流域	洪水生起年月日	$\alpha(1/h)$		総降雨量 R (mm)	最大降雨強度 r_{max} (mm/h)	最流出高 Q_{max} (mm/h)
		$k=1$	$k=2$			
A流域	1970.11.19	1	0.05	161.5	12.0	1.04
	1971.4.28	1	0.09	129.5	24.0	2.16
	1973.8.4	1	0.10	102.0	88.0	2.69
	1977.5.15	1	0.05	123.5	23.0	1.30
	1977.9.19	1	0.08	106.0	12.0	1.15
B流域	1970.11.19	1	0.04	161.5	12.0	0.69
	1971.4.28	1	0.09	129.5	24.0	1.50
	1977.5.15	1	0.06	123.5	23.0	欠測

流域の空間的な分布特性を示しているが、一方、流域の空間分布特性を示すもう 1 つの指標としての斜面長分布はこの 2 流域はともに 5 次のガンマ分布で表わされており¹⁶⁾、両者はまったくかけ離れている。すなわち実際に雨水が流下する斜面の長さは、地形図から読み取った斜面の長さよりはるかに短いことを示していると考えられる。また $k=1$ のときの時定数スペクトルはガンマ分布の性質から単調に exponential 減衰を示すものであるが、これは 図-6~9 に示す $\phi(T)$ 形状と同形であり、6. のところで論じている A, B 流域の特性がここにお

いて確かめられている。すなわち A, B 流域では時定数の小さい河道沿いの狭い流域からの寄与が大きいのであろう。

b) 降雨特性による k, α の値の変動

表-2 に示す k, α の値の変動を洪水特性との観点からみるために、ここでは一雨降雨の洪水期間中のピーク流出高に対してそれぞれを図示してみた(図-24)。この図より k の値は1あるいは2で、降雨規模にそれほど左右されることはないが、 α の値はピーク流出高の増大とともにしだいに増大しているのがわかる。ところでガンマ分布の性質より k/α が T の平均値を、 k/α^2 がその分散を意味している。よって上述の事柄はピーク流量の増大(一般に降雨規模の増大)につれて雨水は流域内のより速い(T の小さい)サブシステムを通して流出し、またより速いサブシステムに集中して流出していることを示しており、興味ある結果となっている。

(2) 流域 C

上記と同様に C 流域における再現されたハイドログラフの一例を図-25 に示し、またこの流域での他の洪水に対して採用した n, k, α の値を表-3 に掲げている。表-3 より n, k の値は降雨の特性(降雨強度、総降雨

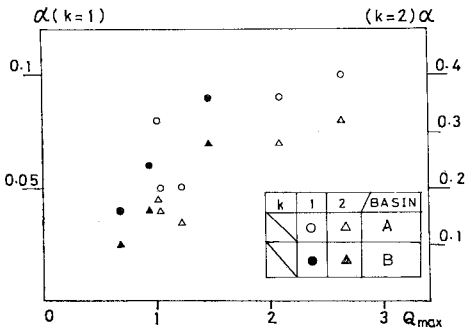


図-24 A, B 流域の k, α の値のピーク流量に対する変動 (Q の単位は mm/h, α は 1/h)

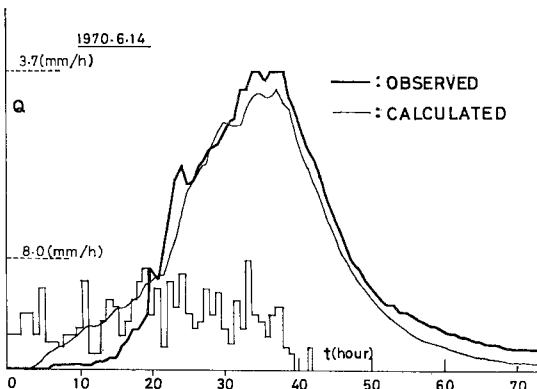


図-25 流域 C の再現されたハイドログラフの一例

表-3 流域 C の n, k, α の値と洪水特性

流域	洪水生起年月日	k (n)	n (k)	α (1/h)	総降雨量 R (mm)	最大降雨強度 r_{max} (mm/h)	最大流出高 Q_{max} (mm/h)
C流域	1968. 7. 5	3	3	0.45	47.5	8.0	0.32
	1969. 6.25	3	3	0.35	36.5	5.0	0.16
	1970. 6.14	3	3	0.55	184.0	8.0	3.7
	1970. 9.14	3	3	0.55	147.7	11.0	2.6

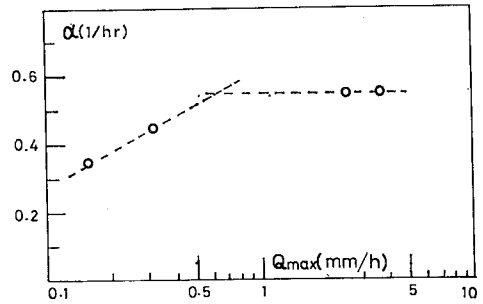


図-26 流域 C の α の値のピーク流量に対する変動

量等) によっては変化しておらず、また A, B 流域の例も加え合わせると n, k の値は流域固有の特性を反映していると考えられる。一方、 α の値をピーク流量に対して図示すると 図-26 が得られる。この図より前と同様に α の値はピーク流量の増大とともに大きくなっているのがわかる。しかし A, B 流域の 図-24 とは異なり、 α の値にはある上限値が存在しているようにみえる。このことから C 流域の $F-R$ 関係の図(図-20)にもみられるように、総降雨量 R が約 70 mm を超えてからは流域は一種の飽和状態になるのではないかと考えられる。なお雨水の流出形態に関して α のもつ意味は先の A, B 流域の場合と同様である。

(3) D 流域

上記と同様に D 流域の再現されたハイドログラフが 図-27 に、また他の洪水時の n, k, α の値が 表-4 に示されている。表-4 から α の値は流出の特性(たとえば r_{max} や Q_{max}) と直接の相関をもっていないように思われるが、このことは D 流域の $F-R$ 図(図-21) が大きくばらついていることとも関係していよう。流域 D は近くに中央構造線の(東端)が走っており、このことから流域 D は基岩に亀裂等の割れ目が発達した流域であることが考えられるが、今後はこのような地質構造の違

表-4 流域 D の n, k, α の値と洪水特性

流域	洪水生起年月日	k (n)	n (k)	α (1/h)	総降雨量 R (mm)	最大降雨強度 r_{max} (mm/h)	最大流出高 Q_{max} (mm/h)
D流域	1966. 6.27	2	3	0.35	96	10.0	1.76
	1966. 6.30	2	3	0.6	68	8.5	1.65
	1970. 9.16	2	3	0.35	116	11.0	1.70

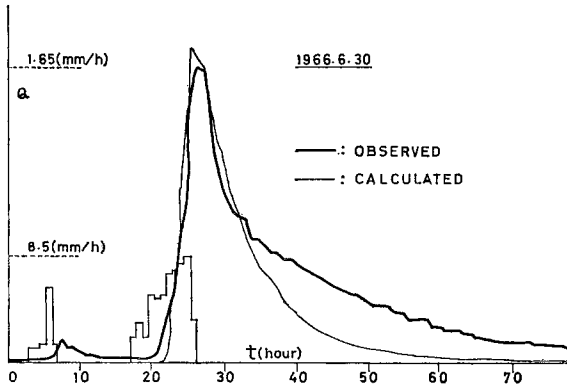


図-27 流域Dの再現されたハイドログラフの一例

いをも考慮した解析が必要になってくるであろう。

9. 結 び

以下に本研究において行ったことを列挙する。

- (1) 流出解析を行う一般的な式 (3) および式 (12) を提出した。
 - (2) 流域の空間的な分布特性を与える時定数スペクトルの概念を導入した。
 - (3) 瞬間単位図を合理的に算出する手法を提示した。
 - (4) 瞬間単位図と時定数スペクトルとの関係を明らかにした。
 - (5) 時定数スペクトルを合理的に算出する手法を提示した。
 - (6) 時定数スペクトルと流域の斜面長分布との関係を明らかにした。
 - (7) 上記の概念と計算手法を河道効果が無視できる程度の4つの山地小流域に適用したところ、それらのもつ一般的な洪水流出特性の共通点や相違点が明らかにされた。
 - (8) またこれらの計算を通して水文特性量としての時定数スペクトルの有用性が立証された。
- 以上である。

謝 辞：本研究において使用した水文資料はすべて山梨大学工学部土木工学科 荻原能男教授および建設省土木研究所水文研究室において長年観測されてきた貴重な水文資料であり、心よくその使用を許可していただいた荻原能男教授ならびに石崎勝義室長に深甚の謝意を表すものである。また当時東京工業大学4年生（現・建設省九州地方建設局）の田所 正君の惜しめない助力にも感謝の意を捧げる。なお本研究の遂行において著者は東京工業大学工学部土木工学科より奨学金の助成を受け

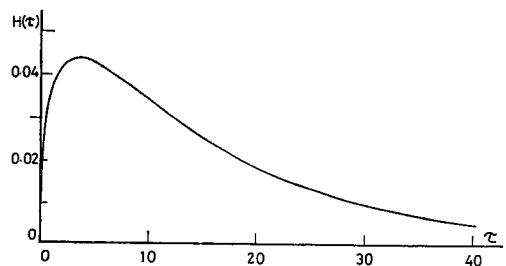
た。ここに紙面を貸りて東工大土木教室に感謝するものである。

付 録

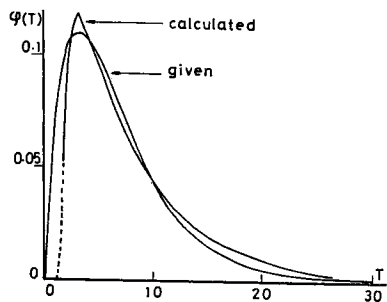
本研究では Laplace 逆変換とたたみこみ積分のともに積分方程式に対して本文式 (8), (9) に示すように未知関数を B-Spline 関数で展開する手法を用いている。ここではこの手法の計算精度を確かめるために本文式 (4) において $H(\tau)$ として既知の解析関数を与え（このとき $\varphi(T)$ は当然解析関数として既知）、式 (6), (7) に変形したのち式 (8), (9) によって $\varphi(T)$ を再現してみた。付図-1 はこのとき与えた関数形であり、付図-2 は与えた $\varphi(T)$ および再現された $\varphi(T)$ である。この図より本手法は T の非常に小さいところを除いて、ピーク位置の再現等比較的良好な結果を得ているといえる。次に S-1 式の形のたたみこみ積分に対する本手法の計算精度と N_p の変化が結果に与える影響を見てみた。

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau)r(\tau)d\tau \dots\dots\dots (S-1)$$

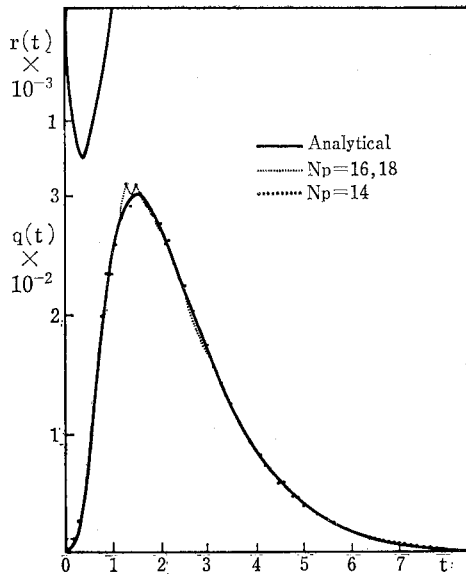
ここで $r(\tau), q(t)$ としては Delleur ら¹⁹⁾によって与えられた解析関数を用いた。付図-3 はこのとき用いた $r(\tau), q(t)$ の形を示しており、付図-4 は本手法で再現された $h(\tau)$ とその解析解を示している。付図-4 より $N_p=16$ や 18 の場合に最も精度よく $h(\tau)$ を再現して



付図-1 与えた $H(\tau)$ の関数形 (本文式 (12) の $H(\tau)$ で $\alpha=0.3, k=2, n=3$ の場合である)



付図-2 再現された $\varphi(T)$ および解析解 ($N_p=14$ で計算された例)

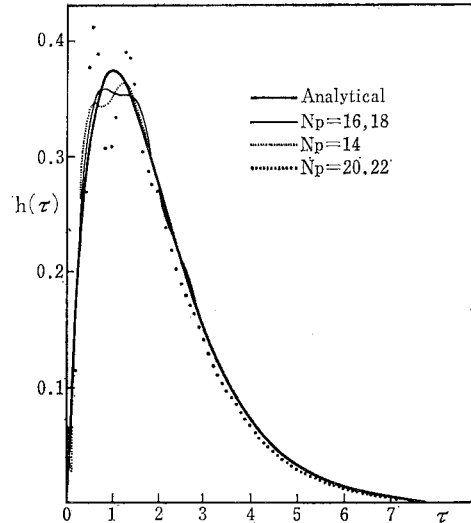


付図-3 与えた $r(t) \cdot q(t)$ の関数形 (文献 19) より
(図中の点と点線は付図-4の再現された $h(\tau)$
と与えた $r(t)$ を用いて再計算された $q(t)$ で
ある)

いることがわかる. 上の2つの例により, 積分方程式の
数値解法に B-Spline 関数を用いた本手法の精度を確認
することができる.

参考文献

- 1) 菅原正巳: 流出解析法, 共立出版, 1972.
- 2) 高棹琢馬・金丸昭治: 水文学, 朝倉書店.
- 3) Linsley, R.K., M.A. Kohler and J.L.H. Paulhus: Hydrology for Engineering, McGraw-Hill, 1958.
- 4) Hino, M. and M. Hashebe: Further Test of Applicability of the Inverse Detection Method and Extension to Hourly Hydrologic Data, Proceedings of the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, Tokyo, Japan, 1980.
- 5) 四俣正俊: 洪水流量遞減曲線の解釈, 土木学会論文報告集, No. 245, 1976.
- 6) 平野宗夫・小川 滋・木川良二: 山腹斜面からの流出について, 第29回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1974.
- 7) 平野宗夫・伊藤尚規: 到達時間の分布を考慮した流出解析, 第22回水理講演会論文集, 1978.
- 8) 藤田陸博: 線形系の解析, 第11回水工学に関する夏期研修会講義集, Aコース, 1975.
- 9) Eaglson, P.S., R. Mejia-R and F. March: Computa-



付図-4 再現された $h(\tau)$

tion of optimum realizable unit hydrographs, Water Resources Res., Vol. 2, No. 2, 1966.

- 10) 田辺國士: 不適切問題への統計的アプローチ, 数理科学, No. 153, 1976.
- 11) 石原藤次郎・金丸昭治: 降雨条件の変動による単位図の特性について, 土木学会誌, 第32号, 1956.
- 12) Nash, J.E.: The form of the instantaneous unit hydrograph, Intern. Assoc. Sci. Hydrology, Pub. 45, Vol. 3, 1957.
- 13) 佐藤清一・吉川秀夫・木村俊兒: 降雨から流出量を推定する一方法, 建設省土木研究所報告, 87, 1954.
- 14) 岡本芳美・述川正昭: 美和小試験地における洪水流出についての一考察, 土木技術資料, Vol. 11, No. 6.
- 15) 吉川秀夫・山田 正: 浸透流に関する水理学的研究, I, II, III, IV, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 25, 1979.
- 16) 山田 正: 山地小流域の瞬間単位図と斜面長の分布の関係, 土木学会論文報告集, 第306号, 1981.
- 17) 山田 正: 山地小流域における瞬間単位図と時定数スペクトルについて, 第34回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1980.
- 18) 角屋 陸・福島 農・佐合純造: 丘陵山地流域モデルと洪水流出モデル, 京都大学防災研究所年報, 第27号, B-2, 1978.
- 19) Delleur, J.W. and R.A. Rao: Linear Systems Analysis in Hydrology—The Transform Approach, The Kernel Oscillations and the Effect of Noise, United States-Japan Bi-Lateral Seminar in Hydrology, Honolulu, January, 1971.

(1980.8.18・受付)