

## 2 次元の土壌凍結進行過程の近似解法

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS FOR TWO DIMENSIONAL  
FREEZING PROBLEMS OF SOIL

小 森 友 明\*・関 平 和\*\*

By Tomoaki KOMORI and Hirakazu SEKI

## 1. 緒 言

土壌凍結過程等に応用される Stefan, Neumann 問題<sup>1)</sup>の数値解析法は近年著しく進展し、不定形の3次元モデルに対しても有限差分法<sup>2)</sup>や変分不等式<sup>3)</sup>による数値解法が電子計算機の性能向上に伴い開発されるに至った。一般にこの問題は非線形的要素を包含することから、解析解の導出が困難なことはよく知られている。この種の問題の実用的な範ちゅうとしては、対象とする試料に違いがあるとはいえ、機械工学、化学工学、食品工学等の分野で、相変化を伴う熱伝導問題として広く取り扱われている<sup>4)~6)</sup>。その多くは1次元モデルを前提としており、試料の相変化特性や加熱あるいは冷却方式との関連性に関するものであるが、工学的な実際例では、2次元もしくは3次元の相変化過程を対象とする場合にしばしば遭遇する。たとえば、LNG 低温地下タンク周辺の土壌凍結過程はその代表的な実際例である。

これまで、多次元物体の相変化過程を対象とした解析的手法としては、Boley の仮想的な熱流束に基づく embedding technique がよく知られており、いくつかのモデルケースが取り扱われている<sup>7)</sup>。また、Rathjen は角壁付近の相変化過程について Lightfoot の移動熱源の理論を応用した厳密解を導出している<sup>8)</sup>。この解法は固-液両相の温度分布を Green 関数を用いた積分形で表示したもので、有限差分法との比較によって得られた解析解の妥当性を検討しているが、解の適用は固-液両相の熱拡散率が同一の場合に限られるため、土壌凍結等の実用問題に解を直接適用することはできない。しかし、移動境界面が超越双曲線 (super-hyperbola) で表示できることが指摘されており、相変化進行過程の数学的な把握を容易にしている。

本論文では、角壁状土壌の凍結および平面とそこから直角な方向に配置された半無限円筒状物体周辺の土壌凍結過程を取り上げ、特解の線形近似と凍結面方程式の超越双曲線表示により、凍結、未凍結両相の熱拡散率が異なる一般的な凍結問題に対する解析的近似解法を提示した。

上述のごとく、Rathjen の解法は、凍結、未凍結両相の熱拡散率が等しい場合についてであったが、本解法においても凍結面方程式を超越双曲線で表示し、解析の便宜を図ることとした。また、得られた解を有限差分法による数値解と比較し、解法の妥当性を検討した。

なお、本解法を適用する具体例としては、前述の LNG 地下タンク周辺の土壌凍結過程等をあげることができるが、ここに示したモデルは冷却面形状が角状もしくは平面とそれに直角な円筒状という簡単な2例を扱ったものであり、必ずしも実際の冷却面形状に即したモデルを想定したとはいえないが、2次元の土壌凍結過程を解析する一方法を提示することにより、今後より実際的なモデルを解析する場合の手がかりを与えるものと思われる。

## 2. 理 論

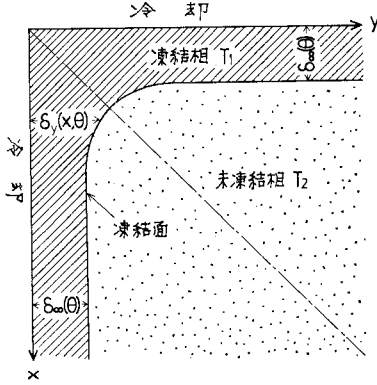
## (1) 角壁付近の凍結過程の解析

図-1 のような角壁状土壌の表面  $x=0, y=0$  が凍結温度以下の一定温度に保たれると、凍結はしだいに内側へ進行し、任意時間  $\theta$  での凍結面は図のような形状となるであろう。ここで凍結面位置は  $\delta_y(x, \theta)$  と表示し、 $x, y$  がそれぞれ十分大なる領域については1次元凍結過程に近づき、時間のみの関数とみなせるから  $\delta_\infty(\theta)$  とする。

本節では 図-1 のようなモデルに基づく凍結過程の解析的近似解を導出する。

\* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部建設工学科

\*\* 正会員 工修 金沢大学助手 工学部建設工学科



図—1 解析モデル図 (角壁モデル)

a) 基礎方程式, 境界条件および初期条件

1次元モデルに対する Neumann の厳密解は次のような仮定に基づいて導出されている。

- i) 各相における熱的物性値は, 同一相内において温度に無関係に一定である。
- ii) 凍結による体積変化は無視できる。
- iii) 凍結は凍結温度で起こり, 凍結面はその温度に保たれる。

さしあたり, ここでも数学的取り扱いの都合上, i)~iii) の仮定が成立するものとすれば, 各相の基礎方程式は,

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} = \kappa_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \begin{cases} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \delta_y(x, \theta) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = \kappa_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) \begin{cases} \delta_\infty(\theta) < x < \infty \\ \delta_y(x, \theta) < y < \infty \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

試料表面温度は一定に保たれるから,

$$T_1 = T_0 \quad (x=0) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$T_1 = T_0 \quad (y=0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

仮定 iii) より凍結過程で凍結温度は一定に保たれるから,

$$T_1 = T_2 = T_f \quad (y = \delta_y(x, \theta)) \quad \dots\dots\dots (5)$$

また, 凍結面での熱収支式は次のように示される。

$$\left\{ K_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - K_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right\} \left\{ 1 + \left( \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right)^2 \right\} = \rho L \frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} \quad (y = \delta_y(x, \theta)) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし, 式中の  $\delta_y$  は  $\delta_y(x, \theta)$  を略記したものである。

$$\frac{\partial \delta_y / \partial \theta}{1 + (\partial \delta_y / \partial x)^2} = -\beta \left[ \frac{\exp(-\delta_y^2 / 4 \kappa_1 \theta)}{\sqrt{\pi \kappa_1 \theta} \operatorname{erf}(\delta_y / 2 \sqrt{\kappa_1 \theta})} + T^* \times \frac{\exp(-\delta_y^2 / 4 \kappa_2 \theta) \operatorname{erf}(x / 2 \sqrt{\kappa_2 \theta})}{\sqrt{\pi \kappa_2 \theta} \{ \operatorname{erf}(x / 2 \sqrt{\kappa_2 \theta}) \operatorname{erf}(\delta_y / 2 \sqrt{\kappa_2 \theta}) - 1 \}} \right] = g(\theta, x, \delta_y) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで,  $\beta, T^*$  は  $\beta = K_1(T_0 - T_f) / \rho L, T^* = K_2(T_i - T_f) / K_1(T_f - T_0)$  である。

式 (16) を式 (17) へ代入して  $x$  についての偏微分項を求めれば,

$$\frac{\partial \delta_y}{\partial x} = -\sqrt{\frac{G(\theta, x, \delta_y)}{g(\theta, x, \delta_y)} - 1} \quad \dots\dots\dots (18)$$

そして初期条件は,

$$T_2 = T_i \quad (\theta=0) \quad \dots\dots\dots (7)$$

b) 特解の導出

式 (3)~(7) の条件を用いて式 (1), (2) を解くことはきわめて困難なので, ここでは以下のような方法によって, まず各相の特解を導くことにする。

いま, 物理的に与えることのできない凍結相の初期温度ならびに未凍結相の試料表面温度を便宜上次のように設定する。

$$T_2 = T_B \quad (x=0) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$T_2 = T_B \quad (y=0) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$T_1 = T_A \quad (\theta=0) \quad \dots\dots\dots (10)$$

式 (3), (4), (10) を満たす式 (1) の解, および式 (7)~(9) を満たす式 (2) の解は変数分離法により次のように与えられる。

$$\frac{T_1 - T_0}{T_A - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1\theta}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa_1\theta}}\right) \quad \dots\dots (11)$$

$$\frac{T_2 - T_B}{T_i - T_B} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2\theta}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa_2\theta}}\right) \quad \dots\dots (12)$$

ここで,  $\operatorname{erf}(\xi)$  は Gauss の誤差関数である。

式 (11), (12) を式 (5) に適合させると, 無次元化された  $T_A, T_B$  すなわち  $\phi_A, \phi_B$  は,

$$\phi_A = \frac{T_A - T_0}{T_f - T_0} = \frac{1}{\operatorname{erf}(x/2\sqrt{\kappa_1\theta}) \operatorname{erf}(y/2\sqrt{\kappa_1\theta})} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\phi_B = \frac{T_B - T_i}{T_f - T_i} = \frac{1}{1 - \operatorname{erf}(x/2\sqrt{\kappa_2\theta}) \operatorname{erf}(y/2\sqrt{\kappa_2\theta})} \quad \dots\dots\dots (14)$$

c) 凍結面位置の決定法

Rathjen の解法に準じ, 凍結面方程式が次のような超越双曲線で表わされるとする。

$$\left\{ \left( \frac{\delta_y}{\delta_\infty} \right)^m - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{x}{\delta_\infty} \right)^m - 1 \right\} = C \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで,  $m, C$  は定数であり,  $\delta_\infty$  は Neumann の厳密解より時間の平方根に比例することがわかっている。式

(15) を時間について微分すれば,

$$\frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} = \frac{\delta_y}{\delta_\infty} \left\{ 1 + \frac{\delta_y^m - \delta_\infty^m}{x^m - \delta_\infty^m} \left( \frac{x}{\delta_y} \right)^m \right\} \frac{d\delta_\infty}{d\theta} = G(\theta, x, \delta_y) \quad \dots\dots\dots (16)$$

一方, 式 (6) に式 (11)~(14) を適合させ, 変形すると,

さて、任意時間  $\theta$

における凍結面を改めて模式的に示せば図-2 のごとく図示できる。この場合には、凍結面は常に直線  $y=x$  に対して対称であるから、点  $P(\delta_\infty(\theta_1), \delta_\infty(\theta_1))$  (ただし  $\theta_1 > \theta$ ) に

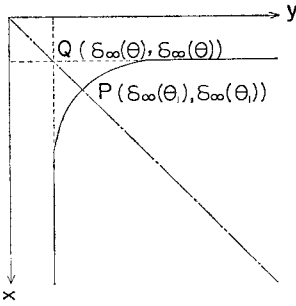


図-2 凍結面位置 (角壁モデル)

において、 $\partial\delta_y/\partial x = -1$  が成立しなければならない。したがって式 (18) より次式が得られる。

$$\frac{G(\theta, \delta_\infty(\theta_1), \delta_\infty(\theta_1))}{g(\theta, \delta_\infty(\theta_1), \delta_\infty(\theta_1))} = 2 \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\delta_\infty = \lambda\sqrt{\theta}$  ( $\lambda$ : 定数) の関係を用いると、式 (19) は、

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}\varphi = & -\beta \left[ \frac{\exp(-\lambda^2\varphi^2/4\kappa_1)}{\sqrt{\pi\kappa_1}\text{erf}(\lambda\varphi/2\sqrt{\kappa_1})} \right. \\ & \left. + T^* \frac{\exp(-\lambda^2\varphi^2/4\kappa_2)\text{erf}(\lambda\varphi/2\sqrt{\kappa_2})}{\sqrt{\pi\kappa_2}\{\text{erf}(\lambda\varphi/2\sqrt{\kappa_2})^2 - 1\}} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

となる。ただし  $\varphi^2 = \theta_1/\theta$  である。上式から  $\varphi$  が算出されると、任意時間  $\theta$  に対する  $\theta_1$  の値が次のように一義的に決定される。

$$\theta_1 = \varphi^2\theta \dots\dots\dots (21)$$

また、凍結面方程式を  $x$  について微分すると、

$$\frac{\partial\delta_y}{\partial x} = -\frac{\delta_y^m - \delta_\infty^m}{x^m - \delta_\infty^m} \left( \frac{x}{\delta_y} \right)^{m-1} \dots\dots\dots (22)$$

ここで、式 (18) と式 (22) は等値であるから、

$$\frac{\delta_y^m - \delta_\infty^m}{x^m - \delta_\infty^m} \left( \frac{x}{\delta_y} \right)^{m-1} = \sqrt{\frac{G(\theta, x, \delta_y)}{g(\theta, x, \delta_y)} - 1} \dots\dots\dots (23)$$

すなわち、凍結面上の任意の 1 点に上式を適用することにより、指数  $m$  を算出することができる。

このようにして  $\varphi, m$  が定められると、凍結面方程式は次式で与えられる。

$$\{(y/\lambda\sqrt{\theta})^m - 1\} \{(x/\lambda\sqrt{\theta})^m - 1\} = (\varphi^m - 1)^2 \dots\dots\dots (24)$$

d) 温度分布算出式

任意時間  $\theta$  における温度分布式は式 (13), (14) から得られた  $\varphi_A, \varphi_B$  を式 (11), (12) に代入することにより、次のように与えられる。

$$T_1 = (T_f - T_0) \frac{\text{erf}(y/2\sqrt{\kappa_1\theta})}{\text{erf}(\delta_y/2\sqrt{\kappa_1\theta})} + T_0 \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} T_2 = & (T_f - T_i) \frac{\text{erf}(x/2\sqrt{\kappa_2\theta})\text{erf}(y/2\sqrt{\kappa_2\theta}) - 1}{\text{erf}(x/2\sqrt{\kappa_2\theta})\text{erf}(\delta_y/2\sqrt{\kappa_2\theta}) - 1} \\ & + T_i \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

以上のようにして、この問題を解析することができた

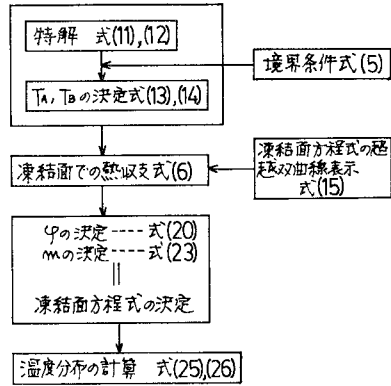


図-3 解法の手順 (角壁モデル)

が、実際には仮想温度  $T_A, T_B$  が定数とはならないため、ここで得られた解は厳密には基礎方程式を満足しない。設定した特解の形から明らかなように、解が厳密に基礎方程式を満足するのは、凍結のない場合、すなわち  $\kappa_1 = \kappa_2$  かつ  $L=0$  の場合に限られるわけであるから、 $\kappa_1$  と  $\kappa_2$  の値が大きく異なる場合や凍結潜熱  $L$  が大きくなるに従って  $\varphi_A, \varphi_B$  が時間的、場所的に変化し、相対的に近似解の精度が低下することが予想されるが、 $\kappa_1$  と  $\kappa_2$  の比が比較的 1 に近く、 $L$  が小さい範囲ではよい近似を与えるものと思われる。

なお、以上の解法の手順を簡単に図示すると図-3 のごとくである。

(2) 軸対称凍結過程の解析

解析の対象としたモデルは図-4 のごとく平面とそれに接合した円筒表面の両方から冷却される場合の土壌の凍結過程である。凍結面位置は  $\delta_r(z, \theta)$ 、あるいは  $\delta_z(r, \theta)$  と表示し、 $r, z$  がそれぞれ十分大きな領域では  $\delta_{z\infty}(\theta), \delta_{r\infty}(\theta)$  とする。

a) 基礎方程式、境界条件および初期条件

この場合も前節同様、i)~iii) の仮定が成立するものとすれば、各相の基礎方程式は、

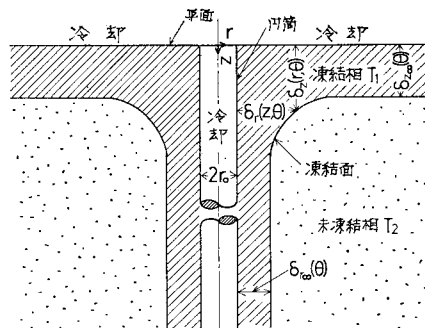


図-4 解析モデル図 (軸対称モデル)

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} = \kappa_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} 0 < z < \infty \\ r_0 < r < r_0 + \delta_r(z, \theta) \end{array} \text{ or } \begin{array}{l} 0 < z < \delta_z(r, \theta) \\ r_0 < r < \infty \end{array} \right)$$

.....(27)

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = \kappa_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \delta_{z\infty} < z < \infty \\ r_0 + \delta_r(z, \theta) < r < \infty \end{array} \text{ or } \begin{array}{l} \delta_z(r, \theta) < z < \infty \\ \delta_{r\infty} < r < \infty \end{array} \right)$$

.....(28)

試料表面温度が一定に保たれるとすれば、

$$T_1 = T_0 \quad (z=0) \dots\dots\dots(29)$$

$$T_1 = T_0 \quad (r=r_0) \dots\dots\dots(30)$$

仮定 iii) より、

$$T_1 = T_2 = T_f \quad (r=r_0 + \delta_r(z, \theta) \text{ or } z = \delta_z(r, \theta))$$

.....(31)

凍結面での熱収支式は  $\delta_r$  に基づく場合と  $\delta_z$  に基づく場合の2つ表示方法があり、それぞれ次のように表わされる。

$$\left\{ K_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - K_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right\} \left\{ 1 + \left( \frac{\partial \delta_r}{\partial z} \right)^2 \right\} = \rho L \frac{\partial \delta_r}{\partial \theta}$$

$$(r=r_0 + \delta_r(z, \theta)) \dots\dots\dots(32)$$

$$\left\{ K_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - K_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \right\} \left\{ 1 + \left( \frac{\partial \delta_z}{\partial r} \right)^2 \right\} = \rho L \frac{\partial \delta_z}{\partial \theta}$$

$$(z = \delta_z(r, \theta)) \dots\dots\dots(33)$$

そして初期条件は、

$$T_2 = T_i \quad (\theta=0) \dots\dots\dots(34)$$

**b) 特解の導出**

前節で述べたと同様に、特解の導出にあたり、次のような仮想温度を設定する。

$$T_2 = T_B \quad (z=0) \dots\dots\dots(35)$$

$$T_2 = T_B \quad (r=r_0) \dots\dots\dots(36)$$

$$T_1 = T_A \quad (\theta=0) \dots\dots\dots(37)$$

式 (29), (30), (37) を満たす式 (27) の解、および式 (34)~(36) を満たす式 (28) の解は変数分離法および Laplace 変換法により次のように与えられる。

$$\frac{T_1 - T_0}{T_A - T_0} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\kappa_1 \theta}} \right) F_1(\kappa_1, r) \dots\dots(38)$$

$$\frac{T_2 - T_B}{T_i - T_B} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}} \right) F_1(\kappa_2, r) \dots\dots(39)$$

ここで、関数  $F_1(\kappa, r)$  は、

$$F_1(\kappa, r) = \int_0^\infty e^{-\kappa a^2 \theta} \cdot \frac{J_0(\alpha r) Y_0(\alpha r_0) - Y_0(\alpha r) J_0(\alpha r_0)}{J_0^2(\alpha r_0) + Y_0^2(\alpha r_0)} \frac{d\alpha}{\alpha}$$

.....(40)

である。ただし  $J_0(\xi)$ ,  $Y_0(\xi)$  はそれぞれ零次の第一種、第二種 Bessel 関数である。

さらに式 (38), (39) を式 (31) に適合させると無次

元化された仮想温度  $\phi_A, \phi_B$  は次のように与えられる。

$$\phi_A = \frac{T_A - T_0}{T_f - T_0} = -\frac{1}{(2/\pi) \operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_1 \theta}) F_1(\kappa_1, r_0 + \delta_r)}$$

.....(41)

または、

$$\phi_A = \frac{T_A - T_0}{T_f - T_0} = -\frac{1}{(2/\pi) \operatorname{erf}(\delta_z/2\sqrt{\kappa_1 \theta}) F_1(\kappa_1, r)}$$

.....(42)

$$\phi_B = \frac{T_B - T_i}{T_f - T_i} = \frac{1}{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_1 \theta}) F_1(\kappa_2, r_0 + \delta_r)}$$

.....(43)

または、

$$\phi_B = \frac{T_B - T_i}{T_f - T_i} = \frac{1}{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(\delta_z/2\sqrt{\kappa_2 \theta}) F_1(\kappa_2, r)}$$

.....(44)

**c) 凍結面位置の決定法**

この場合も前節と同様の手順により、凍結面方程式を超越双曲線で表示する。

$$\left\{ \left( \frac{\delta_r}{\delta_{r\infty}} \right)^m - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{z}{\delta_{z\infty}} \right)^m - 1 \right\} = C \dots\dots\dots(45)$$

あるいは、

$$\left\{ \left( \frac{r-r_0}{\delta_{r\infty}} \right)^m - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{\delta_z}{\delta_{z\infty}} \right)^m - 1 \right\} = C \dots\dots\dots(46)$$

ただし、 $\delta_{r\infty}, \delta_{z\infty}$  は次のように指数関数で表示されるものとする。

$$\delta_{r\infty} = \lambda_1 \theta^{m_1} \dots\dots\dots(47)$$

$$\delta_{z\infty} = \lambda_2 \theta^{m_2} \dots\dots\dots(48)$$

式 (45), (46) を時間について微分すれば、

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial \theta} = \frac{\delta_r}{\delta_{r\infty}} \frac{d\delta_{r\infty}}{d\theta} + \frac{(\delta_r/\delta_{r\infty})^m - 1}{(z/\delta_{z\infty})^m - 1} \cdot \frac{(z/\delta_{z\infty})^m}{(\delta_r/\delta_{r\infty})^m} \frac{\delta_r}{\delta_{z\infty}} \frac{d\delta_{z\infty}}{d\theta} = G(\theta, z, \delta_r) \dots\dots(49)$$

$$\frac{\partial \delta_z}{\partial \theta} = \frac{\delta_z}{\delta_{z\infty}} \frac{d\delta_{z\infty}}{d\theta} + \frac{(\delta_z/\delta_{z\infty})^m - 1}{\{(r-r_0)/\delta_{r\infty}\}^m - 1} \cdot \frac{\{(r-r_0)/\delta_{r\infty}\}^m}{(\delta_z/\delta_{z\infty})^m} \frac{\delta_z}{\delta_{r\infty}} \frac{d\delta_{r\infty}}{d\theta} = H(\theta, \delta_z, r)$$

.....(50)

一方、式 (32) へ式 (38), (39), (41), (43) を適合させ、変形すると、

$$\frac{\partial \delta_r / \partial \theta}{1 + (\partial \delta_r / \partial z)^2} = \beta \left[ \frac{F_2(\kappa_1, r_0 + \delta_r)}{F_1(\kappa_1, r_0 + \delta_r)} + T^* \times \frac{(2/\pi) \operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_2 \theta}) F_2(\kappa_2, r_0 + \delta_r)}{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_2 \theta}) F_1(\kappa_2, r_0 + \delta_r)} \right]$$

.....(51)

同様に、式 (33) へ式 (38), (39), (42), (44) を適合させると、

$$\frac{\partial \delta_z / \partial \theta}{1 + (\partial \delta_z / \partial r)^2} = -\beta \left[ \frac{\exp(-\delta_z^2 / 4 \kappa_1 \theta)}{\sqrt{\pi \kappa_1 \theta} \operatorname{erf}(\delta_z / 2 \sqrt{\kappa_1 \theta})} + T^* \times \frac{(2/\pi) \exp(-\delta_z^2 / 4 \kappa_2 \theta) F_1(\kappa_2, r)}{\sqrt{\pi \kappa_2 \theta} \{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(\delta_z / 2 \sqrt{\kappa_2 \theta}) F_1(\kappa_2, r)\}} \right] = h(\theta, \delta_z, r) \dots (52)$$

ただし、関数  $F_2(\kappa, r)$  は、

$$F_2(\kappa, r) = -\frac{dF_1(\kappa, r)}{dr} = \int_0^\infty e^{-\kappa \alpha^2 \theta} \frac{J_1(\alpha r) Y_0(\alpha r_0) - Y_1(\alpha r) J_0(\alpha r_0)}{J_0^2(\alpha r_0) + Y_0^2(\alpha r_0)} d\alpha \dots (53)$$

さらに、式 (49) を式 (51) へ代入、整理すると  $\partial \delta_r / \partial z$  は、

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial z} = -\sqrt{\frac{G(\theta, z, \delta_r)}{g(\theta, z, \delta_r)} - 1} \dots (54)$$

同様に、 $\partial \delta_z / \partial r$  は式 (50) を式 (52) へ代入して得られ、

$$\frac{\partial \delta_z}{\partial r} = -\sqrt{\frac{H(\theta, \delta_z, r)}{h(\theta, \delta_z, r)} - 1} \dots (55)$$

図-5 に点  $(r_0 + \delta_{r\infty}(\theta), \delta_{z\infty}(\theta))$  の軌跡と凍結面位置との関係を示す。いま、これらの交差点を点  $P(r_0 + \delta_{r\infty}(\theta_1), \delta_{z\infty}(\theta_1))$  ( $\theta_1 > \theta$ ) とすると、点  $P$  において式 (45), (46) で別々に表わされた凍結曲線が滑らかに接合するための条件は、

$$\left. \frac{\partial \delta_r}{\partial z} \right|_P \cdot \left. \frac{\partial \delta_z}{\partial r} \right|_P = 1 \dots (56)$$

式 (54), (55) を用いて式 (56) を整理すると、

$$\left\{ \frac{G(\theta, \delta_{z\infty}(\theta_1), \delta_{r\infty}(\theta_1))}{g(\theta, \delta_{z\infty}(\theta_1), \delta_{r\infty}(\theta_1))} - 1 \right\} \cdot \left\{ \frac{H(\theta, \delta_{z\infty}(\theta_1), \delta_{r\infty}(\theta_1))}{h(\theta, \delta_{z\infty}(\theta_1), \delta_{r\infty}(\theta_1))} - 1 \right\} = 1 \dots (57)$$

また、式 (45) を  $z$  について微分すると、

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial z} = -\frac{\delta_r^m - \delta_{r\infty}^m}{z^m - \delta_{z\infty}^m} \left( \frac{z}{\delta_r} \right)^{m-1} \dots (58)$$

ここで、式 (54) と式 (58) は等値だから、

$$\frac{\delta_r^m - \delta_{r\infty}^m}{z^m - \delta_{z\infty}^m} \left( \frac{z}{\delta_r} \right)^{m-1} = \sqrt{\frac{G(\theta, z, \delta_r)}{g(\theta, z, \delta_r)} - 1} \dots (59)$$

凍結面上の任意の 1 点に式 (59) を適用し、式 (57) と連立させることによって、任意時間  $\theta$  に対する  $\theta_1, m$  が決定されると、凍結面方程式は次のごとく示される。

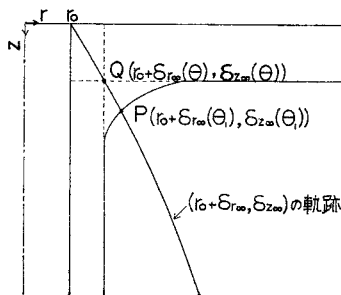


図-5  $(r_0 + \delta_{r\infty}, \delta_{z\infty})$  の軌跡と凍結面の関係 (軸対称モデル)

$$\left\{ \left( \frac{r-r_0}{\delta_{r\infty}} \right)^m - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{z}{\delta_{z\infty}} \right)^m - 1 \right\} = \left\{ \left( \frac{\theta_1}{\theta} \right)^{n_1 m} - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{\theta_1}{\theta} \right)^{n_2 m} - 1 \right\} \dots (60)$$

d) 温度分布算出式

温度分布算出式は以下のごとくである。

いま、式 (41), (43) をそれぞれ式 (38), (39) に代入すれば、

$$T_1 = (T_f - T_0) \frac{F_1(\kappa_1, r)}{F_1(\kappa_1, r_0 + \delta_r)} + T_0 \dots (61)$$

$$T_2 = (T_f - T_i) \cdot \frac{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_2\theta}) F_1(\kappa_2, r)}{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_2\theta}) F_1(\kappa_2, r_0 + \delta_r)} + T_i \dots (62)$$

また、式 (42), (44) を式 (38), (39) に代入すると、

$$T_1 = (T_f - T_0) \frac{\operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_1\theta})}{\operatorname{erf}(\delta_z/2\sqrt{\kappa_1\theta})} + T_0 \dots (63)$$

$$T_2 = (T_f - T_i) \frac{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(z/2\sqrt{\kappa_2\theta}) F_1(\kappa_2, r)}{1 + (2/\pi) \operatorname{erf}(\delta_z/2\sqrt{\kappa_2\theta}) F_1(\kappa_2, r)} + T_i \dots (64)$$

このように、この問題の解は前述の場合と同じ手順によって得られるが、前節と同様に  $\phi_A, \phi_B$  はともに時間的、場所的に変化するため、これらの解は厳密には基礎方程式を満足しない。この場合も、解が厳密に基礎方程式を満足するのは、 $\kappa_1 = \kappa_2$  かつ  $L=0$  の場合に限られることから、 $\kappa_1$  と  $\kappa_2$  が大きく異なる場合や、 $L$  が大きい場合には相対的に近似精度は低下するが、 $\kappa_1$  と  $\kappa_2$  の比が比較的 1 に近く、 $L$  が小さい範囲では、よい

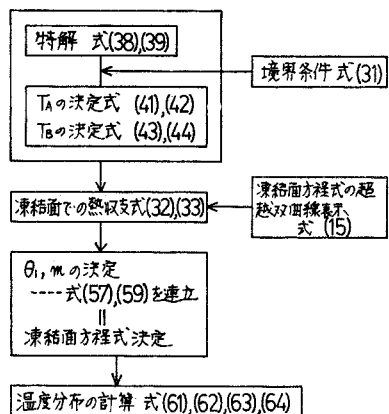


図-6 解法の手順 (軸対称モデル)

近似解を与えるものと思われる。

なお、以上の解法の手順を簡単に図示すると図-6のごとくである。

### 3. 数値計算例とその考察

本節では、2. で説明した解析的近似解の妥当性を検討するため、計算例として初期温度 20°C の土壌の表面が -50°C に保たれて凍結が進行する場合について、近似解および有限差分法による数値計算を行い、両者により得られた凍結面位置および温度分布を比較した。ただし、凍結温度は  $T_f$  水の凍結点 0°C であるとし、物性値は表-1のごとく設定した。

表-1 計算に使用した物性値と操作条件

$\rho$	1500 kg/m <sup>3</sup>
$K_1$	0.58 kcal/(m·h·°C) (=0.68 W/(m·K))
$K_2$	0.76 kcal/(m·h·°C) (=0.88 W/(m·K))
$C_{P1}$	0.32 kcal/(kg·°C) (=1.34 × 10 <sup>3</sup> J/(kg·K))
$C_{P2}$	0.24 kcal/(kg·°C) (=1.00 × 10 <sup>3</sup> J/(kg·K))
$L$	15.0 kcal/kg (=6.28 × 10 <sup>4</sup> J/kg)
$T_i$	20.0°C
$T_0$	-50.0°C
$T_f$	0.0°C

#### (1) 角壁付近の凍結過程

##### a) 凍結面位置

まず、Neumann の厳密解法より  $\lambda$  を算出すると、 $\lambda=0.0357$  となり、また式 (20) より  $\varphi=1.151$  と算出される。次に指数  $m$  を決定するためにここでは便宜上、直線  $x=1.2y$  上の点に着目し、式 (23) を用いるとほとんど時間に無関係に  $m=31.1$  が得られる。したがって凍結面方程式は、

$$\left\{ \left( \frac{y}{0.0357\sqrt{\theta}} \right)^{31.1} - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{x}{0.0357\sqrt{\theta}} \right)^{31.1} - 1 \right\} = (1.151^{31.1} - 1)^2 \dots\dots\dots (65)$$

上式に基づき、50 h ごとに 200 h までの凍結面位置の時間的変化を有限差分法を用いた数値解による結果とともに図-7に示す。ここで数値解導出にあたっては、2次元の影響の及ばない  $x=1.5$  m,  $y=1.5$  m までの正方形領域を縦横 75 分割し、微小時間ごとに計算を繰り返して凍結面位置および各格子点温度を算出した。なお、距離刻み  $\Delta x (= \Delta y)$  に対する時間刻み  $\Delta \theta$  の設定は、解の安定性を考慮して、文献<sup>9)</sup>により  $\Delta \theta = 0.2 \times (\Delta x)^2 / \kappa$  とした。この場合明らかに、凍結面は  $y=x$  に対して対称なので、図では片側のみについて図示した。近似解では凍結進行速度が数値解に比べて小さく、時間の経過とともに両者にはかなりの差を生ずることがわかる。さしあたり、この場合に  $\Phi_A, \Phi_B$  が時間的、場所的どの程度変化しているかを検討してみる。式 (15)

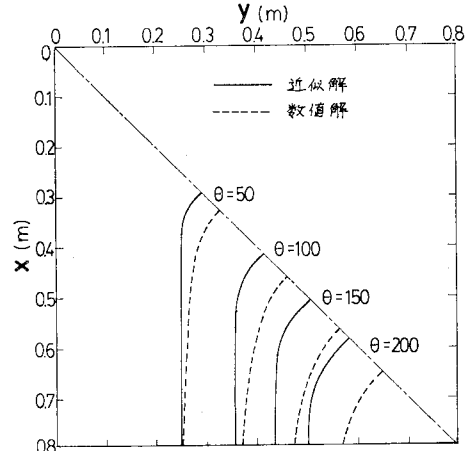


図-7 凍結面の時間的変化 (角壁モデル)

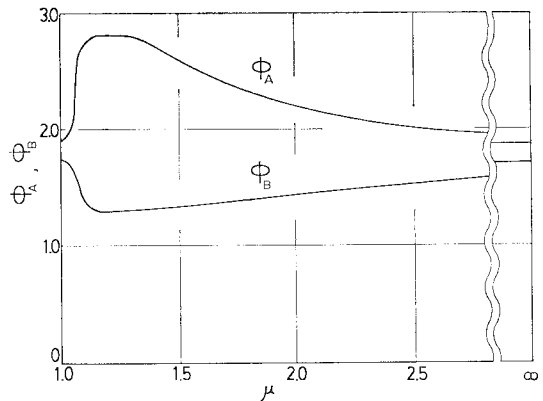


図-8  $\mu$  対  $\Phi_A, \Phi_B$  のグラフ (角壁モデル)

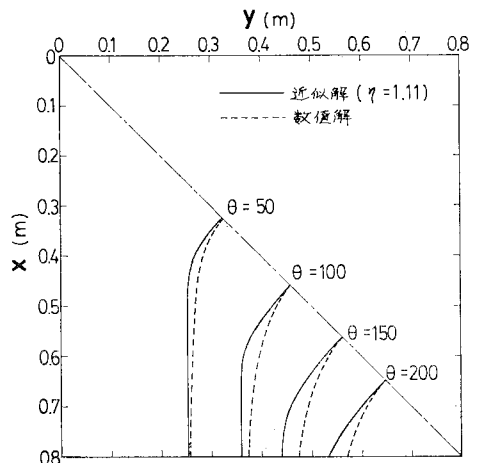


図-9 補正後の凍結面の時間的変化 (角壁モデル)

を式 (13), (14) に代入して変形すると、 $\Phi_A, \Phi_B$  は次のように  $\mu (= x/\delta_\infty(\theta))$  のみの関数になることがわかる。すなわち、

$$\phi_A(\mu) = \frac{1}{\text{erf}(\mu\lambda/2\sqrt{\kappa_1})\text{erf}[\lambda/2\sqrt{\kappa_1}\cdot\{(\varphi^m-1)^2/(\mu^m-1)+1\}^{1/m}]} \dots\dots\dots (66)$$

$$\phi_B(\mu) = \frac{1}{1-\text{erf}(\mu\lambda/2\sqrt{\kappa_2})\text{erf}[\lambda/2\sqrt{\kappa_2}\cdot\{(\varphi^m-1)^2/(\mu^m-1)+1\}^{1/m}]} \dots\dots\dots (67)$$

$\mu$  は時間, 場所を包括したパラメーターであり,  $\mu$  に対する  $\phi_A, \phi_B$  の値は 図-8 に示すごとくである. ところで  $\mu$  の定義域は  $1 \sim \infty$  であり,  $\mu = \varphi$  のとき  $\phi_A$  は最高値 2.85,  $\phi_B$  は最低値 1.28 となる. また  $\mu$  が 1 あるいは  $\infty$  に近づくと  $\phi_A$  は 1.87,  $\phi_B$  は 1.72 に漸近する. 特に  $\mu = 1.0 \sim 1.5$  の範囲での  $\phi_A, \phi_B$  の変化は著しく, 一定とみなすことはできない.  $\phi_A, \phi_B$  の変化がこのように大きいことから, 仮定された温度分布式 (11), (12) が基礎方程式 (1), (2) を近似的に満足するとみなすことはできず, ここで得られた近似解をそのまま解として適用するのは妥当ではない.

そこで, 近似解をできるだけ真値に近づけるという立場から, 以下のごとく補正係数を導入し, 凍結面方程式の補正を行う. いま, 数値解における  $x=y$  上の凍結面位置を読み取り,  $\delta_y(x, \theta)|_{x=y}/\delta_\infty(\theta)$  の値を算出すると, ほとんど時間に無関係に 1.28 となり, 式 (20) より算出された  $\varphi$  の 1.11 倍である. この値を補正係数  $\eta$  とし,  $\varphi (=1.151)$  の代わりに  $\eta\varphi (=1.28)$  を用いて式 (65) を書き改めると, 補正された凍結面方程式は以下のごとく示される.

$$\left\{ \left( \frac{y}{0.0357\sqrt{\theta}} \right)^{31.1} - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{x}{0.0357\sqrt{\theta}} \right)^{31.1} - 1 \right\} = (1.28^{31.1} - 1)^2 \dots\dots\dots (68)$$

式 (68) に基づく凍結面を数値解による結果とともに図示すると 図-9 のごとくである. 式 (68) では指数  $m$  の補正を行っていないため, 数値解と近似解で若干曲率の相違がみられるが, 図-7 の場合と比較すると両者は比較的よく一致している.

一般に  $\eta$  が 1 に近いほど近似解の精度が高いことから,  $\eta$  は本解法の近似精度を表わすパラメーターであると考えることができる. したがって, 任意の物性値, 操作条件下で  $\eta$  がいかなる値をもつかを把握しておく必要がある. このことについては後述の (3) で検討する.

**b) 温度分布**

ここでは, 温度分布算出域を 図-10 のように領域 I, II, III に分けて計算を行った. 領域 II については式 (25), 領域 III については式 (26)

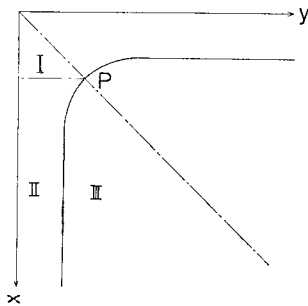


図-10 温度分布算出域 (角壁モデル)

により温度分布が算出される. また, 領域 I 内で  $0 < x < \delta_\infty(\theta)$  の範囲では  $\delta_y(x, \theta)$  が定義されないため, 温度分布の算出が困難であるから, 便宜上領域 I では近似的に  $\phi_A$  の値を  $\phi_A(\varphi)$ , すなわち点 P における値に置き換えて算出してみた. したがって領域 I での温度分布式として次式を用いた.

$$T_1 = \phi_A(\varphi) (T_f - T_0) \text{erf}(x/2\sqrt{\kappa_1}\theta) \text{erf}(y/2\sqrt{\kappa_1}\theta) - T_0 \dots\dots\dots (69)$$

ただし, これらの式中の  $\delta_y(x, \theta)$  は a) で補正された凍結面方程式 (68) を適用して算出した値を用いて行った. このようにして算出された温度分布を  $\theta = 50 \text{ h}$ , 200

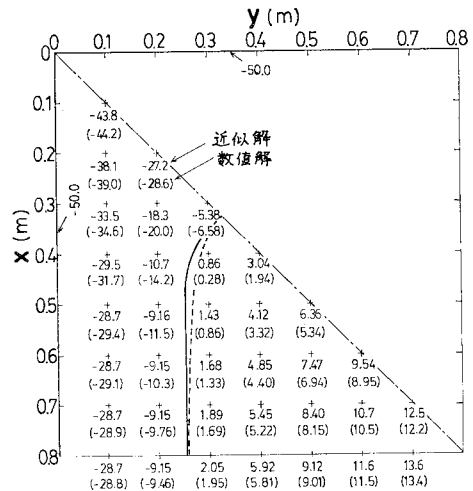


図-11 温度分布 (角壁モデル  $\theta = 50 \text{ h}$ )

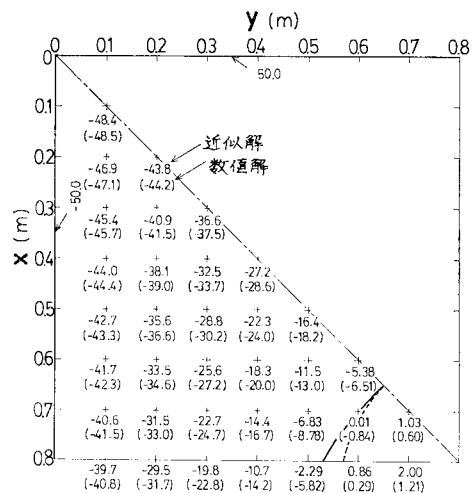


図-12 温度分布 (角壁モデル  $\theta = 200 \text{ h}$ )

h の各場合について数値解とともに示すと 図-11, 12 のごとくである。凍結面近傍で多少の差がみられるが、両者は比較的良好に一致している。

(2) 軸対称凍結過程

ここでは円筒半径  $r_0$  を 0.1 m として計算した例について述べる。なお、物性値、操作条件は (1) とすべて同一であるとした。

a) 凍結面位置

まず、理論的に明らかのように、 $n_2$  は 0.5 であり、 $\lambda_2$  は (1) における  $\lambda$  と同一である。しかし、 $n_1$  は近似値にすぎないため、厳密には  $\lambda_1$  を定数とすることは不可能である。したがって式 (47) を適用するにあたっては、 $\lambda_1$  が時間的に大きく変化しないように  $n_1$  を設定しなければならない。さしあたり、 $n_1=0.4$  とした場合の  $\lambda_1$  の経時の変化を 図-13 に示す。図より明らかに  $\theta > 20$  h では  $\lambda_1$  がほぼ一定であるとみなしてさしつかえない。したがってこの場合、 $\theta > 20$  h で  $\delta_{r,\infty}=\lambda_1\theta^{0.4}$  という近似が十分な精度で適用できることがわかる。

さて、各時間における  $\theta_1$  と  $m$  を決定するため、便宜上  $r-r_0=(7/8)r_0$  上の点を式 (59) に適用し、式 (57) と連立させて  $\theta_1, m$  を算出すると、各時間について 表-2 のような結果が得られる。

表-2  $\theta$  に対する  $\theta_1, m$  の値 (軸対称モデル)

$\theta$	$\theta_1$	$m$
50 h	79.0 h	5.0
100 h	163.0 h	5.9
150 h	248.0 h	6.4
200 h	335.0 h	6.8

このようにして算出された凍結面の進行過程を時間をパラメータとして図示すると 図-14 のごとくである。また、図-14 には数値解による計算結果も同時に点綴した。なお数値解の導出にあたっては、 $z=0\sim 2.0$  m,  $r=0.1\sim 1$  m の長方形領域を縦横 40 分割し、微小時間ごとに凍結面位置、各格子点温度を算出した。距離刻み  $\Delta z, \Delta r$  に対する時間刻み  $\Delta \theta$  の設定は、解の安定性を考慮して  $\Delta \theta=0.1 \times (\Delta r)^2/\kappa$  とした。この場合も、(1) におけると同様、時間の経過とともに両者の差が大

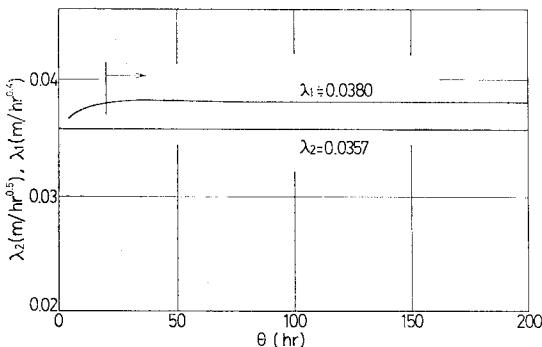


図-13  $\lambda_1, \lambda_2$  の時間的変化 (軸対称モデル)

きくなっている。ここでもさしあたり、 $\phi_A, \phi_B$  の時間的、場所的变化を検討する。この場合には (1) の場合のように  $\phi_A, \phi_B$  が  $\mu$  のみの関数であるという取り扱いが不可能なのだが、一応  $(r-r_0)/\delta_{r,\infty}(\theta)$  を横軸にとり、 $\theta$  をパラメーターとして式 (42), (44) で定義された

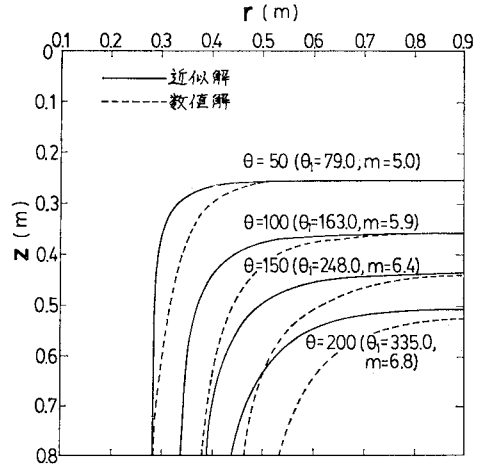


図-14 凍結面の時間的変化 (軸対称モデル)

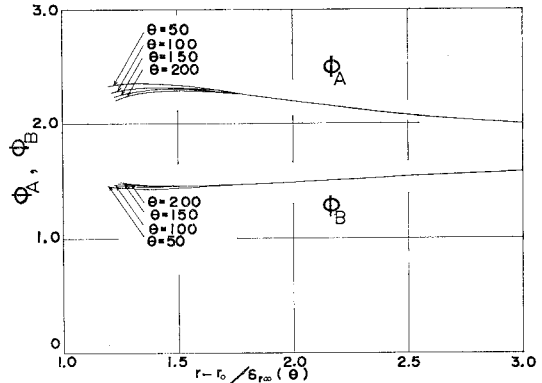


図-15 式 (42), (44) による  $\phi_A, \phi_B$  の時間的、場所的变化 (軸対称モデル)

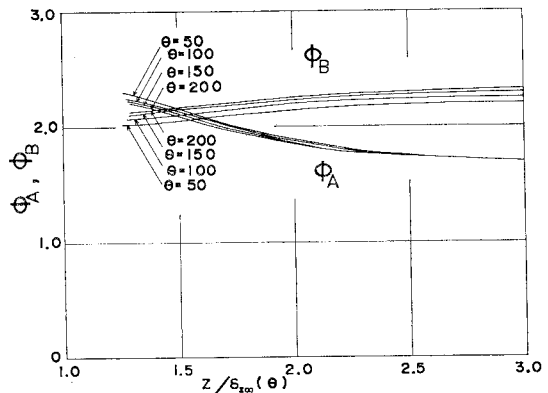


図-16 式 (41), (43) による  $\phi_A, \phi_B$  の時間的、場所的变化 (軸対称モデル)



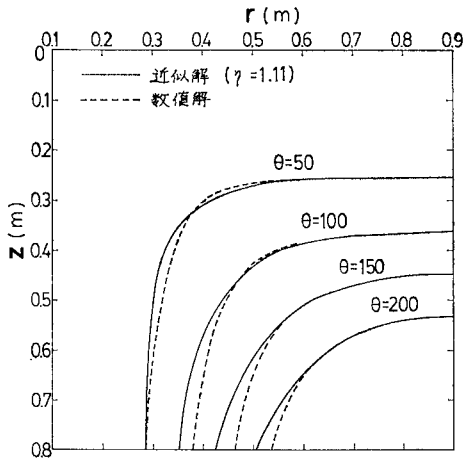


図-17 補正後の凍結面の時間的変化 (軸対称モデル)

$\phi_A, \phi_B$  の変化を 図-15 に示す. いずれも  $(r-r_0)/\delta_{r\infty}(\theta)$  の小さい範囲 (2 次元的な影響の顕著な部分) では, 幾分  $\theta$  に依存して変化する傾向にある. 同様に  $z/\delta_{z\infty}(\theta)$  を横軸にとり,  $\theta$  をパラメーターとして式 (41), (43) で定義された  $\phi_A, \phi_B$  の変化を 図-16 に示す. この図でもやはり 2 次元的な影響の顕著な  $z/\delta_{z\infty}(\theta)$  の小さい範囲で  $\phi_A, \phi_B$  の変化が大きくなっている. このように 2 次元的な影響の顕著な範囲で  $\phi_A, \phi_B$  が時間的, 場所的に変化するため, 近似解に誤差が生じたものと思われる. したがって, ここでも補正係数  $\eta$  を用いて凍結面方程式を次式のように修正して考えることにする.

$$\left\{ \left( \frac{r-r_0}{\delta_{r\infty}(\theta)} \right)^m - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{z}{\delta_{z\infty}(\theta)} \right)^m - 1 \right\} = \left[ \left\{ \left( \frac{\theta_1}{\theta} \right)^{n_1} \eta \right\}^m - 1 \right] \left[ \left\{ \left( \frac{\theta_1}{\theta} \right)^{n_2} \eta \right\}^m - 1 \right] \dots \dots \dots (70)$$

$\eta=1.11$  として式 (70) に基づいて計算された凍結面を数値解とともに図示すると 図-17 のごとくである. 両者にはかなり良好な一致がみられる.

**b) 温度分布**

**a)** で説明を省略したが, 式 (41), (43) による  $\phi_A, \phi_B$  あるいは式 (42), (44) による  $\phi_A, \phi_B$  の定義域はそれぞれ  $\delta_r(z, \theta), \delta_z(r, \theta)$  の定義域と一致する. したがって式 (61)~(64) はそれぞれ 図-18 における領域 II, III, IV, V の温度分布算出式に対応させることができる. 一方, 領域 I 内で  $r_0 < r < r_0 + \delta_{r\infty}(\theta)$  かつ  $0 < z < \delta_{z\infty}(\theta)$  の領域では  $\delta_r(z, \theta)$  および  $\delta_z(r, \theta)$  の両方とも定義されず, 式 (61)~(64) のいずれを用いても温度分布を算出することができないので, ここでは点 P における  $\phi_A$  の値 (式 (41), (42) の両方について同一の値となる),  $\phi_A(P)$  を用いて領域 I での温度分布

を算出した. すなわち, 領域 I での温度分布式には次式を用いた.

$$T_1 = -(2/\pi)\phi_A(P)(T_f - T_0)\text{erf}(z/2\sqrt{\kappa_1\theta}).$$

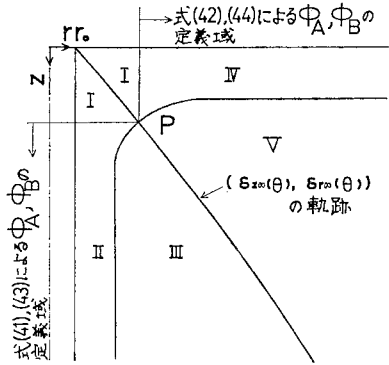


図-18 温度分布算出域 (軸対称モデル)

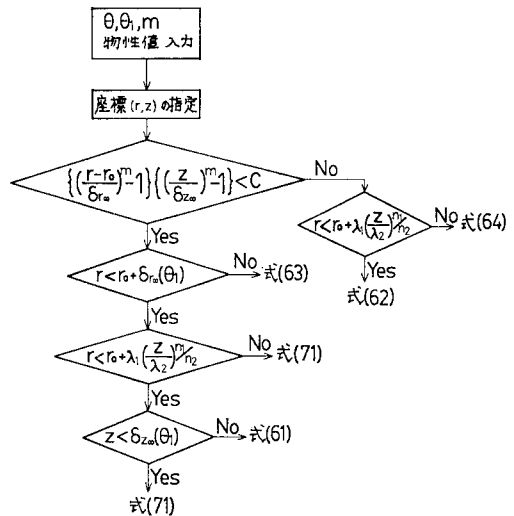


図-19 温度分布算出フローチャート (軸対称モデル)

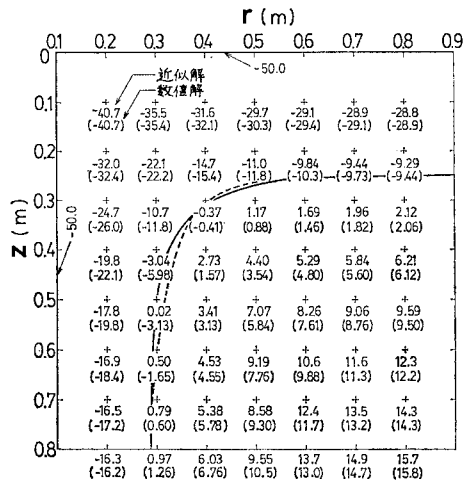


図-20 温度分布 (軸対称モデル  $\theta=50$  h)

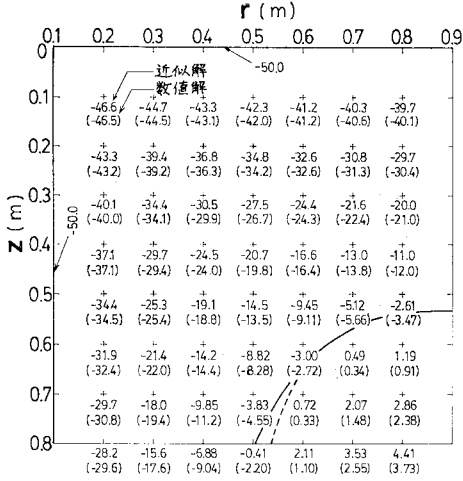


図-21 温度分布 (軸対称モデル  $\theta=200$  h)

$$F_1(\kappa_1, r) + T_0 \dots\dots\dots (71)$$

この場合の温度分布算出のフローチャートを図-19に示す。このようにして算出された温度分布を  $\theta=50$  h, 200 h の各場合について数値解による結果とともに示すと図-20, 21 のようになる。近似解による温度分布は数値解と良好に一致し、補正された凍結面方程式を適用した近似解は妥当であると思われる。

(3)  $\varphi$  および補正係数  $\eta$  についての吟味

(1), (2) で行った計算例では, 2. で提示された解析的近似解をそのまま適用すると誤差が大きかったが, 補正係数  $\eta$  を用いて凍結面方程式を修正すれば, 近似解法の適用が可能となることを示した。本節では, 角壁モデルについて, 任意の物性値, 操作条件下で  $\varphi$  の値がどう変化するか, また  $\eta$  がいかなる値となるかを検討し, 本解法の近似精度を吟味する。なお, 軸対称モデルについては, 角壁モデルのような熱収支式の無次元化が困難なので考察を割愛した。

a)  $\varphi$  の値について

角壁モデルにおける凍結面での熱収支式 (20) は, 次式のように書き換えることができる。

$$S_1 = \frac{N_1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\exp(-S_1^2)}{\text{erf}(S_1)} + N_2 N_3 \cdot \frac{\exp(-S_1^2 N_3^2) \text{erf}(S_1 N_3)}{\{\text{erf}(S_1 N_3)\}^2 - 1} \right] \dots\dots\dots (72)$$

また, Neumann の厳密解による1次元モデルの熱収支式は,

$$S_2 = \frac{N_1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\exp(-S_2^2)}{\text{erf}(S_2)} + N_2 N_3 \cdot \frac{\exp(-S_2^2 N_3^2)}{\text{erf}(S_2 N_3) - 1} \right] \dots\dots\dots (73)$$

ただし, 式 (72), (73) 中の  $S_1, S_2, N_1, N_2, N_3$  は以下に示すような無次元数である。

$$S_1 = \lambda \varphi / 2 \sqrt{\kappa_1} \dots\dots\dots (74)$$

$$S_2 = \lambda / 2 \sqrt{\kappa_1} \dots\dots\dots (75)$$

$$N_1 = C_{P1} (T_f - T_0) / L \dots\dots\dots (76)$$

$$N_2 = K_2 (T_i - T_f) / K_1 (T_f - T_0) \dots\dots\dots (77)$$

$$N_3 = \sqrt{\kappa_1 / \kappa_2} \dots\dots\dots (78)$$

式 (72), (73) より  $S_1, S_2$  はともに3つの無次元数  $N_1, N_2, N_3$  のみの関数となるのがわかる。したがって,  $S_1$  と  $S_2$  の比である  $\varphi$  も明らかに  $N_1, N_2, N_3$  のみの関数である。このようにして任意の  $N_1, N_2, N_3$  に対して  $\varphi$  の値を算出することができる。一例として,  $N_1$  が 0.5, 5.0 の各場合について,  $N_3$  をパラメータとした場合の  $N_2$  に対する  $\varphi$  の値を点綴すると図-22, 23のごとくであり,  $\varphi$  の値はおおむね次のような傾向で変化していることがわかる。

- i)  $N_2$  の増加につれて増加する。
- ii)  $N_3 < 1.0$  の場合に  $N_3$  への依存性は大きい,  $N_3$  の増加とともに  $N_3$  への依存性は小さくなる。
- iii)  $N_1$  が大きい場合は小さい場合に比べて  $N_3$  への依存性が小さくなる。

ここで特に注目すべきことは,  $N_2=0$  の場合 (未凍結相の温度が凍結温度に等しく, Stefan 問題となる) には,  $\varphi$  が常に1となり, 凍結面が直角であるという不合理な結果を与えることである。

b) 補正係数  $\eta$  について

上述のごとく,  $\varphi$  は3つの無次元数  $N_1, N_2, N_3$  の関数となるが, これらの無次元数の値によって近似精度が

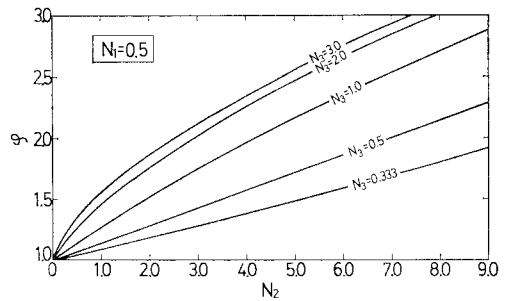


図-22  $N_2, N_3$  と  $\varphi$  の関係 ( $N_1=0.5$ )

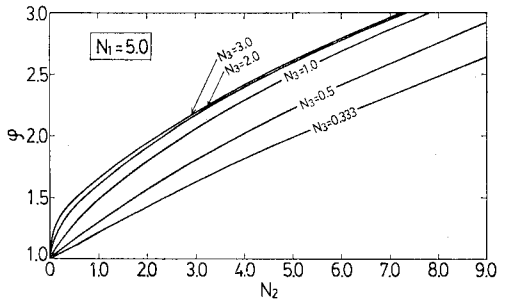
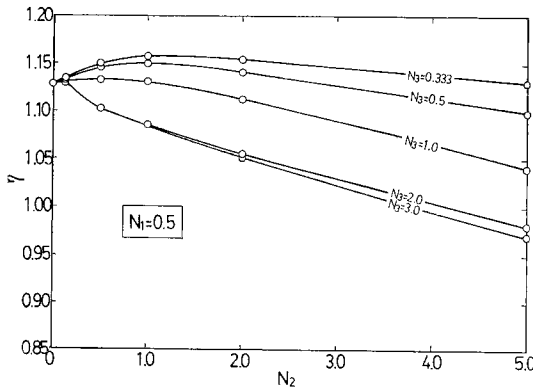
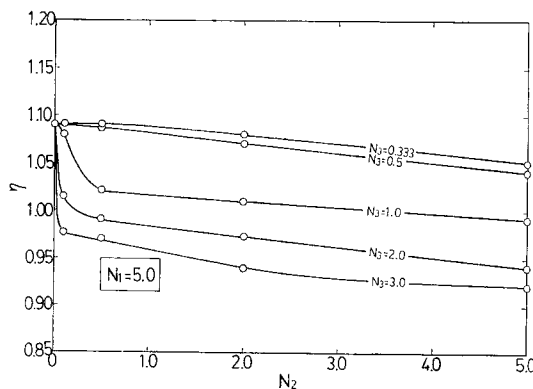


図-23  $N_2, N_3$  と  $\varphi$  の関係 ( $N_1=5.0$ )

図-24  $N_2$ ,  $N_3$  と  $\eta$  の関係 ( $N_1=0.5$ )図-25  $N_2$ ,  $N_3$  と  $\eta$  の関係 ( $N_1=5.0$ )

どう変わるかを検討するため、ここでは  $N_1=0.5, 5.0$  の2つの場合について  $N_2, N_3$  を任意に変化させて、数値解、近似解の両者から得られた  $\phi$  の値の比 ( $=\eta$ ) を算出し、図-24, 25 に点綴した。まず図-24 によると、 $N_1=0.5$  の場合、 $N_3$  が大きくなるにしたがって  $\eta$  は減少するが、 $N_2$  の変化に伴う  $\eta$  の変化の傾向は  $N_3=1.0$  を境にして異なる。すなわち  $N_3 \leq 1.0$  の場合、 $N_2$  が0から1.0までは微増するが、1.0以上になると逆に徐々に減少する。 $N_3 > 1.0$  の場合には、 $N_2$  の増加とともに  $\eta$  は常に減少し、 $N_2=4.0$  以上では1以下となる。また  $N_2=0$  では、 $N_3$  によらず常に一定値 1.126 となる。次に図-25 によると、 $N_1=5.0$  の場合には、 $N_1=0.5$  の場合に比べて全体的に  $\eta$  の値は小さいが、 $N_2$  の増加に伴って  $\eta$  が減少する傾向を示すのは  $N_1=0.5$  の場合と同様である。 $N_3 \geq 1.0$  の場合は  $N_2$  が0から0.5の範囲で  $\eta$  は大きく減少するが、 $N_2$  が0.5以上では  $N_2$  の増加とともに  $\eta$  が減少する割合は比較的緩慢である。すなわち、 $N_1$  が大きくなるにつれて  $N_2$  への依存性は小さくなるようである。また、この場合も  $N_2=0$  の場合は  $N_3$  によらず一定値 1.09 となる。

すでに 2. (1) で  $L$  が小さく、 $\kappa_1$  と  $\kappa_2$  の比が1に

近いほど近似精度が高くなることを示唆した。このことは  $N_1$  が大きく、かつ  $N_3$  が1に近いほど近似精度が高いことに対応するが、図-25 からわかるように  $N_1$  が比較的大きい 5.0 の場合、 $N_3=1.0$  においては  $\eta$  が1に近い値となっていることから明らかである。

ここでの計算は、 $N_1=0.5, 5.0$  の2つの場合についてのみ行ったが、 $0.5 < N_1 < 5.0$  の範囲では補正係数  $\eta$  はこれら2つの場合の中間的な値をもつと考えられる。一般に、凍結土の熱拡散率  $\kappa_1$  は、未凍結土の熱拡散率  $\kappa_2$  よりも大きな値となるから、土壌凍結過程を対象とする場合には、 $N_3 \geq 1.0$  の範囲に限定して考えてよい。ここで計算した結果から推定すると、 $0.5 \leq N_1 \leq 5.0$ ,  $0 \leq N_2 \leq 5.0$ ,  $1.0 \leq N_3 \leq 3.0$  の範囲では、 $\eta$  が 0.92~1.13 の範囲となり、本解法をそのまま適用して凍結面位置を決定した場合の精度は、 $\eta$  を基準にすると ±約 10% の範囲である。特に熱拡散率の比が1に近く ( $N_3=1$ )、凍結潜熱  $L$  が小さい ( $N_1$  大) 範囲においては近似精度が高く、一般の場合についても  $\eta$  を用いて凍結面方程式を補正すると、(1), (2) に示したごとく良好な近似解を与えるものと思われる。

#### 4. 結 言

本研究では、2次元の静的凍結進行過程についての解析的な近似解法を提案し、計算例として土壌を対象とした凍結過程を取り上げ、近似解法の妥当性を検討した。その結果は以下のごとく要約することができる。

(1) Rathjen の解法では、凍結相、未凍結相の熱拡散率が同一の値でなければならないのだが、本解法では両相の物性値をそれぞれ別々に設定できるので、補正係数を用いて解を補正すれば多種類の試料を対象とした凍結問題に解を適用することができる。

(2) ここで取り扱った2次元の凍結過程では、凍結面位置を Rathjen による超越双曲線で近似できたため、凍結進行過程の数学的取り扱いが容易となった。

(3) 表面が一定温度に保たれるという境界条件の成立する場合は、実際には限定された例であるともいえるが、より一般的に表面で熱伝達係数を考慮した場合についても本解析法を適用して解を導出することも可能であると思われる。

(4) 角壁モデルについて、本近似解法の近似精度は、 $0.5 \leq N_1 \leq 5.0$ ,  $0 \leq N_2 \leq 5.0$ ,  $1.0 \leq N_3 \leq 3.0$  の範囲において ±約 10% の範囲であったが、軸対称モデルについても今後検討が要求される。

(5) 熱の移動方向が逆であることに着目すれば、熱収支式の符号を変えることによって、この問題を容易に解凍の問題に置き換えることができるため、土壌凍結問

題に限らず、凍土の解凍の問題にも本解法を応用することができる。

なお、今後さらに計算結果の精度の向上を追求するとともに、実験的な考察も行つて、解法の妥当性を検討する必要があると考えられる。

### 【記 号】

- $T$  : 土壌内温度 [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_0$  : 表面温度 [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_i$  : 初期温度 [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_A$  : 仮想初期温度 [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_B$  : 仮想表面温度 [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T_f$  : 凍結温度 [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $K$  : 熱伝導率 [ $\text{kcal}/(\text{m}\cdot\text{h}\cdot^{\circ}\text{C})$ ]( $=1.163[\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})]$ )  
 $C_P$  : 比熱 [ $\text{kcal}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$ ]( $=4.1868\times 10^3[\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$ )  
 $L$  : 凍結潜熱 [ $\text{kcal}/\text{kg}$ ]( $=4.1868\times 10^3[\text{J}/\text{kg}]$ )  
 $N_1, N_2, N_3, S_1, S_2$  : 無次元数 [-]  
 $x, y, z, r$  : 距離 [m]  
 $r_0$  : 円筒半径 [m]  
 $C$  : 定数 [-]  
 $m, n_1, n_2$  : 指数 [-]  
 $\theta, \theta_1$  : 時間 [h]  
 $\rho$  : 密度 [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]  
 $\kappa$  : 熱拡散率 [ $\text{m}^2/\text{h}$ ]  
 $\delta_y, \delta_{\infty}, \delta_r, \delta_{r\infty}, \delta_z, \delta_{z\infty}$  : 凍結面位置 [m]

$\mu, \varphi$  : パラメーター [-]

$\eta$  : 補正係数 [-]

$\phi_A, \phi_B$  : 無次元仮想温度 [-]

添字

1 : 凍結相

2 : 未凍結相

### 参 考 文 献

- 1) Carslaw, H.S. and J.C. Jaeger : Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1959.
- 2) 柳沢一郎・由川博康 : 処罰法と差分法の併用による低温地下タンクの凍結領域の数値解析, 土木学会論文報告集, 第 272 号, pp. 93~102, 1978.
- 3) 菊池 昇・市川康明 : 変分不等式による Stefan 問題, 土木学会論文報告集, 第 289 号, pp. 17~29, 1979.
- 4) Goodman, T.R. and J.J. Shea : The Melting of Finite Slabs, Trans. of ASME (Heat Trans.), Vol. 82, pp. 16~24, 1960.
- 5) Murray, W.D. and F. Landis : Numerical and Machine Solutions of Transient Heat-Conduction Problems Involving Melting or Freezing, Trans. of ASME (Heat Trans.), Vol. 81, pp. 106~112, 1959.
- 6) 小森友明 : 食品凍結に関する伝熱工学的研究, 京都大学学位論文, 1971.
- 7) Ockendon, J.R. and W.R. Hodgkins : Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, Clarendon Press, Oxford, pp. 150~172, 1975.
- 8) Rathjen, K.A. and L.M. Jiji : Heat Conduction with Melting or Freezing in a Corner, Trans. of ASME (Heat, Trans.), Vol. 93, pp. 101~109, 1971.
- 9) Rathjen, K.A. : Heat Conduction with Melting or Freezing in a Corner, Ph. D. thesis, The City University of New York, 1968.

(1980.3.21・受付)