

## 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究

### THE IMPACT OF VARIATIONS OF SLOPE LENGTH ON STORAGE-DISCHARGE RELATIONSHIPS

藤 田 睦 博\*  
By Mutsuhiro FUJITA

#### 1. ま え が き

降雨～流出現象において山腹斜面は、降雨量を流量に変換する場であり、きわめて重要な役割を果たしている。一般に山腹斜面上の流出解析は、複雑な形状を示す斜面を一定斜面長、一定勾配の矩形流域に単純化し、分布定数系の流出モデルを採用する場合が多い。また、流域の形状のみならず、斜面上の流れの水利特性を規定する粗度なども流域の代表値を用いている。すなわち、流出現象に関与する流域の各要因について、その平均値を用いて流出解析をしていることになる。しかしながら、斜面長、勾配、粗度は、流域内で空間的に変動する量である。これらの諸量の変動特性が、流出特性にどのような影響を及ぼすかその程度を知ることは、流出解析上重要なことであろう。たとえば、水文資料のまったくない流域において流出解析を行う場合、単に地形、地質などが類似した他の流域の流出モデルやパラメーターの値を機械的に採用するのでは、大きな誤差の伴う場合がある。

最近、流域地形量を定量的に評価しようとするいくつかの研究が報告されている<sup>1)~4)</sup>。これらの研究の目的のひとつは、地形特性が流出特性に及ぼす影響を解明することであろう。すでに平野<sup>5)</sup>らは、斜面長の変動を考慮した到達時間の分布という概念を提案している。

本研究は、このような観点から小流域の山腹斜面上の流出に関して直接計測の可能である地形量の変動特性を貯留関数法における各係数値で評価しようとするものである。ここで流出モデルとして貯留関数法を採用したのは、次のような理由による。第1の理由として、この手法は流出現象の非線形性を容易にモデル内に取り入れることができる。第2の理由として、貯留関数法は集中定数系の流出モデルでありながら、後述するように流域内

の貯留量を通じて空間に関するパラメーターを含むことが可能だからである。すなわち、流出モデルが斜面長のように空間に関する量を含むときには一般に分布定数系のモデルが用いられてきたが、このような場合にも貯留関数法を用いることができることを明らかにした。また、計算も分布定数系のモデルに比べて容易である。第3の理由として、この手法は広く実際の流出解析に用いられており、実績もあり資料も豊富で、さまざまな流域におけるモデルの各係数値の比較、検討が可能だからである。

#### 2. 基礎理論<sup>6)</sup>

図-1に示すような小流域を対象として、斜面長を河道から出発して等高線に直交するように分水界まで延長した線分 AB の長さで定義する。また、斜面 A、B の勾配を A、B 点の高低差と斜面長の比で定義する。このように定義した斜面長、勾配の測定結果は、勾配の変動に比較して斜面長の変動がきわめて大きいことを示している<sup>7), 8)</sup>。ここでは、変動の大きい斜面長に注目して、斜面勾配は一定であるが斜面長  $l$  が確率密度関数  $f(l)$  に従う斜面を考える。



図-1 小流域の山腹斜面

ここで、 $t$ : 時間、 $x$ : 斜面上流端からの距離、 $y$ : 水深、 $q$ : 単位幅流量、 $r(t)$ : 有効雨量、 $\alpha, m$ : 流域定数である。初期条件、境界条件として、

斜面上の流れの連続の式、運動の式はそれぞれ式(1)、(2)で与えられるものとする。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$q = \alpha y^m \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $t$ : 時間、 $x$ : 斜面上流端からの距離、 $y$ : 水深、 $q$ : 単位幅流量、 $r(t)$ : 有効雨量、 $\alpha, m$ : 流域定数である。初期条件、境界条件として、

\* 正会員 工修 北海道大学助教授 工学部土木工学科

$$y(x, 0) = 0, \quad y(0, t) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

を与える。式(1), (2)を無次元化するために、次式で示される量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} t &= t_* \cdot T, & y &= y_* \cdot Y \\ x &= x_* \cdot X, & r &= r_* \cdot R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

式(4)において、大文字の量は小文字の量の無次元量を表わすものとする。本論文では以後もこの区分法を採用する。\$x\_\*\$, \$r\_\*\$, \$t\_\*\$, \$y\_\*\$ として次式を与える。

$$\left. \begin{aligned} x_* &= \bar{l}, & r_* &= \bar{r} \\ t_* &= \left( \frac{\bar{l} \bar{r}^{1-m}}{\alpha} \right)^{1/m}, & y_* &= t_* \cdot \bar{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、\$\bar{l}\$, \$\bar{r}\$ はそれぞれ平均斜面長、平均有効雨量を示している。式(5)において第3式の \$t\_\*\$ は、平均斜面長、平均雨量に対する到達時間を表わしている。式(5)を式(1)~(3)に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial Y}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R(T) \dots\dots\dots (6)$$

$$Q = Y^m \dots\dots\dots (7)$$

$$Y(X, 0) = 0, \quad Y(0, T) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ここに、

$$Q = \frac{q}{q_*} = \frac{q}{\alpha (t_* \bar{r})^m} \dots\dots\dots (9)$$

なる無次元量である。

式(6)の両辺を \$X\$ に関して積分し、積分範囲の上、下限値をそれぞれ \$L, 0\$ とすると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial T} \int_0^L Y(X, T) dX + Q(L, T) - Q(0, T) \\ &= L \cdot R(T) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。ただし、\$L\$ は斜面長 \$l\$ の無次元斜面長で \$L = l/\bar{l}\$ と定義する。式(10)の左辺第1項の積分は、斜面長 \$L\$ の斜面上の貯留量 \$S(T)\$ を表わしていることになる。すなわち、

$$S(T) = \int_0^L Y(X, T) dX \dots\dots\dots (11)$$

また、左辺第2項は斜面末端における流量を示し、第3項は境界条件より0となり、集中定数系における連続の式

$$\frac{\partial S}{\partial T} = LR - Q(L, T) \dots\dots\dots (12)$$

を与える。

式(7)を次のように変形して、

$$Y(X, T) = Q(X, T)^{1/m} \dots\dots\dots (13)$$

両辺を同様に \$X\$ に関して積分すると次式を得る。

$$S(T) = \int_0^L Q(X, T)^{1/m} dX \dots\dots\dots (14)$$

式(14)より、貯留方程式は運動の式の一表現形であることがわかる。

次に式(14)の \$S\$ の関数形を定めて、いわゆる \$S \sim Q\$ 曲線を求めるわけであるが、斜面長が変動する場合に先

立って斜面長が一定で変動しない場合の貯留方程式を求めておこう。

### 3. 斜面長が一定の場合の貯留方程式

斜面長が一定であるときには、式(10), (11)の積分範囲の上限値 \$L\$ は1となるが、後の説明の便宜上このまま用いることにする。また、降雨波形については、図-2に示すような計算の容易な継続時間 \$T\_R\$ の矩形降雨波形を採用する。

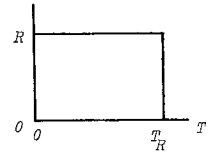


図-2 矩形降雨波形

式(6), (7)の解は、よく知られているように特性曲線

$$X - X_0 = m \int_{T_0}^T Y^{m-1} dT \dots\dots\dots (15)$$

のうえで、次式により与えられる。

$$\int_{T_0}^T R dT = Y - Y_0 \dots\dots\dots (16)$$

\$X\_0, T\_0\$ は特性曲線の出発する \$X, T\$ 座標の位置を示す。矩形降雨波形の場合については、その解が知られているので結果のみを示す<sup>9)</sup>。

\$T\_R > T\_C = (LR^{1-m})^{1/m}\$ のとき、

$$Y(X, T) = \begin{cases} (RX)^{1/m} & 0 \leq X \leq R^{m-1} T^m \\ RT & R^{m-1} T^m < X \leq L \end{cases} \dots\dots\dots (17)$$

$$Y(X, T) = (RX)^{1/m} \quad 0 \leq X \leq L \quad T_C \leq T \leq T_R \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{Y(X, T)^m}{R} + mY(X, T)^{m-1}(T - T_R) \\ &0 \leq X \leq L \quad T > T_R \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

\$T\_R < T\_C\$ のとき、

$$Y(X, T) = \begin{cases} (RX)^{1/m} & 0 \leq X \leq R^{m-1} T^m \\ RT & R^{m-1} T^m < X \leq L \end{cases} \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{Y(X, T)^m}{R} + mY(X, T)^{m-1}(T - T_R) \\ &0 \leq X \leq R^{m-1} T^m + (T - T_R)m(RT_R)^{m-1} \\ X(X, T) &= RT_R \\ &R^{m-1} T^m + (T - T_R)m(RT_R)^{m-1} < X \leq L \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{Y(X, T)^m}{R} + mY(X, T)^{m-1}(T - T_R) \\ &0 \leq X \leq L \quad T > T_P \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$T_P = T_R + \frac{L - R^{m-1} T_R^m}{m(RT_R)^{m-1}} \dots\dots\dots (23)$$

図-3は、式(17)~(22)を図示したものである。また、図-4に斜面末端における流量 \$Q(L, T)\$ を示す。図-3, 4を参照することにより、\$S \sim Q\$ 曲線の概形を描くことができる。この結果を図-5に示す。\$T\_R > T\_C, T\_R\$

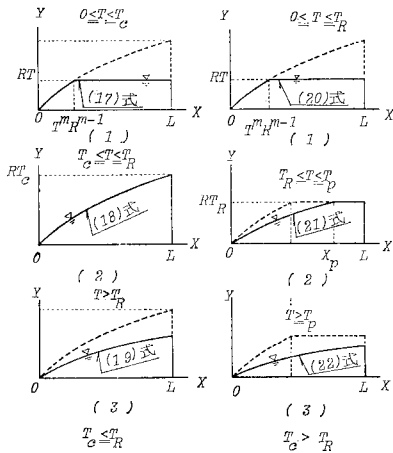


図-3 斜面上の水深変化

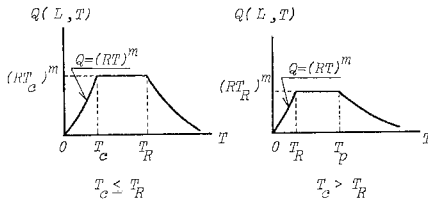


図-4 斜面末端における流出量

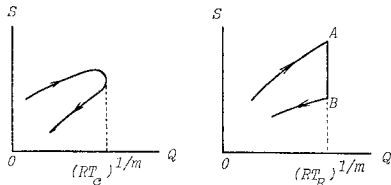


図-5 S~Q 曲線の概形

< T<sub>c</sub> のいずれの場合も S~Q 曲線は、右回りのループをなしている。これは、斜面末端の流量が同一でもハイドログラフの上昇期の貯留量が下降期のそれに比べて大であることを示しており、図-3 の(1),(3)の水面形より明らかである。また、図-3 の T<sub>R</sub> < T<sub>c</sub> で(2)の水面形るとき、斜面末端の流量は変化しないが貯留量が時間の経過とともに減少し、このことは図-5 の S~Q 曲線 A, B の部分に対応している。

S~Q 曲線の概形がわかったので、次に関数形を求める。時刻 T における貯留量は、式(11)で与えられ式(17)~(22)を代入することにより計算できる。結果を以下に示す。

T<sub>R</sub> > T<sub>C</sub>

$$S(T) = \begin{cases} LY(L, T) - \frac{Y(L, T)^{m+1}}{(m+1)R} & 0 \leq T \leq T_C \\ \frac{m}{m+1} R^{1/m} L^{(m+1)/m} & T_C \leq T \leq T_R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(m-1)}{m} LY(L, T) \\ + \frac{1}{m(m+1)R} Y(L, T)^{m+1} & T > T_R \end{cases} \dots\dots\dots (24)$$

T<sub>R</sub> < T<sub>C</sub>

$$S(T) = \begin{cases} L \cdot Y(L, T) - \frac{Y(L, T)^{m+1}}{(m+1)R} & 0 \leq T \leq T_R \\ LY(L, T_R) - \frac{Y(L, T_R)^{m+1}}{R(m+1)} \\ - (T - T_R)Y(L, T_R)^m & T_R \leq T \leq T_P \\ \frac{(m-1)}{m} LY(L, T) + \frac{1}{m(m+1)R} \cdot \\ Y(L, T)^{m+1} & T > T_P \end{cases} \dots\dots\dots (25)$$

一般の降雨流出では、T<sub>R</sub> > T<sub>C</sub> として扱ってもよいので式(24)について、貯留方程式を求めると次式のようになる。

$$S(T) = \begin{cases} Q(T)^{1/m} - \frac{1}{(m+1)R} Q(T)^{(m+1)/m} \\ \text{(ハイドログラフの上昇期)} \\ \frac{m-1}{m} Q(T)^{1/m} + \frac{1}{m(m+1)R} Q(T)^{(m+1)/m} \\ \text{(ハイドログラフの下降期)} \end{cases} \dots\dots\dots (26)$$

ただし、式(26)において Q(T) は斜面末端の流量を示し L=1 としている。式(26)の右辺第1項は m ≥ 1, 0 ≤ Q ≤ R の範囲で常に第2項より大きく、貯留量は流出量の 1/m 乗に比例している。図-6,7 は、m=1.6, 2.0 の場合について R の値を種々変えて式(26)を図示したものである。S~Q 曲線の傾きが両対数紙上で 1/m になっていることがわかる。また、図中の破線は S~Q 曲線の頂点を連ねたもので、式(24)の第2式より次のようになる。

$$S = \frac{m}{m+1} Q^{1/m} \dots\dots\dots (27)$$

矩形降雨波形以外の S~Q 曲線を検討するために、図-8 に示すような三角降雨波形を用いた計算例を示

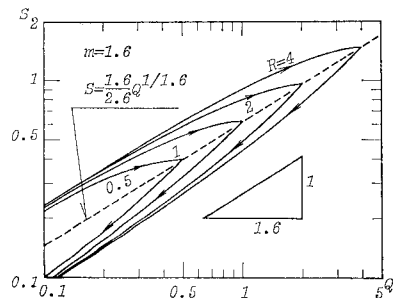


図-6 矩形降雨波形のときの S~Q 曲線 (m=1.6 の場合)

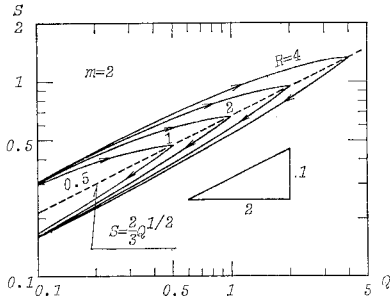


図-7 矩形降雨波形のときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=2.0$  の場合)

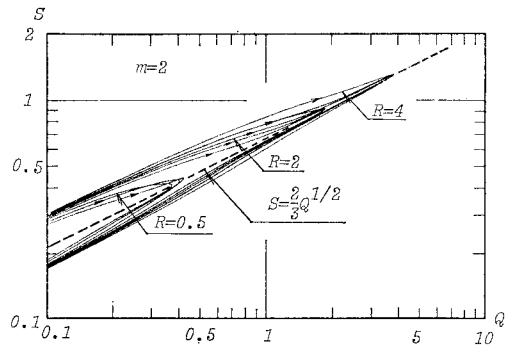


図-11 三角降雨波形のときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=2.0$  の場合)

す。三角降雨波形については、継続時間を4としてピーク雨量  $R=0.5, 2, 4$  の3種類の値を用いた。また、降雨のピーク時刻  $T_a$  としては、 $T_a=1, 2, 3$  の3種類の値を用いた。矩形降雨波形以外の降雨波形について式(17)~(22)のように解析解を得ることは困難である。したがって、計算は式(6), (7)を  $\Delta X=0.01, \Delta T=0.001$  として Li<sup>(10)</sup> の手法により数値計算をした。図-9~11は、 $m=1.2, 1.6, 2.0$  の場合の  $S \sim Q$

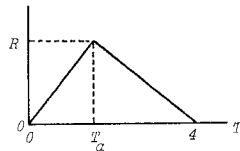


図-8 三角降雨波形

曲線を示したものである。いずれも矩形降雨波形の場合と同様に右回りのループを描いている。降雨のピーク時刻  $T_a$  の値による  $S \sim Q$  曲線の変動はわずかで、ピーク雨量  $R$  が定まると  $T_a$  の値に関係なくほぼ同一のピーク流量を示している。なお、図中の破線は式(27)をプロットしたものであるが、いずれの場合も  $S \sim Q$  曲線の頂点を連ねている。

$S \sim Q$  曲線は降雨波形にかかわらず流量  $Q$  の二価関数になっているが、これを式(27)で近似できるものとして、これを式(12)に代入して次式を得る。

$$\frac{1}{m+1} Q^{(1-m)/m} \frac{dQ}{dT} + Q = R(T) \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 $Q$  は斜面末端における流出量を示している。式(28)は、分布定数系の流出モデルである式(6), (7)を集中定数系のモデルに置換したものと解釈できる。

図-12, 13は先に用いた2つの降雨波形について  $m=1.6$ 、このとき、式(6), (7)による解(実線)と式(28)による解を比較したものである。両者の解はよく一致しているといえる。他の  $m$  の値についても同様な結果を得ている。なお、式(28)の計算にあたっては、 $\Delta T=0.01$  として Runge-Kutta 法を用いた。

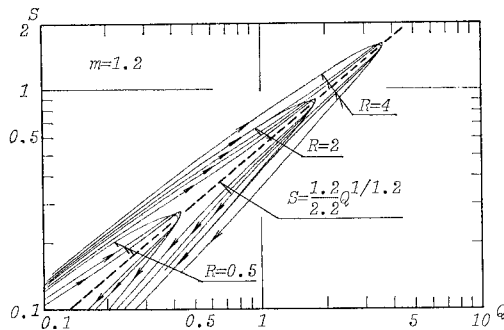


図-9 三角降雨波形のときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=1.2$  の場合)

斜面長が一定の場合、貯留方程式は式(27)で十分近似できることがわかった。また、貯留指数、貯留係数は独立ではなく、 $m$  の値によって定まる。式(27)は単位幅の斜面に関する無次元表示になっているので、次元をもつ貯留方程式に書き改める。次元をもつ貯留量を  $S_u$  (単位幅貯留量  $m^3/m$ ) とすると、

$$S_u(T) = \int_0^t y dx = y_* x_* \int_0^1 Y dX = y_* \cdot x_* S \dots\dots\dots(29)$$

なので、

$$S_u = \frac{m}{m+1} I \alpha^{-1/m} Q^{1/m} \dots\dots\dots(30)$$

となる。Manning 則が成立しているときには、 $m=5/3, \alpha = \sqrt{i}/n$  なので、

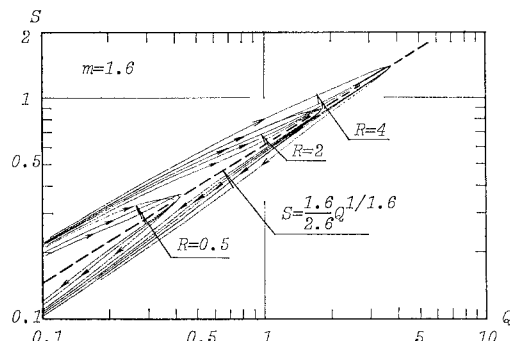


図-10 三角降雨波形のときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=1.6$  の場合)

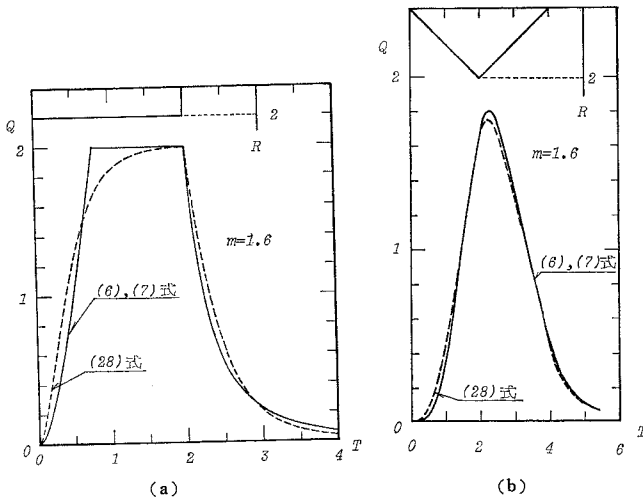


図-12 式(6), (7)による解と式(28)による解の比較 (m=1.6)

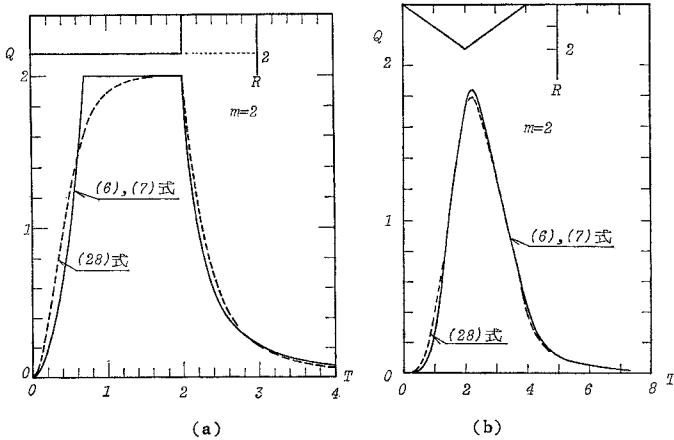


図-13 式(6), (7)による解と式(28)による解の比較 (m=2)

$$S_u = \frac{5}{8} l \cdot n^{3/5} i^{-3/10} q^{0.6} \dots\dots\dots (31)$$

となる。ここに、 $l, n, i$  はそれぞれ斜面長、Manningの粗度係数、斜面勾配である。なお、Khan<sup>(11)</sup>らは、別途の誘導で斜面長が一定の場合、次式を提案している。

$$S_u = g^{-0.007} n^{0.452} i^{1.192} r^{-0.034} q^{0.5},$$

$$i < \frac{1}{100} g^{0.75} n^{1.5} i^{-0.25} \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $g$  は重力の加速度である。

著者が用いた基礎式と境界条件も異なるので、必ずしも式(31)と直接比較することはできないが、よく似た形をしている。

河道における時間遅れを無視し、斜面幅を  $B(m)$  とするとき、斜面全体の貯留量  $S_T(m^3)$  および流出量  $q_T(m^3/s)$  は、

$$S_T = B \cdot S_u, \quad q_T = B \cdot q \dots\dots\dots (33)$$

なので、式(33)を式(30)に代入すると、

$$S_T = \frac{m}{m+1} B l \left( \frac{1}{\alpha \cdot B} \right)^{1/m} q_T^{1/m} \dots\dots\dots (34)$$

斜面の面積が  $B \cdot l$  であることを考慮して、貯留量として貯留高  $S_h(mm)$ 、流量として流出高  $q_h(mm/h)$  を採用すると、式(34)は、

$$S_h = \frac{m}{m+1} \left( \frac{l}{3.6 \times 1000^{2-m} \alpha} \right)^{1/m} q_h^{1/m} \dots\dots\dots (35)$$

Manning 則が成立しているときには、

$$S_h = \frac{5}{8} \left( \frac{nl}{36\sqrt{i}} \right)^{0.6} q_h^{0.6} \dots\dots\dots (36)$$

ただし、 $l$  は斜面長 (m)、 $n$  は Manning の粗度係数 ( $m^{-1/3} \cdot s$ )、 $i$  は斜面勾配である。

#### 4. 斜面長が変動する場合の貯留方程式

斜面長  $L$  の確率密度関数を  $f(L)$  とすると、流出量および貯留量の期待値は次式で与えられる。

$$E\{Q(T)\} = \int_0^\infty Y(X, T)^m f(X) dX \dots\dots\dots (37)$$

$$E\{S(T)\} = \int_0^\infty \int_0^X Y(\lambda, T) d\lambda f(X) dX \dots\dots\dots (38)$$

図-2 に示すような矩形降雨波形について考える。

##### (1) $0 \leq T \leq T_R$ のとき

式(17), (18), (20) および図-3 を参照すると、斜面上の水深は、

$$Y(L, T) = \begin{cases} (RL)^{1/m} & 0 \leq L \leq T^m R^{m-1} \\ RT & T^m R^{m-1} < L \end{cases} \dots\dots\dots (39)$$

である。また、斜面上の貯留量は式(24)の第1式より、

$$S(L, T) = \begin{cases} \int_0^L (R\lambda)^{1/m} d\lambda & 0 \leq L \leq T^m R^{m-1} \\ LRT - \frac{1}{R(m+1)} (RT)^{m+1} & T^m R^{m-1} < L \end{cases} \dots\dots\dots (40)$$

したがって、流出量および貯留量の期待値は次のようになる。

$$E\{Q(T)\} = \int_0^{T^m R^{m-1}} (RX) f(X) dX$$

$$+ \int_{T^m R^{m-1}}^{\infty} (RT)^m f(X) dX \dots (41)$$

$$E\{S(T)\} = \int_0^{T^m R^{m-1}} \frac{m}{m+1} R^{1/m} X^{(m+1)/m} f(X) dX + \int_{T^m R^{m-1}}^{\infty} \left\{ XRT - \frac{1}{R(m+1)} \cdot (RT)^{m+1} \right\} f(X) dX \dots (42)$$

(2)  $T > T_R$  のとき

図-3 を参照すると、

$$L = \frac{1}{R} Y(L, T)^m + mY(L, T)^{m-1}(T - T_R) \quad 0 \leq L \leq X_P \dots (43)$$

$$Y(L, T) = RT_R \quad L > X_P \dots (44)$$

ここに、 $X_P$  は式 (23) において  $T_P = T (> T_R)$  としたときの  $L$  に相等しており、次式で与えられる。

$$X_P = m(T - T_R)(RT_R)^{m-1} + T^m R^{m-1} \dots (45)$$

したがって、斜面からの流出量の期待値  $E\{Q(T)\}$  は式 (43)、(44) より、

$$E\{Q(T)\} = \int_0^{X_P} Y(X, T)^m f(X) dX + \int_{X_P}^{\infty} (RT_R)^m f(X) dX \dots (46)$$

となる。

一方、貯留量は式 (25) の第 2、第 3 式より、

$$S(T) = \begin{cases} \frac{(m-1)}{m} Y(L, T)L + \frac{1}{m(m+1)R} Y(L, T)^{m+1} & 0 \leq L \leq X_P \\ (RT_R)L - \frac{1}{R(m+1)} (RT_R)^{m+1} & L > X_P \end{cases}$$

$$E\{Q(T)\} = R \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma} \left\{ \log(T^m R^{m-1}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Z^2}{2}\right\} dZ + R^m T^m \int_{\frac{1}{\sigma} \left\{ \log(T^m R^{m-1}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \right\}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Z^2}{2}\right\} dZ \dots (53)$$

$$E\{S(T)\} = \frac{m}{m+1} R^{1/m} \exp\left\{\frac{(m+1)\sigma^2}{2m^2}\right\} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma} \left\{ \log(T^m R^{m-1}) - \frac{(m+2)\sigma^2}{2m} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Z^2}{2}\right\} dZ + RT \int_{\frac{1}{\sigma} \left\{ \log(T^m R^{m-1}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right\}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Z^2}{2}\right\} dZ - \frac{(RT)^{m+1}}{R(m+1)} \int_{\frac{1}{\sigma} \left\{ \log(T^m R^{m-1}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \right\}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Z^2}{2}\right\} dZ \dots (54)$$

$T > T_R$  の場合も同様に式 (46)、(48) を正規分布を用いて書き直すことができるが、水深  $Y(L, T)$  が式 (43) に示されるように implicit な形式で与えられるため、実際の計算は  $T < T_R$  の場合より複雑である。

図-14~16 は、矩形降雨波形 ( $R=2, T_R=2$ , 図-2 参照) について斜面長の分散を種々変えて求めた流出量

$$- (T - T_R)(RT_R)^m \quad L > X_P \dots (47)$$

となる。式 (47) の第 2 式は、式 (25) の第 3 式において  $Y(L, T) = RT_R$  とおいたものである。したがって、 $S(T)$  の期待値は次式で与えられる。

$$E\{S(T)\} = \int_0^{X_P} \left\{ \frac{(m-1)}{m} Y(X, T) X + \frac{1}{m(m+1)R} Y(X, T)^{m+1} \right\} f(X) dX + \int_{X_P}^{\infty} \left\{ (RT_R) X - \frac{1}{R(m+1)} (RT_R)^{m+1} - (T - T_R)(RT_R)^m \right\} f(X) dX \dots (48)$$

実測によると斜面長の分布は若干ひずんでおり、対数正規分布あるいはガンマ分布で近似できることが報告されている<sup>5),7)</sup>。ここでは、対数正規分布を採用する。

$$f(L) = \frac{1}{\sigma L \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log L - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \dots (49)$$

斜面長  $L$  はその平均値で無次元化されているので、 $L$  の平均値は 1 である。したがって、斜面長  $L$  の分散を  $\sigma L^2$  とすると式 (49) のパラメーター  $\mu, \sigma^2$  は、次のように与えられる。

$$\sigma^2 = \log(\sigma L^2 + 1) \dots (50)$$

$$\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2 \dots (51)$$

対数正規分布は、次のように変数変換をすると容易に正規分布に置換できる。

$$Z = \log L \dots (52)$$

式 (41)、(42) を書き直して次式を得る。

$$0 \leq T \leq T_R \text{ のとき,}$$

$E\{Q(T)\}$  を示したものである。図中の  $\sigma L^2 = 0$  は、斜面長が一定で変動しない場合の流出量を示している。 $\sigma L^2 = 0$  (斜面長一定) の場合に比較して、斜面長の分散を考慮したときの流出量は大きく変化していることがわかる。分散が増大するとピーク流量が低下し、この傾向は  $m$  の値が小さいほど顕著である。ピーク流量が低下

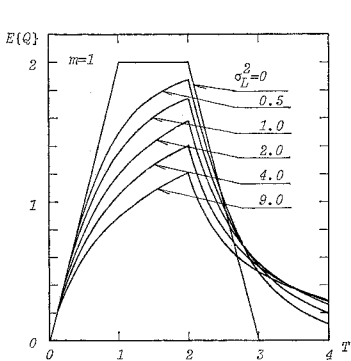


図-14 斜面長が変動するときの流出量 ( $m=1$ , 矩形降雨波形)

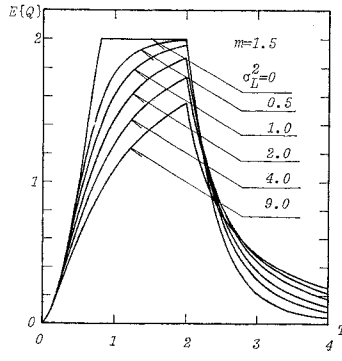


図-15 斜面長が変動するときの流出量 ( $m=1.5$ , 矩形降雨波形)

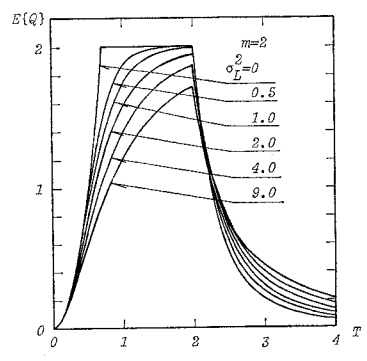


図-16 斜面長が変動するときの流出量 ( $m=2$ , 矩形降雨波形)

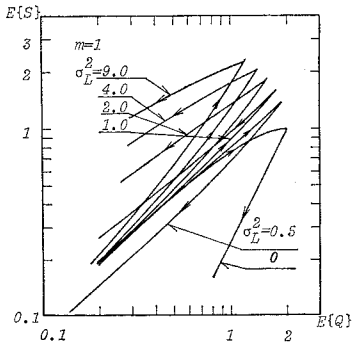


図-17 斜面長が変動するときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=1$ , 矩形降雨波形)

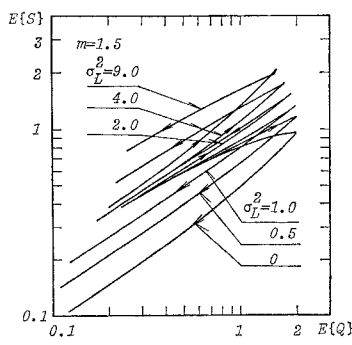


図-18 斜面長が変動するときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=1.5$ , 矩形降雨波形)

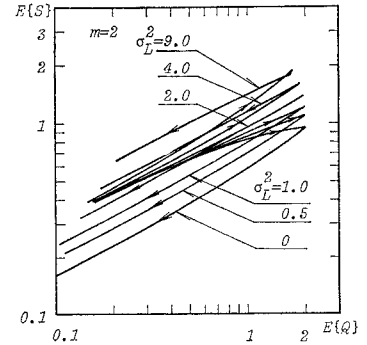


図-19 斜面長が変動するときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=2$ , 矩形降雨波形)

するため流出の継続時間は増大している。

一方、図-17~19 は、図-14~16 と同じ矩形降雨波形について求めた  $E\{S(T)\} \sim E\{Q(T)\}$  曲線を示したものである。分散が増大するに伴って貯留量も増大し、これはピーク流量の低下に対応している。 $\sigma_L^2=0$  (斜面長一定) のときは 2. でも述べたように  $S \sim Q$  曲線は必ず右回りのループを描くが、分散が増大すると  $S \sim Q$  曲線は両対紙上で偏平になって一価関数に近づくが再び二価関数に戻り、これに伴い  $S \sim Q$  曲線が左回りのループを描くようになる。また、分散の大きいとき、 $S \sim Q$  曲線が頂点の近傍で 8 の字状にねじれる形状を示すようになる。 $S \sim Q$  曲線の傾きはほぼ両対紙上で  $1/m$  であるが、図を子細に観察すると分散が増大するにつれて  $1/m$  の傾きより若干大きくなっている。

これまでは矩形降雨波形の  $R, T_R$  をともに 2 としたときの計算例であったが、次に  $R$  が変化した場合の  $S \sim Q$  曲線について検討する。図-20~22 は、 $T_R=2$  として  $R=0.5, 2, 4$  の 3 種類の値を用いた  $S \sim Q$  曲線を示す。図が煩雑になるので、 $\sigma_L^2=0.5, 4$  の場合についてのみプロットしている。先に述べたように  $S \sim Q$  曲線の傾きは、 $R, \sigma_L^2$  の値にかかわらずほぼ両対紙上

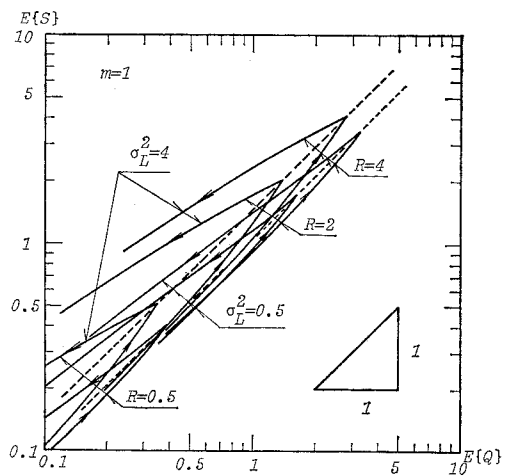


図-20 降雨強度が変化したときの  $S \sim Q$  曲線 ( $m=1$ , 矩形降雨波形)

で  $1/m$  である。図中の破線は各  $S \sim Q$  曲線の頂点を結んだもので、ほぼ直線である。 $S \sim Q$  曲線をこの破線で近似できるものとする、

$$S = KQ^P \dots \dots \dots (55)$$

ここに、 $K, P$  は  $R$  に無関係な係数である。

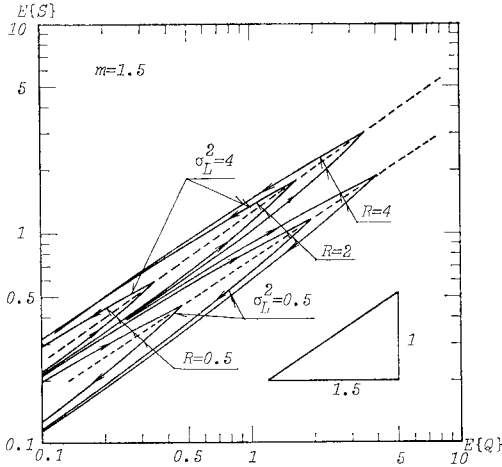


図-21 降雨強度が変化したときの  $S\sim Q$  曲線 ( $m=1.5$ , 矩形降雨波形)

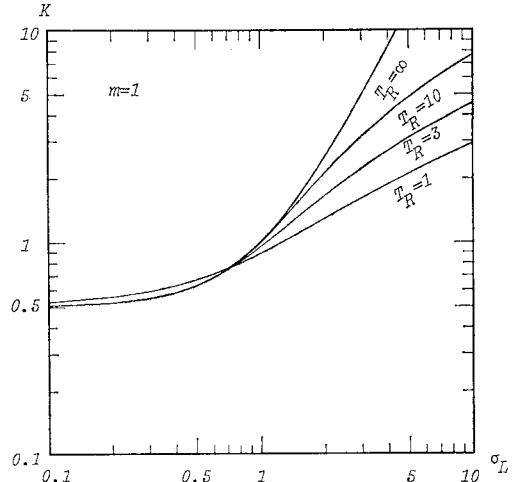


図-23 斜面長の標準偏差と貯留係数の関係 ( $m=1$ , 矩形降雨波形)

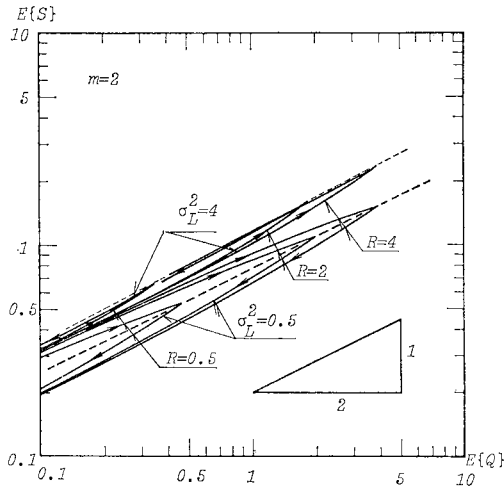


図-22 降雨強度が変化したときの  $S\sim Q$  曲線 ( $m=2$ , 矩形降雨波形)

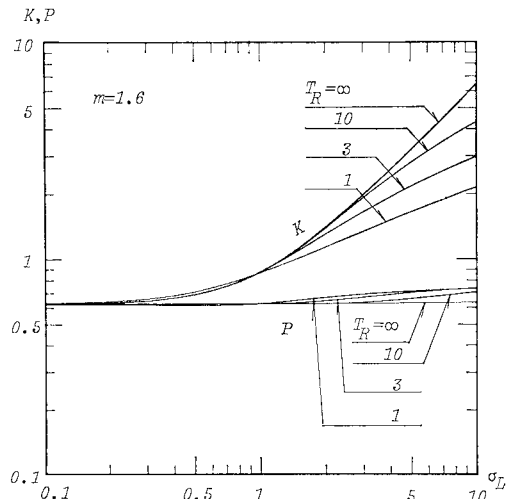


図-24 斜面長の標準偏差と貯留係数, 貯留指数の関係 ( $m=1.6$ , 矩形降雨波形)

図-14~16 に示されるように、ピーク流量は  $T=T_R$  のときに生じている。  $S\sim Q$  曲線の頂点は、この時刻に対応しているわけである。したがって、式 (53), (54) において  $T=T_R$  とおくと  $S\sim Q$  曲線の頂点に対応する流量、貯留量が得られる。  $S\sim Q$  曲線の頂点の軌跡が式 (55) で与えられるので、式 (55) の係数  $K, P$  は、  $T_R, \sigma_L^2, m$  の関数となっている。図-23~25 は、係数  $K, P$  と  $T_R, \sigma_L^2, m$  の関係を図示したものである。  $m=1$  (図-23) のとき、指数  $P$  の値は  $T_R, \sigma_L^2$  に関係なく常に  $P=1$  なので省略している。斜面長が一定である場合には、係数  $K, P$  はともに  $m$  の値によってのみ決定されたが、斜面長が変動する場合には斜面長の分散のみならず降雨の継続時間にも関係していることがわかる。図中の  $T_R=\infty$  の曲線は式 (53), (54) において  $T_R=\infty$

としたときの  $S\sim Q$  曲線を示すもので、次式を示している。

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{m}{m+1} \exp\left\{\frac{(m+1)\sigma^2}{2m^2}\right\} \\ P &= \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

図-23~25 の横軸の標準偏差  $\sigma_L^2$  は、式 (4) の第 3 式および式 (5) の第 1 式を考慮すると斜面長の変動係数に等しい。5 万分の 1 地形図上で位数 1 位の流域の斜面長の変動係数は、著者らの測定によると大きくても 2 程度である。また、表面流出を扱う場合、雨量強度、継続時間の大きい降雨を対象とするので、一般に平均斜面長に対する到達時間の数倍以上の降雨継続を考えてもよい。したがって、図-23~25 の  $T_R$  も 1 以上の値を対象に



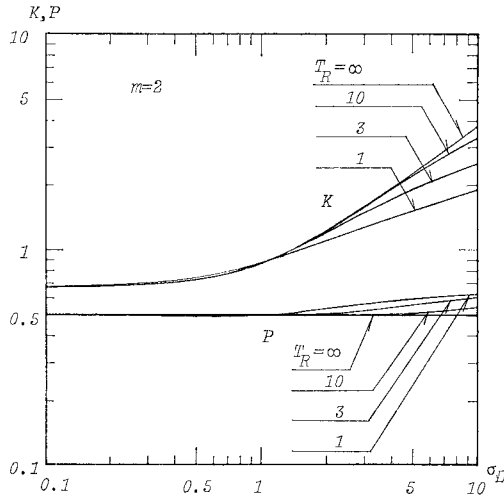


図-25 斜面長の標準偏差と貯留係数、貯留指数の関係 (m=2, 矩形降雨波形)

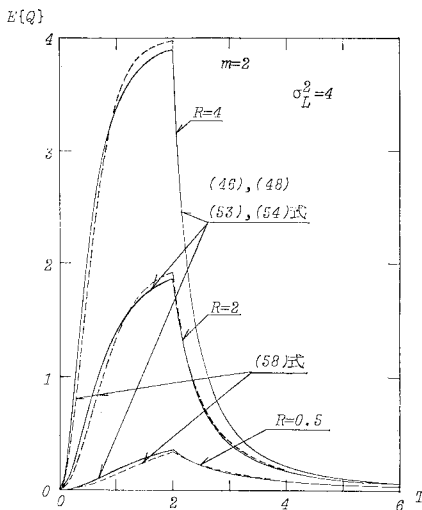


図-26 理論解と式(53)の比較 (m=2, sigma\_L^2=4, 矩形降雨波形)

するとよいことになり、斜面長が変動する場合の貯留方程式として式(56)を用いて、

$$S = \frac{m}{m+1} \exp\left\{\frac{(m+1)\sigma^2}{2m^2}\right\} Q^{1/m} \dots\dots\dots (57)$$

を得る。式(12)に代入すると次式のようになる。

$$\frac{1}{m+1} \exp\left\{\frac{(m+1)\sigma^2}{2m^2}\right\} Q^{(1-m)/m} \frac{dQ}{dT} + Q = R \dots\dots\dots (58)$$

式(57)は、sigma^2=0とおくと式(27)に一致する。

図-26は m=2, sigma\_L^2=4として T\_R=2の矩形降雨の場合、式(46), (48), (53), (54)による解と式(58)を用い解を比較したものである。両者はよく一致している。

次に三角降雨波形を用いて式(57)の適合性を検討す

る。この場合には解析的に斜面上の水深を得ることが困難なので、まず式(6), (7)を用いて数値計算により水深 Y(L, T) を求め、得られた Y(L, T) を式(37), (38)に代入して E{Q(T)}, E{S(T)} を求めた。なお、式(37), (38)の積分範囲の上限値としては、十分に大きい値である50を用いた。

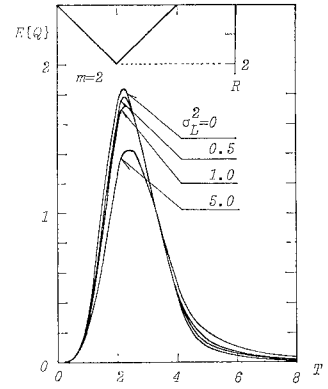


図-27 斜面長が変動するときの斜面からの流出量 (m=2, 三角降雨波形)

図-27は、m=2の場合について E{Q(T)} の計算結果を示したものである。図-16の矩形降雨の場合に比較して、斜面長の分散の増大に伴うピーク流量の低下が著しい。また、図-28は S~Q 曲線を示したものである。図中の破線は、式(57)をプロットしたものである。sigma\_L^2=0.5, 1の場合、破線は S~Q 曲線の頂点を通過しているが、sigma\_L^2 > 4以上になると式(56)の K は若干過大の値を与える。分散が小さいとき、S~Q 曲線は右回りのループを描き、分散が増大するに伴って左回りのループを描くようになる。この傾向は矩形降雨波形と同様である。

図-29~31は、式(6), (7)および式(37), (38)による解と式(58)の貯留方程式に基づく解を比較したものである。sigma\_L^2=0.5, 1.0のとき両者の解はほぼ一致しているが、sigma\_L^2 > 4になると式(58)は貯留係数 K を過大に与えるので、両者の適合度が悪くなっている。この理由としては、式(56)が T\_R=infinity として求めたものであり、図-23~25に示すように sigma\_L^2 の増加に伴い K, P とも

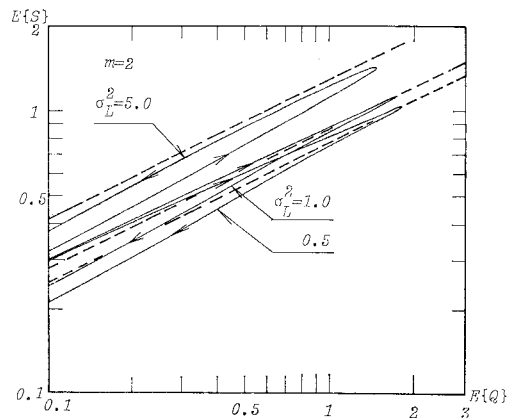
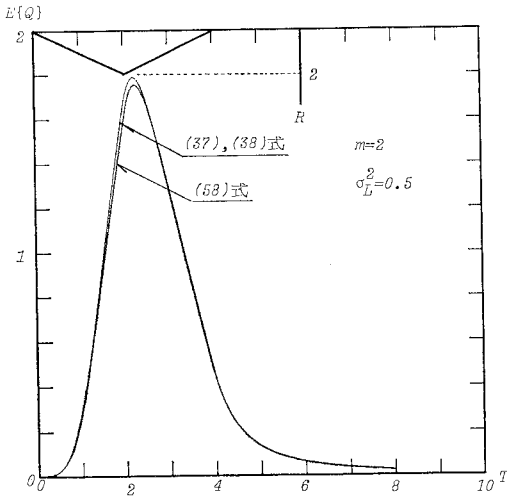
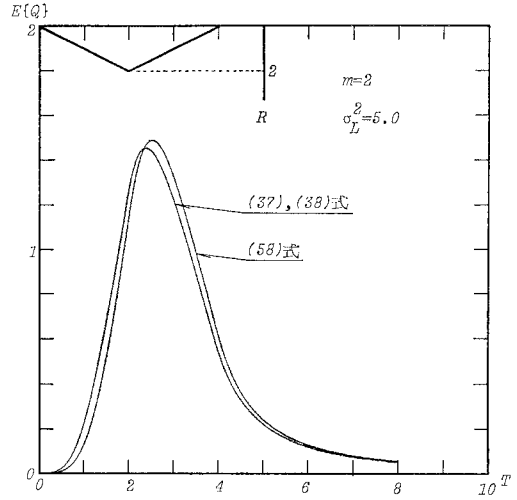


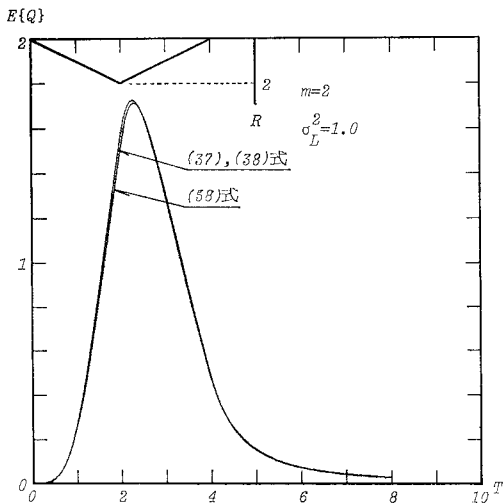
図-28 三角降雨波形における S~Q 曲線 (m=2)



図—29 三角降雨波形における式(32),(33)と式(53)による解の比較 ( $m=2, \sigma_L^2=0.5$ )



図—31 三角降雨波形における式(32),(33)と式(53)による解の比較 ( $m=2, \sigma_L^2=5$ )



図—30 三角降雨波形における式(32),(33)と式(53)による解の比較 ( $m=2, \sigma_L^2=1$ )

に  $T_R = \infty$  の曲線から離れることになる。特に  $K$  の値が、著しく  $T_R = \infty$  の曲線から離れている。

式(50), (57)より、次の貯留方程式を得る。

$$S = \frac{m}{m+1} \exp \left\{ \frac{(m+1)}{2m^2} \log(\sigma_L^2 + 1) \right\} Q^{1/m} \dots \dots \dots (59)$$

式(59)は、式(27)と同様に単位幅の斜面に関する無次元式であり、式(35)を誘導したときと同様に、式(59)に貯留高  $s_h$  (mm)、流出高  $q_h$  (mm/h) を用いると、

$$s_h = \frac{m}{m+1} \exp \left[ \frac{(m+1)}{2m^2} \log \left\{ \left( \frac{\sigma_l}{\bar{l}} \right)^2 + 1 \right\} \right] \left[ \frac{\bar{l}}{3.6 \times 1000^{2-m} \alpha} \right]^{1/m} q_h^{1/m} \dots \dots \dots (60)$$

ここに、 $\bar{l}$ ,  $\sigma_l$  はそれぞれ平均斜面長 (m)、斜面長の標

準偏差 (m) である。また、 $\alpha$  は (m, s) 単位で測定した流域定数である。Manning 則が成立しているときには、 $m=5/3$ ,  $\alpha = \sqrt{i}/n$  において、

$$s_h = \frac{5}{8} \exp \left[ \frac{24}{50} \log \left\{ \left( \frac{\sigma_l}{\bar{l}} \right)^2 + 1 \right\} \right] \left[ \frac{n \bar{l}}{36 \sqrt{i}} \right]^{0.6} q_h^{0.6} \dots \dots \dots (61)$$

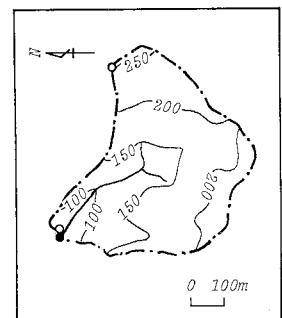
$n$  は粗度係数、 $i$  は斜面勾配である。

### 5. 小流域における応用例

式(35), (60)を竜ノ口山森林水試験地に適用する。同試験地は岡山県旭川の支流に位置し、小川<sup>23)</sup>によって地形特性、有効雨量、直接流出量などが詳細に検討されており、ここではこのままその資料を用いる。平野<sup>5)</sup>にも到達時間の分布を考慮した流出解析において、この試験地の資料を用いている。

試験地は、流域面積 0.226 km<sup>2</sup> で、その概要を図—32に示す。小川は、図—1に示すように河道に沿って40 m ごとに測定した斜面長のハーゼンプロットして図—33を示している。斜面長の分布は、対数正規分布でよく近似できることを示し、図より読み取った平均斜長  $\bar{l}$  は 200 (m)、また斜面長の標準偏差  $\sigma_l$  は 150 (m) であった。

小川は、斜面上の流れ



図—32 竜ノ口森林水試験地の概要

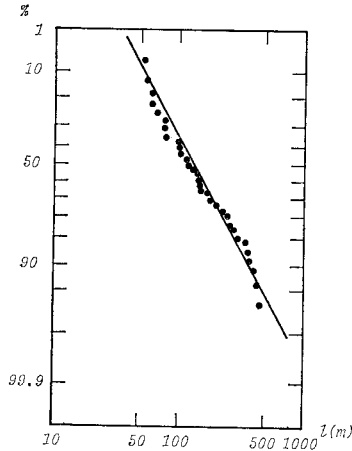


図-33 斜面長の分布 (小川<sup>(12)</sup>による)

を乱流として Manning 式を適用した場合と層流とした場合について解析している. これによると, 式 (2) の流域定数  $\alpha, m$  は,

$$\alpha_t = 7.163 \times 10^{-2}, m = \frac{5}{3} \dots \dots \dots (62)$$

$$(n = 8.2 (m^{-1/3} \cdot s), \sin \theta = 0.345)$$

$$\alpha_l = 9.632, m = 3 \dots \dots \dots (63)$$

ただし,  $\alpha_t, \alpha_l$  はそれぞれ乱流, 層流の場合の流域定数  $\alpha$  の値を示している. 式 (62), (63) および 図-33 より求めた  $\bar{l}, \sigma_l$  を式 (35), (60) に適用すると次の貯留方程式を得る.

$$t s_{h1} = 8.50 t q_{h1}^{0.6} \dots \dots \dots (64)$$

$$t s_{h2} = 10.53 t q_{h2}^{0.6} \dots \dots \dots (65)$$

$$t s_{h1} = 13.45 t q_{h1}^{1/3} \dots \dots \dots (66)$$

$$t s_{h2} = 14.85 t q_{h2}^{1/3} \dots \dots \dots (67)$$

ただし,  $s, q$  はそれぞれ貯留高 (mm), 流出高 (mm/hr)

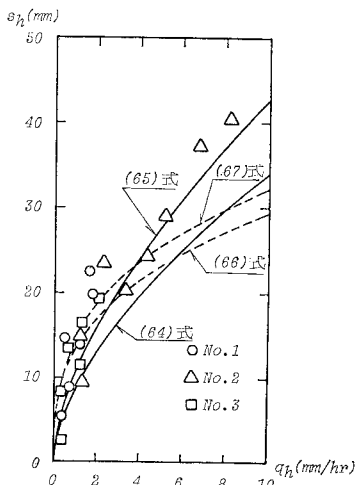
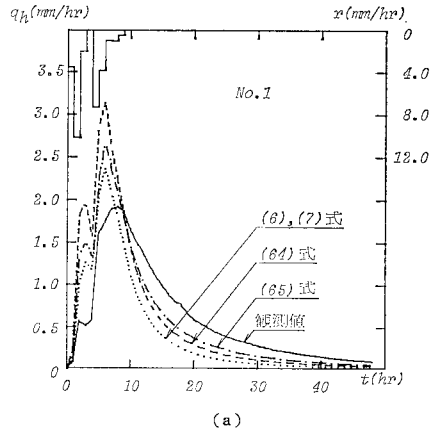


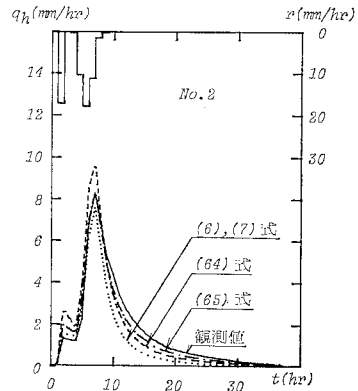
図-34  $s_h \sim q_h$  曲線

を示し, 添字  $t$  は乱流の場合, 添字の  $l$  は層流の場合を示す. また, 添字の 1 は, 斜面長の変動を考慮しない式 (35) から誘導したものであり, 添字 2 は斜面長の変動を考慮した式 (60) を用いたものであることを示す.

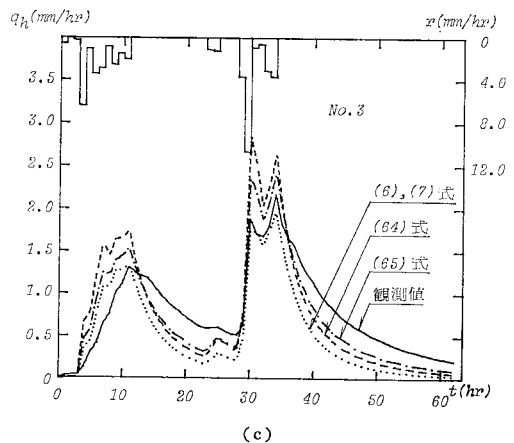
図-34 は, 試験地の 3 例の実測資料を用いた  $s \sim q$  曲線および式 (64)~(67) を示したものである. 図が煩雑になるので, 実測資料を用いた  $s \sim q$  曲線は線で結んで



(a)



(b)



(c)

図-35 計算値と実測値の比較

いないが、いずれも右回りのループをなしている。\$s \sim q\$ 曲線だけから判断すると、ピーク流量の少ない No. 1, No. 3 の資料に関しては式 (67) が、ピーク流量の大きい No. 2 の資料に関しては式 (65) が、実測資料に適合しているように思われる。

図-35 は、斜面上の流れが Manning 則に従うものとして、式 (6), (7) の Kinematic Wave モデル, (64), (65) の貯留方程式を用い計算結果と実測値を比較したものである。斜面長の変動を考慮しない式 (64) を用いた計算結果は、いずれも過大なピーク流量を与えている。斜面長の変動を考慮した式(65)は、過大なピーク流量の計算値を補正していることがわかる。

## 6. 結 論

式 (6), (7) に示される Kinematic Wave モデルより導いた \$S \sim Q\$ 曲線の概形について、その特長を列挙すると次のようになる。

(1) 斜面長が一定 (\$\sigma\_L^2=0\$) のとき、常に右回りのループを描く。

(2) \$\sigma\_L^2\$ が増大するにつれて、\$S \sim Q\$ 曲線は両対紙上で偏平化し、さらに \$\sigma\_L^2\$ が増大すると再び \$S\$ は \$Q\$ の二価関数となる。これにつれて、\$S \sim Q\$ 曲線は右回りから左回りのループを描くようになる。

(3) \$\sigma\_L^2\$ が大きいときには、\$S \sim Q\$ 曲線の頂点の近傍に \$S \sim Q\$ 曲線が 8 の字状にねじれる形状が現われる。

一般には、\$S \sim Q\$ 曲線は二価関数となっているが、これを一価関数で近似し、斜面長の変動 (分散 \$\sigma\_L^2\$) を考慮した貯留方程式を導いた。

$$S = \frac{m}{m+1} \exp \left\{ \frac{m+1}{2m^2} \log(\sigma_L^2 + 1) \right\} Q^{1/m} \dots (68)$$

計算によると、この貯留方程式は \$\sigma\_L^2 \le 4\$ の範囲で満足すべき結果を与えることがわかった。なお、実際の小流域 (5 万分の 1 地形図上で位数 1 位の流域) で測定した \$\sigma\_L^2\$ は、上述の範囲内にある。

式(68)は、無次元表示になっているので、実際の流出解析によく用いられる貯留高 \$s\_h\$ (mm), 流出高 \$q\_h\$ (mm/h) を用いて、書き直すと、

$$s_h = \frac{m}{m+1} \exp \left[ \frac{m+1}{2m^2} \log \left\{ \left( \frac{\sigma_L}{\bar{l}} \right)^2 + 1 \right\} \right] \left[ \frac{\bar{l}}{3.6 \times 1000^{2-m} \alpha} \right]^{1/m} q_h^{1/m} \dots (69)$$

\$\bar{l}\$, \$\sigma\_L\$ は、それぞれ平均斜面長 (m), 斜面長の標準偏差 (m) で、\$\alpha\$ は (m, s) 単位で表示した流域定数である。流れが Manning 則に従うときには、式 (69) において \$m=5/3\$, \$\alpha = \sqrt{i/n}\$ (\$i\$: 斜面勾配, \$n\$: 粗度係数) とするとよい。また、斜面長が一定で変動しないときには、式 (69) において \$\sigma\_L=0\$, \$\bar{l}=l\$ (斜面長) とおくと、式 (69) をそのまま用いることができる。

式(69)にて示される貯留方程式を、竜ノ口山森林理水試験地 (流域面積 0.226 km\$^2\$) に適用して良好な結果を得た。

流域面積の大きい流域を対象とするとき、本論文で論文で誘導した貯留方程式をどのように応用するかについては、今後の課題である。

最後に、貴重なる資料を提出して下さい小川 滋氏 (愛媛大学), 平野宗夫氏 (九州大学), また、適切な助言をいただいた北海道大学 山岡教授に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 藤田睦博：流域地形構造とその統計則に関する基本的研究，土木学会論文報告集，No. 234, 1975.
- 2) 藤田睦博：河道網における支流の分布特性に関する研究，土木学会論文報告集，No. 246, 1976.
- 3) 岩佐義朗・小林信久：マグニチュード理論による河道網の連結構造に関する統計則と指標，土木学会論文報告集，No. 273, 1978.
- 4) 岩佐義朗・小林信久：マグニチュード理論に基づく流域地形統計則およびその位相理論との関連性，土木学会論文報告集，No. 278, 1978.
- 5) 平野宗夫・伊藤尚規：到達時間の分布を考慮した流出解析，第 22 回水理講演会論文集，1978.
- 6) 白川信之・藤田睦博：流出モデルの集中化に関する研究，第 35 回土木学会年次学術講演会講演概要集，1980.
- 7) Miller, V.: A Quantitative Geomorphic Study of Drainage Basin Characteristics in the Clinch Mountain Area, Virginia and Tennessee, Department of Geology Columbia University, New York 27, 1953.
- 8) 藤田睦博：地形構造と出水機能に関する研究，土木学会北海道支部論文報告集，No. 34, 1978.
- 9) Eagleson, P.S.: Dynamic Hydrology, McGraw-Hill Book Company, 1970.
- 10) Li, R.M., D.B. Simons and M.A. Stevens: Nonlinear Kinematic Wave Approximation for Water Routing, Water Resources Research, Vol. 11, No. 2, 1975.
- 11) Khan, M.S., F. Takagi and S. Adachi: On the Characteristics of Surface Runoff in the Flat Land, Proc. of JSCE, No. 289, 1979.
- 12) 小川 滋：山地小流域における出水解析の基礎的研究，九州大学演習林報告，第 50 号，1977.

(1980.7.12・受付)