

数値解析における帯行列法の有効性に関する研究

A STUDY ON THE EFFECTIVITY OF THE BAND
MATRIX METHOD IN NUMERICAL ANALYSIS

白石 成人*・谷口 健男**・殿本 卓***

By Naruhito SHIRAISHI, Takeo TANIGUCHI and Takashi TONOMOTO

1. ま え が き

近年、有限要素法や差分法といった数値解析法で扱われる系は、ますます巨大化、複雑化し、また解の精度向上のため非常に多くの離散点を有するようになり、その結果導き出される大次元連立方程式に対し有効な数値計算法の開発が要求されるようになった。特に注目されているのが、離散化モデルの特性の1つであるスパース性

(行列内の要素の多くが零であること)の利用であり、今日、この特性を利用したいくつかの計算法が提案されているが、そのうち最もよく利用されているのが帯行列法である。この計算法は、図-1に示す半帯幅(以下ではHBWで示す)とよばれる領域に対し演算を行うこと

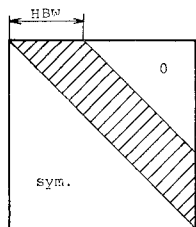


図-1 帯行列と半帯幅

により解を得ようとするものであり、行列全体を対象とするより容量的・演算時間的に効率よいことは明らかである。さらに、プログラミングが簡単、入力データを2次元配列とすることにより元の行列におけるデータ構造を保存し、したがってデータ修正等が容易であるという利点も有している。一方、最大の欠点としてHBW内に依然多くの零要素が存在すること、またそれらに対し unnecessary 演算を行うことが挙げられ、よって一般には中規模程度の系の解析によく利用される。

いま、対象とする行列を $(N \times N)$ 、その HBW を B とすれば、帯行列法のために必要な記憶域は約 $N \cdot B$ 、消去演算により解を求めるに必要な演算回数(乗算)は $N \cdot B^2/2 + 2N \cdot B$ となる¹⁾。したがって帯行列法を有効

に利用するには半帯幅 B を可能な限り小さくする必要があり、それにより解の精度向上も可能となる²⁾。

このような背景、およびマトリックス法の自動化を目指すため、従来より数多くの帯幅減少法が提案され、実用に供されてきている。なかでも有効と考えられるものとして Cuthill-McKee³⁾、Cheng⁴⁾、Gibbs-Poole-Stockmeyer⁵⁾らのアルゴリズムが挙げられる。しかしながら、これら今日提案されているいずれのアルゴリズムも常に帯幅値を最小に導くとは限らず、非常に悪い結果しか与えない場合も多く見受けられる。それでは、汎用性ある帯幅最小化アルゴリズム設計は可能なのであろうか。これに対する答は1976年 Papadimitriou により与えられている⁶⁾。すなわち、帯幅を常に最小に導く有効なアルゴリズム設計は非常に困難であり、ほとんど不可能である。帯幅最小化問題のような組合せ問題において有効なアルゴリズム設計が困難な問題は NP 完全問題⁷⁾とよばれる。しかしながら他方では、NP 完全問題に属する問題でも難易の差があることがわかっている⁸⁾。したがって、帯幅最小化問題においても、組合せ数を減らし得るようにすればアルゴリズム設計も可能となると考えられる。それでは、いかなる要因が組合せ数を増加せしめ、ひいてはアルゴリズム設計を困難にしているのか。この問に対する答ははまだ見出されていないが、もし、この要因が明らかにされれば、それを除くことにより、帯幅最小化のアルゴリズム設計が可能となるのみならず、そのアルゴリズムの、さらに帯行列法自体の適用限界が明確にされる。

本研究では、任意の系の最小帯幅問題を扱うことにより、帯幅最小化アルゴリズム設計を困難化している要因を明らかにするとともに、帯行列法が有効に適用される系を明確にする。さらに、上記最小帯幅問題の成果をもとにして、従来とはまったく異なる新たな帯幅減少法を提案する。

なお、上述した帯行列法の適用限界という考え方は数

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 岡山大学講師 工学部土木工学科

*** 工修 大阪市役所

値計算法に対するグラフ理論的考察よりも導き出されてお⁹⁾、それに従えば、ここでの適用外の系の解析は他の計算法、たとえばプロフィール法によればよいと考えられる。

2. 最小帯幅問題

離散的な解析モデルより得られる連立一次方程式

$$y = A \cdot x \dots\dots\dots (1)$$

の係数行列：Aは一般に正定値・対称・疎な場合が多いことより本論文でもこれらを仮定する。Aの行・列の入れ換えにより、半帯幅値B

$$B = \max |i - j|, \text{ただし, } \forall a_{ij} \neq 0 \dots\dots\dots (2)$$

は変化する。ただし、 a_{ij} はAの*i*行、*j*列要素とする。行・列の入れ換えは解析モデルの離散点に対する節点番号(1, 2, ..., *n*)の付け換えと等価である。また式(2)よりわかるように、Bの値は互いに直接的な力学的つながりを有する2節点の番号“*i*”と“*j*”により決まることより、最小帯幅問題の対象は、離散点とそれらの間の結合関係を示すもの、すなわちリニア・グラフ(以後グラフとよびGで示す)で十分である。したがって解析モデルが*n*個の離散点を有す場合、*n*個の点を有すグラフ:G(*n*)を対象とすればよい。簡単のため、解析モデルの各点の自由度を1とし、Aの上三角行列内の $a_{ij} \neq 0$ の数を*m*(ただし*i*≠*j*)とすると、Gは*m*本の線を有し、これをG(*n*, *m*)と表現する。“*i*”と番号づけられた点を v_i で示すと、 $a_{ij} \neq 0$ なる2点 v_i, v_j は1本の線で結ばれ、 v_i は v_j に隣接する(adjacentの略を用い、adj. $v_j \ni v_i$ で示す)といい、その数|adj. v_j |を v_j の次数(deg. v_j)とよぶ。行列Aが1個の独立な解析モデルを表現するとき、そのグラフGは連結グラフであるといい、G内の任意の1点より線をたどることにより他の任意の1点に到達し得る。G内任意の2点を結びつける最短経路上に位置する線の数をもって、離散点間の距離(*d*で示す)を定義する。さらに、G内の任意の2点間の最大距離をGの直径(d_0 で示す)とよぶ。

行列AにおけるBの最小値: $\min B$ を求めることは、Aに等価なグラフ:G(*n*, *m*)において、

$$B = \max |i - j|, \text{ただし } \forall d(v_i, v_j) = 1 \dots\dots\dots (3)$$

の最小値を求めることに等しい。式(3)において、Bは互いに隣接関係にある2点の最大番号差に等しいことより、最小帯幅値(以下 $\min H.B.W.$ で示す)は節点につけられた節点番号を尺度として測られているといえる。しかしながら従来よりよく知られているように、 $\min HBW$ はG固有のものであることより、少なくとも最小帯幅問題を扱う限りにおいて、式(3)のような節点番号を基礎とする考え方は不適当であり、Gに対し節

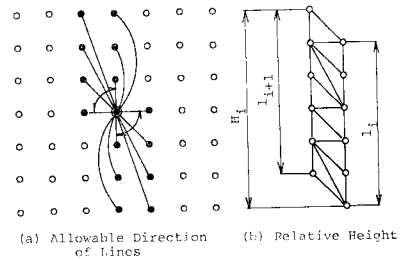


図-2 ファイリング・フィールド

点番号を与えることなく $\min HBW$ を探る方法が必要となる。そこで本論文では、小西らによって提案された特殊な座標:Filing Field¹⁰⁾を用いることにする。このFiling Field(以後“場”とよぶ)とは図-2に示されるように格子状に配置された点の集合であり、この場の中に任意の連結グラフを次の2条件

- 1) Gの点は場の格子点上に置かねばならない。縦に並んだ1つの節点集合を縦点列とよべば、各縦点列内に空点が存在してはいけない。
- 2) Gの線は同一縦点列内、もしくは相隣る縦点列間のみ配置され、さらに許容された方向(図-2(a)参照)以外に配置してはいけない。また、相隣る2縦点列間には少なくとも1本の水平方向の線を配置しなければならない。

を満たすように描けば、縦方向に配置された節点の個数が半帯幅Bを一義的に表わすものとなる。

これら条件に従い場の中に描かれた図形(グラフ)の半帯幅Bは、相隣る2縦点列間において定められる相対高さ: H_i (図-2(b)参照)を用いて下式で表わされる。

$$B = \max H_i (i=1, 2, \dots, \beta) \dots\dots\dots (4)$$

ここに縦点列数を α とすれば、 $\beta = \alpha - 1$ 。なお、このBを与える節点番号順序は描かれた図形の最右側点列最上端の点より下方へ、ついで右より第2縦点列最上端の点へと順次、上より下へ、右より左へと連続番号を与えることにより得られる。適用例題を図-3および図-4に示す。式(4)より、帯幅の最小化は、

$$\min B = \min(\max H_i) \dots\dots\dots (5)$$

と表現されることより、Gに対するHBW最小化問題は、場において相対高さを最小にするような図形の描き方に置き換えられた。

この H_i の値が最小となった状態を考えると、 H_i を与える近傍のいくつかの縦点列は、すべてほぼ等しい点個数を有す。なぜなら、いま第*i*相対高さがその半帯幅を決定すると仮定し、さらに、その近傍の H_j において $H_j \ll H_i$ であれば、 H_i を構成する第*i*および(*i*+1)縦点列に含まれるいくつかの点を第(*i*-1)、(*i*+2)縦点

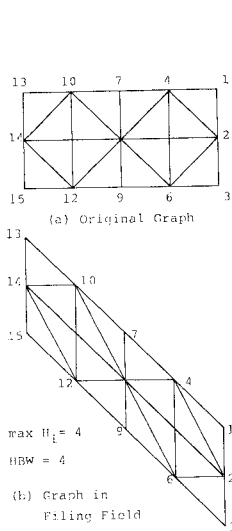


図-3 ファイリング・フィールドの適用例

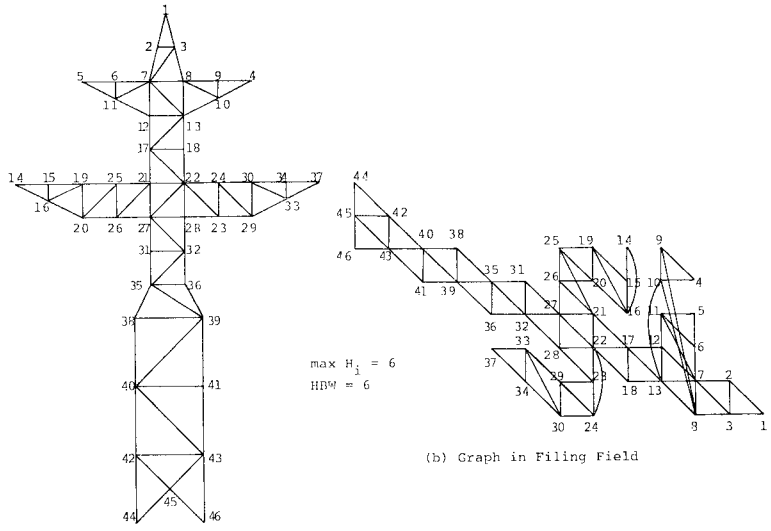


図-4 ファイリング・フィールドの適用例

列等に配置替えすることにより H_i を小さくすることができることになり、これは H_i が最小であるという仮定に反するからである。図-2 (b) よりも明らかなように、 H_i と l_i との差 ($H_i - l_i$) は、主として許容方向にすべての線を納めることによる量であり、また文献 9) に指摘されるように、その量は、 l_i に比し十分小さく、したがって帯幅値に及ぼす影響は小さい。このことより、 B は、 H_i に替えて第 i 縦点列に含まれる点個数 l_i を用いて、近似的に下式で表現され得る。

$$B \approx \max l_i \dots\dots\dots (6)$$

したがって、

$$\min B = \min(\max l_i) \dots\dots\dots (7)$$

G より H_i に含まれる点を除けば、 G は分離する。これは上記条件 2) より明らかである。したがって、 H_i は G を横切るような点の集合である。以上をまとめれば、最小半帯幅値は、場にその最大縦距を最小にするように描かれたグラフの“幅”によって決まる。図-3 (a) に示されるグラフは矩形板の有限要素モデル、あるいはトラス構造等に該当し、場に描かれた図形 (図-3 (b)) より $\min HBW$ は明らかに G の幅に一致することがわかる。図-4 (a) は送電鉄塔を示すグラフであり、 $\min HBW$ を与える図形は 図-4 (b) に示される。この例の場合、図-3 の例と異なり、(a)、(b) 両図の外観はまったく異なる。すなわち、 $\max H_i$ を最小化するために、グラフの突出部、鉄塔の腕の部分適切に折り曲げる操作を行っているからである。このような操作を要求する典型的なグラフとして分岐を有するトリーグラフが挙げられる (図-6 参照) ことより、一般的に 図-4 のような系を“分岐を有するトリー構造”^{注)}とよび、図-3

に示されるようなグラフ構造 (これを“分岐のないトリー構造”^{注)}とよぶ) と区別する。しかしながら、いずれにおいても式 (5) あるいは式 (7) が成り立つ。Filing Field を用いて帯幅を最小にするために必要な項目は、次の 3 つになる。

- (1) グラフの長手軸と場の横軸方向を一致させる。
- (2) 分岐を有するトリー構造の場合、分岐枝を適切に折り曲げる。
- (3) さらに、相隣縦点列間において点の移動を行い、 $\max l_i$ (または $\max H_i$) を与える第 i 縦点列近傍の点列内節点数を平均化する。

注) n 個の点、 m 本の線を有する任意のグラフ: $G(n, m)$ は、
 ① トリーグラフと ② メッシュグラフに区別される。いま、いくつかの点がシリーズに連結されているグラフをパスとよぶと、③ はその中の任意の 2 点が唯一のパスにより連結されている構造を有し、 $n=m-1$ 。もし、 G のすべての点がシリーズに連結されていれば、それを“分岐のないトリーグラフ”、そうでなければ“分岐を有するトリーグラフ”とよぶ。一方、④ は任意の 2 点間が 2 個以上のパスにより連結されている構造を有し、 $m \geq n$ 。

有限要素法や差分法の対象となる離散化モデルのほとんどすべては、メッシュグラフで表現される。しかしながら、そのモデルを適切に分割し、各部分を 1 個の点で、さらに、それらの間のつながりを 1 本の線で表現し直せば、元のグラフを簡略化した新たなグラフを得ることができ、これに対しても、再度、上述したグラフの分類が可能である。この分類は、元のグラフの分類とは異なり、グラフ全体としての構造的特徴を拾い上げることを目的としており、もし部分構造が互いにシリーズに連結されていれば、“分岐のないトリー構造”、それらがシリーズに結ばれていず、枝分かれがあれば、“分岐を有するトリー構造”、さらに部分構造のつながりがループを描けば“メッシュ構造”を有するとよぶ⁹⁾。

3. 帯幅最小化アルゴリズムの設計可能性の検討

前節において示した帯幅最小化の手順には、道具としての計算機の特性はなんら考慮されていない。したがって本節の目的は、前節に示した手順の遂行が計算機を用いて可能であるかどうかを検討することにある。

まず設定しなければならないのは、用いることの許される入力データである。帯幅最小化問題の対象は系ではなく、そのグラフであることより、入力データとしてGに関するものが考えられる。Gの表現法として、いくつかのものが考えられているが¹¹⁾、いずれにおいてもG内に含まれる任意の2点 v_i, v_j が互いに隣接しているかどうかを示すものである。なぜならば、式(1)の行列Aより自動的に得られる情報は、Gにおける $d=1$ の関係でしかなく、 $d(v_i, v_j) \geq 2$ の関係にある2点 v_i, v_j に関しては、単に“0”として表現されているにすぎない。したがって、このようにAより自動的に得られるGの表現法の1つを入力データと考えるのが妥当であり、本論文においてもこれを仮定する。

この入力データより任意に選んだ2点 v_i, v_k 間の距離： $d(v_i, v_k)$ の求め方を探してみる。その一つの方法として、入力データを $(n \times n)$ の大きさのC行列を用い、その第i行(および列)でもって、Gの第i点を表示することにして、

$$\left. \begin{aligned} &\text{if } d(v_i, v_j)=1, c_{ij}=1 \\ &\text{if } d(v_i, v_j)>1, c_{ij}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

により、GよりC行列を作る。ただし、 c_{ij} はCの(i, j)要素、また $c_{ii}=1$ とする。C行列のべき計算を行い、もし C^r において初めて $c_{ik} \neq 0$ となつたとすれば、

$$d(v_i, v_k)=r \dots\dots\dots(9)$$

なぜならば、

$$c_{i,1} \times c_{1,2} \times \dots \times c_{r-2,r-1} \times c_{r-1,k} = c_{i,k} \neq 0$$

が成り立つのは、

$$c_{i,1}=c_{1,2}=c_{2,3}=\dots=c_{r-1,k}=1$$

のときに限られるからである。

Gにおける最大距離は直径 d_0 であることより、 C^{d_0} において、すべての要素 c_{ij} が初めて非零となる。したがってGのすべての連結関係の情報を得ようとするれば、そのために必要となる演算(乗算)回数 T は行列の対称性を考慮しても

$$T=(d_0-1)n^2(n-1)/2 \dots\dots\dots(10)$$

となり、式(10)は特にGの直径を求める困難さを示している。

$d(v_i, v_k)$ を求める他の方法として、上述したべき計算ではなく、判定文を用いて v_i より $\{v^{(1)}\}=\{v|d(v_i,$

$v)=1\}$ を求め、ついで $\{v^{(2)}\}=\{v|d(v_j, v)=1, v_j \in v^{(1)}, \dots\}$ を順次求める方法が考えられる。この方法を用いれば、たとえば、 $\{v^{(1)}\}$ より $d=1$ を求めたときの $\{v^{(2)}\}$ は、

$$\{\bar{v}^{(2)}\}=\{v^{(2)}\} \cup v_i \cup \{v^{(1)}\}$$

となり、目的たる $\{v^{(2)}\}$ 以外に $v_i, \{v^{(1)}\}$ を含むことになり、これらを除外する操作が必要となる。しかしながら、この第2の方法は前者よりはるかに有効であり、今日この方法が一般に用いられる。

以上の考察により、帯幅最小化アルゴリズム設計の困難さの理由の一つは、 $d \geq 2$ の情報を要求することであると考えられ、したがって、有効なアルゴリズムは $d=1$ の情報、すなわち本節始めにおいて考察した入力データのみを利用して設計されるものと考えられる。

ここでいま一度、場に描かれた図形に考察を加えてみる。図形の各縦点列に含まれる点個数を右側縦点列より順次

$$\{l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}, \dots, l_r\}$$

とする。描き方の条件2)より、たとえば $v_k \in \{l_k\}$ であるとすれば、 $\forall v \in \text{adj. } v_k$ に対し、

$$v \in \{l_{k-1}\} \cup \{l_k\} \cup \{l_{k+1}\} \dots\dots\dots(11)$$

もしGに含まれる1点 v_i に関して、

$$\left. \begin{aligned} \{v_2\} &\equiv \{v|d(v_1, v)=1\} \subset \{l_1\} \cup \{l_2\} \equiv \bigcup_{i=1}^2 \{l_i\} \\ \{v_3\} &\equiv \{v|d(v_2, v)=1\} \subset \bigcup_{i=1}^3 \{l_i\} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

が成り立つとき、Gは v_1 より等の距離節点集合

$$\{l_1, l_2, \dots, l_r\}$$

に分けられたとよぶことにする。

Gの1点 v_i より等距離節点集合を作ることは容易である。なぜならば、いま設定した入力データは $d=1$ の情報を与えるものであり、また等距離節点集合は式(12)に示されるように $d=1$ により定まる。以上の考察より、本論文においては、“アルゴリズム設計が可能であるとは、等距離節点集合を利用できることである”と仮定し、前節で与えた手順の検討を行う。

(1) グラフの長手軸

図-5の例題よりもわかるように、帯幅減少、もしくは最小化において、Gの長手軸を見出すことは不可欠な手順である。Gの d_0 を求めようとする上述

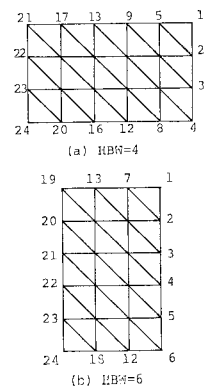


図-5 グラフの長手軸と半帯幅

した第1の方法は式(10)に示されるように、多くの演算回数を要求することより不適當である。したがって、第2の方法により求めるべきであるが、帯幅問題において要求されているのは、 d_0 ではなく、長手軸の方向である¹²⁾ことを考えれば、第2の方法を用いたより簡便な手順が考えられる。その一つは、Gibbs, Poole, Stockmeyer によって提案された Pseudo-diameter であり、第2の方法を数回適用することにより、Gの長手軸を見出すことが可能である⁵⁾。

(2) 分岐枝の折り曲げ

図-6 に示す簡単なトリグラフを例にとり、この問題を考える。枝の折り曲げに先立ち、分岐枝の出ている点(これを“集中点”とよび、 v_c で示す)を見出す必要がある。もし、 v_c の個数が1個であれば(図-6(a)), v_c において $\lfloor \text{deg. } v_c/2 \rfloor$ 本適当に選び出し、それらを一方に、残る枝を他方に折り曲げれば min HBW を求めることができる。したがって、この場合、Gの長手軸の一端よりの等距離節点集合はなんら意味をなさず、 v_c よりの等距離集合のみが min HBW に役立つことになる。しかしながら、 v_c が2個以上存在する場合には、もはや一般的な方法はないことは 図-6(b)の例よりも明らかである。

さらに対象がトリグラフではなく、分岐を有するトリ構造となれば、

- 1) 集中点が1つの部分グラフを構成する。
- 2) 各分岐枝のもつ“幅”が同じであるとは限らず、さらに1つの分岐枝内の“幅”も一定とは限らない。

したがって、一般的には、上に仮定したアルゴリズム設計可能性の条件を満たさないことは明らかである。

以上をまとめると、分岐枝の折り曲げの手順は一般的には設計可能条件を満たさず、したがってこの手順を要求する系、すなわち分岐を有するトリ構造に対して有効なアルゴリズムは存在しない。

(3) グラフの幅の平均化

(2)の設計可能性の検討により、対象系は“分岐を有しないトリ構造”に限定できることになり、本節では、それに対する幅の平均化法の設計可能性を論じる。

“分岐を有するトリ構造”を除外し得たことにより、min HBW は、G内の適切な1点 v_i よりの等距離節点集合 $\{l_i\}$ (ただし $i=1, 2, \dots, \delta$) を作り、 $\max l_i$ を最小化することにより達成し得る。グラフの幅、あるいは $\max l_i$ の平均化に役立つものとして、等距離集合の数 δ

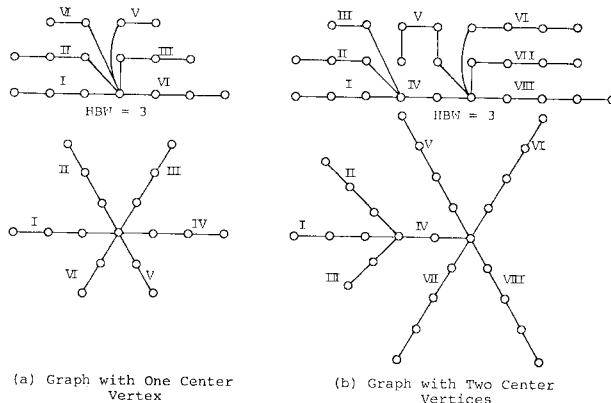


図-6 トリグラフにおける分岐枝の折り曲げ

を大きくすることが考えられる。 δ とGの直径 d_0 との間に下式の関係がある。

$$\delta < d_0 \dots \dots \dots (13)$$

すなわち、 δ を大きくすることは、(1)に述べたGの長手軸を見出すことと一致する。したがって、 $\delta=d_0$ の場合における等距離節点集合 $\{l_i\}$ ($i=1, 2, \dots, \delta$) の出発点 v_i は d_0 、もしくは Pseudo-diameter の一端であり、いまこの v_i が求まっていると仮定して話を進める。

いま対象としている系においては、等距離節点集合が成り立つとはいえ、たとえば $\{v|d(v_1, v)=1\}$ を満たす $\{v\}$ は $\{l_1\}$ または $\{l_2\}$ に配置され得る。もし $v_2 \in \{v|d(v_1, v)=1\}$ が $\{l_1\}$ に配置されれば、 $\{v|d(v_2, v)=1\}$ は $\{l_1\}$ もしくは $\{l_2\}$ に、そしてもし v_2 が $\{l_2\}$ に配置されれば $\{v|d(v_2, v)=1\}$ は $\{l_1\}, \{l_2\}, \{l_3\}$ のいずれかに属し得ることになる。このように1点 v の配置の仕方により、まず v の近傍点が、そして順次遠方の諸点の配置が影響を受けることになり、それが $\max l_i$ を、そして HBW を決定することになる。

本論文で設定した入力データ(すなわち $d=1$ の関係)はGの局所的な情報しか与えないことより、最初より $\max l_i$ を予測することは不可能である。したがって $\max l_i$ を小さくさせる、すなわちグラフの幅の平均化法として今日以下のような方法がとられている。

- 1) 1度求めた等距離節点集合 $\{l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_j\}$ において $\max l_i$ に含まれる点を $\{l_{i-1}\}$ 、または $\{l_{i+1}\}$ に移し変え、 $\max l_i$ を減少せしめる。
- 2) 等距離節点集合の $\max l_i$ は $\{l_1\}$ 、あるいは $\{l_1, l_2\}$ といった starting vertices によりほぼ決定されるといっても過言ではない。これを考えれば、 $\{v|d(v_1, v) \leq 2\}$ 程度のいくつかの v よりの等距離節点集合を作り、比較して $\max l_i$ の最小値を探す。

このようにグラフの幅の平均化手法は、ある程度の困

難さを含むにしても、設計可能といえよう。

このグラフの幅の平均化は、いわゆるGの長手軸の端点より等距離節点集合を作ろうとすることにより発生する問題である。一方、前節での結果によれば、グラフの幅が半帯幅を決定する。したがって、もしグラフの幅を直接求めることができれば、本節で検討を加えた(1)、および(3)の手順は不必要となる。

ここで系の長手軸の両端点は境界上に設定された2点であると仮定する。この仮定は通常のFEM, FDMのモデルにおいては成り立つことより妥当なものである(ただし、この仮定の成り立たない場合も存在する⁽²⁾)。このようなモデルに対し、いま $\max l_i$ を最小にし得た状態、すなわち帯幅を最小にし得た状態を考えれば、等距離節点集合： $\{l_i\} (i=1, 2, \dots, \delta)$ の各 $\{l_i\}$ は少なくとも2個の境界上の点と、少なくとも1個の直径上の点を含んでいる。境界上の点集合を $g(0)$ で表現し、 $g(0)$ より

$$\{g(0), g(1), \dots, g(x), g(x+1)\} = \phi$$

を作れば、

$$g(x) \cap \{l_i\} \ni \phi$$

(ただし、 $\{l_i\}$ はグラフの幅を決定する縦点列)

したがって、 $\forall v_i \in g(x)$ より等距離節点集合

$$\{g'(0) = v_1, g'(1), \dots, g'(x')\}$$

(ただし、 $x' = x$, または $x+1$)

を作り、各 $g'(i)$ より2点ずつ選んで、それらを $\{v\}$ で示せば、

$$\max l_i \ni |\{v\}| \dots \dots \dots (14)$$

となり、 $\{v\}$ はGの幅の1つを与えることになる。

このように求まった $\{v\}$ をGより除けばGは分離グラフとなる。いま、この $\{v\}$ を $\{\bar{l}_i\}$ で表現し、各分離グラフに対し、 $\{\bar{l}_i\}$ より等距離節点集合

$$\{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_{i-1}, \bar{l}_i, \bar{l}_{i+1}, \dots, \bar{l}_{r'}\} \dots \dots \dots (15)$$

を作れば、Gのすべての点が $\{\bar{l}_i\} (i=1, 2, \dots, r')$ に含まれることになる。式(15)において、その最大値 $\max \{\bar{l}_i\} (i=1, 2, \dots, r')$ を求めることにより半帯幅は求まる。

$$HBW \ni \max \{\bar{l}_i\}, i=1, 2, \dots, r' \dots \dots \dots (16)$$

この方法において、もし対象系が外部境界のほかに内部境界、たとえば穴あき板のFEモデルにおける穴の存在、を有した場合、外部境界よりの等距離集合をきれいな形でとらえられない欠点を有する。しかしながら、 $\min HBW$ はグラフの幅を見出すことに等しいこと、また場に描かれた場合、内部境界は押しつぶされることより、内部境界の存在は無意味であることは自明である。したがって、内部境界を構成する点よりなる各部分グラフ g_b において、

$$d(v_i, v_j) = 1, \text{ただし、} \forall v_i, v_j \in g_b \dots \dots \dots (17)$$

の条件を与えれば、上述した方法は、このような系に対しても適用可能となる。式(17)は g_b を完全グラフに置き換えることを示している。このような内部境界を有する構造は、分岐を有しない構造とは本質的に異なり、文献9)によれば“メッシュ構造”に該当する。したがって、ここに提案した方法はこれら2種の構造に対し有効である。さらに、この新たな考え方は対象系が二次元であれ、三次元であれ有効であり、等距離節点集合だけを用いていることより、そのアルゴリズム設計は可能である。

4. 新たな帯幅減少アルゴリズムの提案

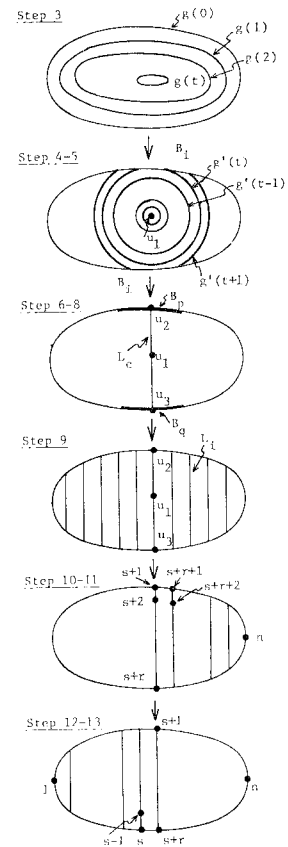


図-7 新しい帯幅減少法

前節の考察に基づく新たな帯幅減少法を提案する。なお、この方法の適用は、前節のアルゴリズム設計の可能性の検討で示されたように“分岐を有しないトリート構造”と“メッシュ構造”に限定される。

入力データは適当な連続番号をつけられたグラフの隣接関係と、外部境界上に位置する節点(ただし境界上の任意の1点より時計方向に1, 2, 3, ..., lと番号を与える)とする。ここでlは境界上の点個数である。

帯幅減少法は次のstepsより構成される(図-7参照)。

Renumbering Algorithm for Reducing the Bandwidth

[step 1]

境界の数が1ならば step 3へ。

[step 2]

他の境界(内部境界)上に位置する諸点間に付加的な隣接関係を各境界内に限って与える(以後、境界といえは外部境界を示す)。

[step 3]

境界上の節点集合を $g(0)$, $g(0)$ より $d=1$ にある点集合を $g(1)$, 以下同様にして $g(2), g(3), \dots, g(t)$ を作

る。

[step 4]

$g(t)$ 内の任意の1点 u_i を選ぶ。 u_i より等距離節点集合 $\{g'(0)=u_i, g'(1), g'(2), \dots, g'(t)\}$ を作る。ここで最初に境界上の点を含む集合が $g'(t)$ であり、もし、 u_i を含む $g(t)$ がメッシュグラフを構成していればさらに $g'(t-1)$ も求める。

[step 5]

$g'(t)$ ($g'(t+1)$) に含まれる境界上の点で、連結している点を要素とする集合 B_i を作る。一般に B_i の個数は3以上である ($i \geq 2$)。

[step 6]

$b \in B_i, b' \in B_j$ の b, b' は B_i, B_j に含まれる境界につけた節点番号を示すとして、集合 B_i, B_j 間の距離を $\max |b-b'|$ で定義する。 $\{B_i\}$ の中で最大距離をもつペアを B_p, B_q とする。

[step 7]

B_p, B_q に含まれる要素の中で、真中の節点番号をもつ境界上の節点をそれぞれ u_2, u_3 とする。

[step 8]

(u_2, u_1, u_3) を結ぶ最短パスを見出す。そのパス上に位置する節点集合を L_c で示し、center line とよぶ。

[step 9]

L_c より両側に等距離節点集合 $\{L_i\}$ を作る (このようにして作られた L_c は、いまGを縦方向に横切るとして話を進める)。

[step 10]

L_c 上の節点数を r , L_c より左側部分グラフ内に含まれる点数を s とする。ここで u_2 をGの上側の境界上の点、 u_3 を下側境界上の点とすると、 u_2 に番号 $s+1$ をつけ、 u_3 に向かって $s+2, s+3, \dots$ と順に番号づけを行い、 u_3 には番号 $s+r$ をつける。

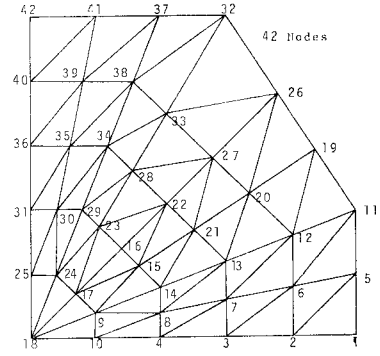
[step 11]

u_2 の左隣り (L_{c+1}) にある境界点に番号 $s+r+1$ をつける。節点番号 ($s+r+1$) の点に隣接する L_{c+1} の点が1個のとき、その点に $s+r-2$ を、多数ある場合には、それらの点に隣接する L_c 内の点の節点番号が小さいものから順に $s+r+2, s+r+3, \dots$ と番号をつける。同様にしてのすべての L_{c+1} ... 点に番号をつける。

[step 12]

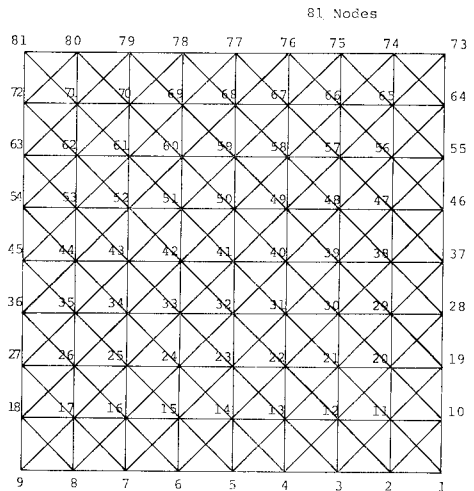
u_3 の左隣り (L_{c-1}) にある境界点に番号 s をつける。節点番号 s の点に隣接する点が1つのときはその点に $s-1$ を、多数あるときは、それらの点に隣接する節点 ($\in L_c$) の節点番号が大きいものから順に $s-1, s-2, \dots$ と番号をつける。同様にして、すべての L_{c-1} の点に番号をつける。

[step 13]



	PROPOSED METHOD	C-M METHOD
BANDWIDTH	9	11
TIME(sec.)	0.037	0.016

図-8 帯幅減少法の適用例

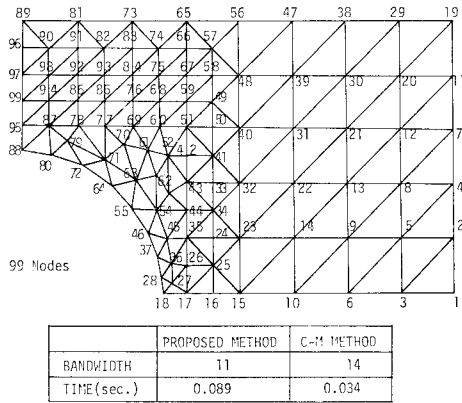


	PROPOSED METHOD	C-M METHOD
BANDWIDTH	10	19
TIME(sec.)	0.063	0.021

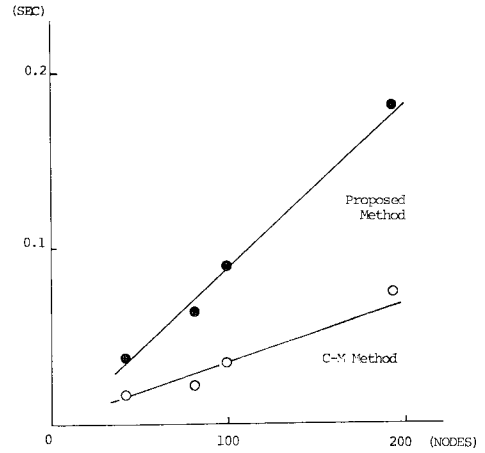
図-9 帯幅減少法の適用例

step 11, step 12 を繰り返してすべての節点に番号をつける。

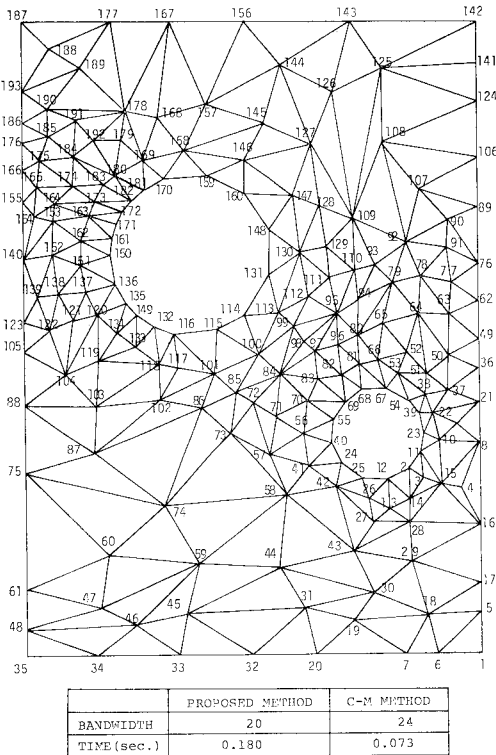
このアルゴリズムの適用例を 図-8~11 に示す。同時に、各例題に対し、今日最も有効と考えられ、よく利用されている Cuthill-McKee Algorithm を適用し、今回の手法との比較を行っている。ただし、Cuthill-McKee Algorithm の欠点は本論文で検討した長手軸の選択のプロセスにあることはすでに認められている⁵⁾ ことより、この欠点を補うべく長手軸の選定には Gibbs-Poole-Stockmeyer による Pseudo-diameter 決定法を利用している。なお、初めに与える仮節点番号は、まず境界 (2個以上ある場合は、最長の境界を選ぶ) 上に位置する節点に対し、任意の1点より時計方向に、“1”より連続番号を与え、その後、内部領域のすべての点に任意に節点番



図—10 帯幅減少法の適用例



図—12 節点数-演算時間の関係



図—11 帯幅減少法の適用例

号を与える．図—8～11において，本手法と，この修正 Cuthill-McKee Algorithm の結果を比較すると，

1) HBW の値は，明らかに本手法による結果の方がよく，最小，もしくは最小に近い値を与えている．たとえば，図—8 の結果は明らかに最小値である．さらに，この例題は，いわゆる長手軸を用いる従来のアルゴリズム (Cuthill-McKee Algorithm を含む) では，その最小化が非常に困難であることを示しているが，本手法によれば容易に最小値を与えることができる．

2) 演算時間に関しては，本手法は修正 Cuthill-Mc-

Kee Algorithm の 2～3 倍程度である．ただし，図中の C-M Algorithm 演算時間は Pseudo-diameter を求める時間を除いたものであることより，そのための時間を考慮すれば約 2 倍程度となる．さらに，修正 Cuthill-McKee Algorithm ではなく，Original Cuthill-McKee Algorithm を用いたとすれば，後者は前者の数倍程度の演算時間を要すると考えられることより⁵⁾，本手法と同程度となる．

巨大な系における帯幅値のわずかな増加は，まえがきにも述べたように，容量に関しては線形に，そして演算時間的には 2 乗で効くこと，また，これら諸例における実演算時間をみてもわかるように，データの前処理として不適当ではない程度の時間しか要していないこと，を考慮すれば本手法は十分実用に供し得るといえよう．なお，節点数を横軸に，演算時間を縦軸にして両手法の計算時間をプロットしてみると，図—12 に示すように両者ともに直線に載っている．このことも，両手法が十分実用に供し得る保証を与える．ただし，これら計算には京都大学大型計算機センター M 200 を使用した．

5. あとがき

本研究により得られたおもな成果は下記のようなものである．

(1) 最小帯幅問題をグラフ理論的に扱うことにより，最小半帯幅は，行列の示す“グラフの幅”であることが示された．

(2) 設計可能な帯幅最小化アルゴリズムには適用限界が存在する．すなわち，対象系をいわゆる“分岐のないトリー構造”と“メッシュ構造”に限定した場合に限り，有効なアルゴリズムの設計は可能であるが，いわゆる汎用的なアルゴリズム設計は不可能に近い．したがっ

て、今日存在するいかなるアルゴリズムも、上記2つの構造にしか適用できない。

(3) 従来の方法とはまったく異なる新たな帯幅減少法が提案できた。これは上記成果(1)および(2)に立脚するものであり、最小半帯幅を規定する“グラフの幅”を直接求めようとする点に最大の特徴を有すといえよう。この結果、従来最良と考えられている修正 Cuthill-McKee Algorithm より常に小さい半帯幅を求めることが可能となった。

したがって、数値解析において帯行列法を有効に利用しようとするならば、対象構造を“分岐のないトリー構造”もしくは“メッシュ構造”に限定して初めてそれが可能となる。なぜならば、適用を限定して初めて帯行列法のためのデータ前処理としての Automatic Renumbering が可能となり、それにより、数値計算法としての帯行列法の要求する容量、演算時間が節約・低減され得るからである。また、“分岐を有するトリー構造”系はあえて帯行列法で解いてはならず、たとえばプロフィール法等を用いるべきであろう⁹⁾。

残された問題として、系が与えられたとき、それが分岐を有するのか、そうでないのかを判定する方法の開発が挙げられる。文献9)において1つの判断法が与えられているが、数値解析の全自動化を目的とするならば、Automatic Judging 法の開発が待たれる。また、“分岐を有するトリー構造”系を有効に解析するため、プロフィール法の Renumbering 法の確立も同時に望まれ、これらが解決して初めて文献9)に示された有効な数値計算の流れ：系→計算法の選択→Renumbering→数値計算→解の自動化が完成する。

参 考 文 献

1) 成岡昌夫・中村恒善共編：骨組構造解析法要覧，第2章，

(日本鋼構造協会)，培風館，pp. 22~50, 1976.

- 2) Bunch, J.R. : Analysis of Sparse Elimination, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 11, No. 5, pp. 847~873, October, 1974.
- 3) Cuthill, E. and J. McKee : Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices, Proc. of ACM National Conference, pp. 157~172, 1969.
- 4) Cheng, K.Y. : Minimizing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices, Computing 11, pp. 103~110, 1973.
- 5) Gibbs, N.E., W.G. Poole Jr. and P.K. Stockmeyer : An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 13, No. 2, pp. 236~250, 1976.
- 6) Papadimitriou, ch. H. : The NP-Completeness of the Bandwidth Minimization Problem, Computing 16, pp. 263~270, 1976.
- 7) Aho, A.V., J.E. Hopcroft and J.D. Ullman : The Design and Analysis of Computer Algorithms, Chapter 10, Addison-Wesley Publishing Company, pp. 364~404, 1974.
- 8) Sahni, S. and T. Gonzales : P-Complete Problems and Approximate Solutions, 15th Annual Symposium on Switching and Automata Theory, pp. 47~63, 1974.
- 9) 白石成人・谷口健男：マトリックス構造解析に対するグラフ理論による一考察，土木学会論文報告集，第294号，pp. 15~24, 1980.
- 10) Konishi, I., N. Shiraiishi and T. Taniguchi : Reducing the Bandwidth of Structural Stiffness Matrices, Journal of Structural Mechanics, Vol. 4, No. 2, pp. 197~226, 1976.
- 11) たとえば，J. Alan George : Solution of Linear Systems of Equations : Direct Methods for Finite Element Problems, Sparse Matrix Techniques, Lecture Notes in Mathematics, 572 (Edited by A. Dold and B. Eckman), Springer-Verlag, pp. 52~101, 1976.
- 12) Taniguchi, T. : Application of Topology to the Bandwidth Reduction Method of Structural Stiffness Matrix, Dr. Thesis (Kyoto University), pp. 127~170, 1974.

(1980.5.6・受付)