

はりの非線形振動に関する実験的補足

EXPERIMENTAL SUPPLEMENTS FOR NONLINEAR
VIBRATIONS OF BEAMS

高橋 和 雄*

By Kazuo TAKAHASHI

1. 緒 言

著者は文献 1) においてはりおよび薄板などの連続体の非線形振動を対象として Galerkin 法を用いて多自由度系に置換する解法の収束性と安定性を吟味した。引き続き、本論文は同じ解法によるはりの非線形振動の解析値の精度を検討するために非線形振動実験を実施し、実験値との比較を行うものである。従来のはりの非線形振動に関する研究は振動系を特定の基準座標を用いた 1 自由度系と仮定する解法がほとんどである。このために、非線形自由振動の振動数と振幅との関係、振幅に伴う振動形の変動および周期的変動荷重が作用する場合の非線形応答特性に関して、多自由度系としての解析値と実験値との定量的比較はいまだなされていない。そこで、本論文は振幅によって振動形が変化する両端固定はりを対象に非線形振動の解析値と実験値との比較を行った結果を報告するものである。

2. 非線形振動実験

(1) 実験装置

図-1 に示すように材質ジュラルミン製はり（有効長さ 30 cm, 幅 30 mm, 厚さ 1 mm, 単位体積質量 $w = 2.85 \times 10^{-3}$ kg/cm³, ヤング率 $E = 0.71 \times 10^6$ kg/cm² (6.96×10^8 N/cm²)) を両端で曲げおよび軸方向変位に対して固定条件を満足するように M-12 のボルト 6 本を用いて鉄製の治具に固定し、支持枠全体を図-2 に示すように振動台上に振動方向と直角に設置した。振動実験は図-2 のブロックダイアグラムを用いて実施された。試験片は定尺 (900 × 1800 mm) のジュラルミン板から 50 本程度切り出し、このうちなるべく初期たわみの少ないもの

* 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科

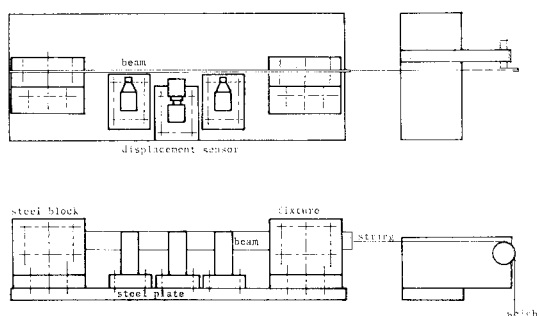


図-1 実験模型および支持枠

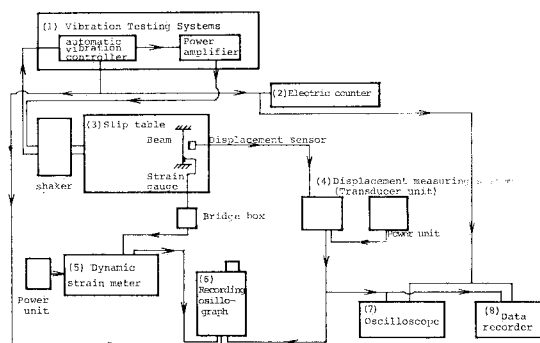


図-2 非線形振動実験のブロックダイアグラム

を選んで本実験に使用した。はりの材質であるジュラルミンの線膨張係数は、鉄の 2 倍以上の $23 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ である。したがって、ジュラルミンは熱に対して不利であるために熱対策に十分な配慮が必要であることが判明した。このために、加振機の空冷ブロー部から出る熱気を実験室外に排除するとともに、気温の変動が少ない冬の深夜の時間帯を選んで実験を行った。また、はりに初期軸力が作用できるように設計されている。軸力は、はりに鉄製のブロックを吊るして与えられた。

(2) 実験方法

図-2 のブロックダイアグラムに従ってはりの非線形

定常強制振動および自由振動実験を行った。まず、定常強制振動実験については加振力を一定にするために一定の加速度で振動台をコントロールしながら往復の自動掃引実験を行った。はりの中央点および4分の1点に設置された変位計センサーにより、はりの振動の相対変位を検出し、データレコーダーに入力の加速度波形とともに記録した。中央点のセンサーではりの振幅と振動数との関係を求め、4分の1点のセンサーで逆対称振動をモニターするとともに、中央点の変位の比によって振幅に伴う振動形の変動を求めた。

以上によって得られたはりの中央点の動的変位 y をはりの回転半径 $r=D/\sqrt{12}$ (D : はりの厚さ) で無次元化 ($A=y/r$) し、また、加振振動数 f を微小振動実験から測定した1次対称振動の固有振動数 f_1 で無次元化 ($\bar{\omega}=f/f_1$) して、振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係を求めた。

次に、非線形自由振動を求めるために定常加振状態の振動台を急停止させた後の非線形自由振動をデータレコーダーに記録した。次にこのデータをデータレコーダーのスピードを落としてオシログラフペーパー上に出力した。はりの中央点および4分の1点の自由振動の時間的変動の一例を示せば、図-3のとおりである。図-3から中央点の各振幅比に対応する振動数 f を読み取った。これらを振幅比 A が0.1以下の微小振動に達したとき ($A \approx 0$) の振動数 f_1 で割った値から非線形自由振動数の振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係が得られた。

3. 結果および考察

以上の実験法および文献1)の解析法を用いて両端固定はりの非線形振動挙動を検討する。

(1) 振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係

初期軸力 P_0 が作用しない場合 ($P_0=0$) について、両端固定はりの非線形自由振動の振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係を示せば表-1のとおりである。表において(a), (b) および (c) 欄はそれぞれ多自由度系としての解析値¹⁾、偏微分方程式の差分法による digital simulation 結果²⁾ および実験値を示すものである。なお、表-1において、振幅比 $A=0$ は $A \approx 0$ となる微小振動の場合に対応するものである。以上の(a), (b) および (c) の結果はいずれも合致しており、振動数比については文献1)のような解析法で十分に予測可能なことが確認される。はり部材に作用する初期軸力 P_0 が非線形自由振動数に及ぼす影響を検討するために、図-4に振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係を初期軸力比 \bar{P}_0 (初期軸力 P_0 /

表-1 振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係

(a) analytical solution, (b) finite-difference solution, (c) experimental result

| A | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (a) | 1.0000 | 1.0222 | 1.0854 | 1.1824 | 1.3049 | 1.4468 | 1.6046 | 1.7771 | 1.9672 |
| (b) | 1.000 | 1.022 | 1.085 | 1.182 | 1.305 | 1.447 | 1.559 | 1.774 | 1.967 |
| (c) | 1.00 | 1.01 | 1.08 | 1.18 | 1.27 | 1.40 | 1.52 | 1.74 | 1.95 |

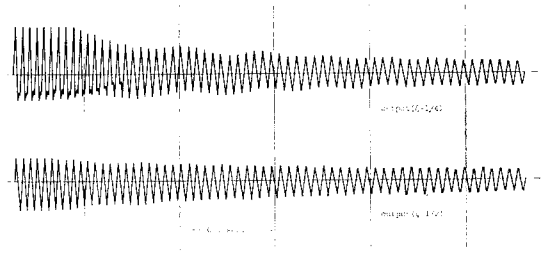
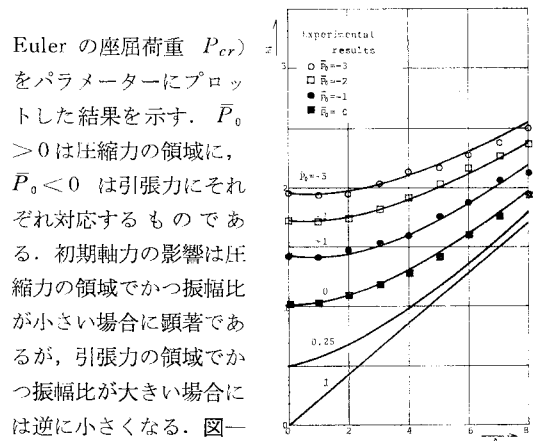


図-3 非線形自由振動の時間的変動



Eulerの屈曲荷重 P_{cr})をパラメーターにプロットした結果を示す。 $\bar{P}_0 > 0$ は圧縮力の領域に、 $\bar{P}_0 < 0$ は引張力にそれぞれ対応するものである。初期軸力の影響は圧縮力の領域でかつ振幅比が小さい場合に顕著であるが、引張力の領域でかつ振幅比が大きい場合には逆に小さくなる。図-4には実験値をプロットしているが、理論値とよく一致している。

図-4 非線形自由振動の振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係

(2) 振幅による振動形の変動

図-5は初期軸力比 $\bar{P}_0=0$ に対するはりの4分の1点の振幅と中央点の振幅の比 Y と振幅比 A との関係をプロットしたものである。図のように Y は振幅比 A とともに増大する。なお、図中の■印は非線形自由振動実験から求めたものである。振幅に伴う振動形の変化は実験値

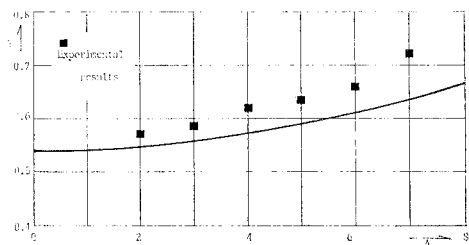


図-5 振幅に伴う振動形の変動

とよく対応している。なお、実験値において、振幅比 A が小さい場合には読み取りが無理であるために $A=0, 1$ は省略されている。また、振幅比が大きい領域で実験値と解析値との差が大きくなっている。この原因は後述のように図-3 に示した4分の1点の振幅が大きい2次逆対称振動の2倍の高調波振動がこの領域で生じているためである。

(3) 非線形定常強制振動

初期軸力比 $\bar{P}_0=0$ に対して周期的変動荷重の分布強度 $\bar{p}=128$ (加振加速度 $1g$) の場合の加振振動数比 $\bar{\omega}$ (加振振動数/1次対称固有振動数) と応答振幅 A (はりの中央点の最大振幅/回転半径) の関係をプロットすれば図-6 に示すとおりである。図中において肉太の実線は荷重の時間関数と同位相の非線形応答の解析値に、点線は逆位相の解析値にそれぞれ対応するものである。なお、本計算に用いた自由度は3で、5倍の高調波成分まで採用している。応答振幅に付した記号 a_n^i は n 次振動形の i 倍の高調波応答 ($i \geq 1$) または i 倍の分数調波応答 ($i < 1$) を意味するものである(文献1)の式(22)参照)。図中において $\bar{\omega}=1.0$ 付近に生ずる共振は加振振動数と同じ応答振動数が卓越する1次対称振動の主共振 (a_1^1) である。 $\bar{\omega}=0.2$ および 0.33 付近で調和応答に付随して連続的に生ずる共振は加振振動数の5倍および3倍の振動が卓越する1次振動の5倍 (a_1^5) および3倍の高調波共振 (a_1^3) である。 $\bar{\omega}=1.8$ および 2.65 付近の共振は3次対称振動の3倍 (a_3^3) および5次対称振動の5倍 (a_5^5) の高調波共振である。また、 $\bar{\omega}=1.15$ 付近で主共振の同位相の振幅が不連続となっているが、これは3次対称振動の5倍の高調波成分 (a_5^3) と1次振動の基本波の荷重と同位相成分 (a_1^1) が内部共振を生ずるためである。 $\bar{\omega}=3.0$ 付近に分岐的に生ずる共振は1次振動の3分の1の分数調波共振 ($a_1^{1/3}$) である。なお、 $\bar{\omega}=1.0$ 付近に示した細い実線と破線は対応する線形振動の主共振である。線形振動の場合、図の振動数領域で生ずる唯一の共振である。

図中において、印は掃引振動数を増加させた場合の実験値を、×印は掃引振動数を減少させた場合の実験値をそれぞれ示すものである。また、図中の矢印は実験で得られた振幅のジャンプ現象の方向を示すものである。

a) 主共振

図-6 の振動数領域では図-7 (a) に示すような波形をもつ1次振動の調和応答が生ずるが、 $\bar{\omega}=1.0$ 付近の振幅比と振動数比との関係が非線形領域に入る主共振をはじめ広い振動数領域にわたって応答振幅の解析値は実

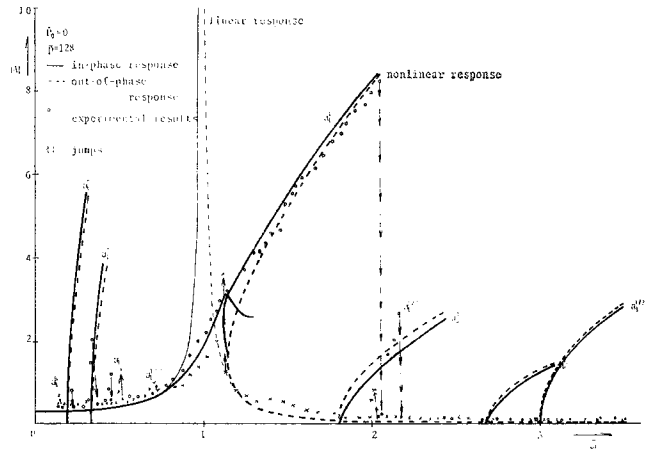
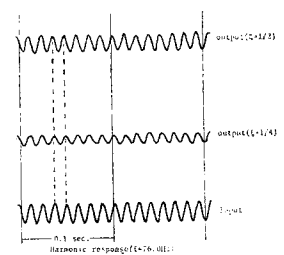


図-6 非線形定常強制振動の応答曲線 ($\bar{P}_0=0, \bar{p}=128$)

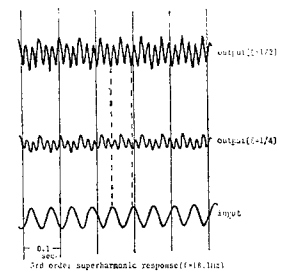
験値とよく一致している。解析値は減衰を含まないために共振時の振幅は無限大となるが、実験では減衰を含むために振幅の大きさは有限となる。このために、文献1)の安定判別結果から予測されるように、応答振幅が鉛直接線をもつ位置で過渡現象であるジャンプ現象が生じている。

b) 高調波共振

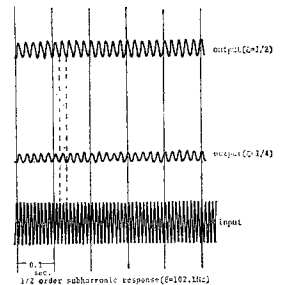
図-6 に示したように $\bar{\omega} < 1.0$ の領域で、1次振動の振動形をもつ高調波共振が生ずる。すなわち、 n 倍の高調波共振は $\bar{\omega} \approx 1/n$ 付近で生ずる。実験で得られた高調波共振の一覧表を示せば表-2 のとおりである。また、波形の一例が図-7 (b) に示されている。これらの高調波共振のうち、3倍の高調波共振が卓越している。解析値は理想的な直線はりに対する結果であるために、3



(a)



(b)



(c)

図-7 非線形振動の各種の共振波形

倍および5倍の奇数次の高調波共振のみが求められているが、実験では6, 4, 2倍の偶数次および3/2倍の非整数次の高調波共振が含まれている。直線はりの非線形振

表一 高調波・分数調波共振の一覧表

| order | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 3/2 | 1/2 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| up | | | 0.22 | 0.38 | 0.46 | | 2.17 |
| down | 0.15 | 0.23 | 0.25 | 0.35 | 0.51 | 0.71 | 2.02 |

表一 2 次逆対称振動の不安定領域の一覧表

| | | 1st. | 2nd | 3rd |
|------|-------|-----------|-----------|-----------|
| up | calc. | 2.757 | 1.71-1.94 | 0.974 |
| | exp. | 2.26-2.33 | 1.39-1.78 | 0.94-1.04 |
| down | calc. | 2.757 | 1.392 | 0.974 |
| | exp. | 2.35-2.23 | 1.24-1.22 | 0.87-0.84 |

動問題では復元力に 3 次の非線形項が含まれるために 3, 5 倍などの奇数次の項のみが生ずるはずである。この矛盾ははりにわずかに存在する初期たわみによる 2 次の非線形項に起因するものと考えられる。

3 次対称振動の高調波共振が 1 次固有振動数の領域で生ずる。本シリーズの実験では掃引振動数上昇時に $\bar{\omega} = 1.05$ および 1.3 付近で 3 次振動の 5 倍および 4 倍の高調波共振が現われた。

c) 分数調波共振

本例の実験では 図一7 (c) に示すような 1 次振動の 2 分の 1 の分数調波共振が現われ、かなり大きな振幅に成長している。解析では $\bar{\omega} = 3.0$ 付近から 1 次振動の 3 分の 1 の分数調波共振が現われる。この分数調波共振は高調波共振の場合とは異なって分岐型の応答であるために常に現われるとは限らない応答である。このために、本例では 3 分の 1 の分数調波共振は生じていない。

d) 2 次逆対称振動

本例の実験模型の構造および荷重ははりの中央に対して対称であるから、はりの動的応答も通常対称であるはずである。しかし、図一3 の波形にみられるように主共振の振幅比が大きい領域で 4 分の 1 点の変位が卓越する 2 次逆対称振動が生ずる。この自由度の振動形は直接加振されないが、非線形連成項を介して対称振動によって係数励振不安定振動が生ずるものである。

Hill の方程式で表わされる運動方程式を解いて、2 次逆対称振動が生ずる振動数領域を求めれば 表一3 に示すとおりである。第 1, 2 および 3 の不安定領域は 2 次固有振動数 $\bar{\omega} = 2.757$ の 1, 1/2 および 1/3 付近で生じている。現象的には 2 次振動の主, 2 および 3 倍の高調波共振と同じものである。これらの不安定振動のうち、 $\bar{\omega} = 1.71 \sim 1.94$ で生ずる第 2 不安定領域は広く、定常的

に生ずるものである。4 分の 1 点の応答をバンドパスフィルターにかけて 2 次振動成分のみを取り出して得られた不安定領域の実験値が 表一3 に併記されている。実験においても解析値と同じ第 1, 2 および 3 不安定領域が得られている。解析値と実験値と比較すると実験値の方が不安定領域の幅が広い。

4. 結 語

本研究ははりの非線形振動の実験値と解析値とを比較したものである。得られた結果を要約すると、

(1) 非線形自由振動については解析値, digital simulation 結果および実験値の三者が一致する。

(2) はりの振動形は振幅によって生ずる軸力のために振幅とともに変動して弦の振動形に近づく。この振動形の変動は実験からも確認された。

(3) 定常強制振動の解析によって主共振, 奇数次の高調波共振および分数調波共振が得られた。応答振幅と加振振動数との関係は解析値と実験値とがよく一致する。理論では奇数次の高調波および分数調波共振のみが得られたが、実験ではこのほかにははりの初期たわみによると考えられる偶数次の高調波および分数調波共振が得られた。また実験では振幅がジャンプする過渡現象が生ずるが、その位置は解析の応答振幅が鉛直接線をもつ位置と合致する。

(4) 実験によって特定の振動数領域で直接加振されない 2 次逆対称振動の不安定振動が得られた。多自由度系の振動系特有の Hill の方程式で表わされる係数励振不安定振動であるとみなした解析値と同じ不安定振動が実験によって得られた。

最後に本研究の一部は昭和 53, 54 年度の文部省科研費によったことを記して謝意を表するものである。本研究の数値計算には九州大学大型計算機センターの M-190 を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による解析の収束性および安定性について，土木学会論文報告集，第 293 号，pp. 9~22，昭和 55 年 1 月。
(1980.6.11・受付)