

定常状態における直交異方性弾性スラブの熱応力解析

STATIONARY THERMAL STRESSES IN ORTHOTROPIC ELASTIC SLABS

石川清志*・夏目正太郎**・谷本勉之助***

By Kiyoshi ISHIKAWA, Shotaro NATSUME and Bemnosuke TANIMOTO

1. ま え が き

熱弾性解析の問題は古くから数多くの人々により研究されてきている。その基礎理論は十分に確立され、工學上多くの問題に応用されている。

定常状態における熱弾性解析は Boley-Weiner¹⁾、Nowacki²⁾、Parkus³⁾ の研究に代表されるように、応力関数、変位関数、熱弾性ポテンシャルなどを仲介にして解く多くの解法が考えられている。今日において、これらの関数を利用する解法は非常に進んでおり、その優れた解析理論から広範囲に応用され、重要な役割を果たしてきている。

無限・半無限弾性体の熱応力問題について数多くの研究がなされている。Baker⁵⁾ は直交異方性体について、Fourier 変換による複素応力ポテンシャルを用いた Airy 応力関数解析、横等方性体、あるいは直交異方性体について Sharma⁴⁾、Tauchert-Aköz^{6), 8)} は変位で表わされた熱弾性方程式 (Navier の式) から出発し、その変位解を変位ポテンシャルによって表わした変位関数解析、さらに、より一般化された異方性体については等角写像と Cauchy の積分方程式によって、複素変数の2つの解析関数を決定する複素関数解析^{7), 9)} がある。

熱弾性問題は温度場が与えられると、変位で表わした熱弾性方程式を変位について解けば解決される。しかし、このことは特別な場合を除いて一般に容易でない。解法を簡単にするために、いくつかのポテンシャルを導入した、変位を未知関数とした変位関数解析がある。この変位関数についてはよく研究されており、数学的にも簡単な種類のもので表示されている。変位ポテンシャルを導入した熱弾性問題の解法は、変位で表わされた熱弾

性方程式を直接解くことなく、調和方程式あるいは重調和方程式の解をもとにして、変位ポテンシャルを媒介することによって、熱弾性方程式を満足させようとするのが特徴である。

また、Goodier によって導入された熱弾性ポテンシャルによる変位関数解析がある。これは熱弾性方程式を直接解く代わりに、変位に関して熱弾性ポテンシャルというひとつの新しい関数を利用することにより熱弾性問題を等温弾性問題に置き換えてしまう方法である。熱弾性ポテンシャルは変位や応力の境界条件と無関係に、ポテンシャル理論より定められることが特徴である。しかしながら、得られた熱弾性ポテンシャルを用いて、変位や応力を求めると、境界上で定められた境界値をとることは一般にない。これは熱弾性ポテンシャルが変位や応力の境界条件にかかわらず、熱弾性方程式の特殊解として得られるため、一般に境界条件を満足しない。そのため、一般解を得るためには、別に等温弾性問題を解いて、境界条件が満足されるように解を重ね合わせによって調整しなければならない⁴⁾。

本研究は、物体力のない定常熱弾性問題における一解析方法について論ずるものである。無限帯スラブの表面境界に温度荷重が作用することによって生じるスラブ内の温度、変位、および応力の解法は無限の状態においてよく知られた Fourier 積分により誘導したものである。スラブの材料特性は熱伝導、力学的に直交異方性体とし、平面ひずみ状態の2次元熱弾性問題である。

本解析法は、ポテンシャル論あるいは積分変換をいっさい用いずに、変位で表わされた熱弾性方程式 (Navier の式) を直接解き、これを満足する変位の一般解を誘導し、変位を未知数とした変位関数の解析である。この変位の一般解の誘導過程は、われわれが最も主眼をおいたところであり、前述のポテンシャルを導入した変位関数の解析とまったく異質な方法で表わし、連立非同次方程式で表わされる熱弾性方程式の一般解の誘導を明らかに

* 正会員 信州大学技官 工学部土木工学科

** 正会員 信州大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 理博 金沢工業大学教授 土木工学科

した。

この中で、熱弾性方程式は線形の非同次方程式であるから、重ね合わせの原理が有効で、その一般解は非同次方程式の特殊解と、温度項を零とした同次方程式の同次解の和で表わすものとし、それぞれ別々に誘導した。特に、同次解の誘導について、連立性を消去した変位についての微分方程式は同次方程式の微分演算子の行列式で表わし¹⁰⁾、この微分方程式の解をもとにして、同次方程式が満足する同次解を誘導した。また、特殊解については、熱伝導方程式を満足する温度場の影響を考慮して、非同次方程式を満足する特殊解を誘導した。そして、変位、応力に関係した境界条件により、一般解に含まれた未定定数を決定し、熱弾性問題が解決される一連の解析過程を示した。

最後に、本解析法の妥当性をみるために、Tauchert-Ak82⁹⁾が変位ポテンシャルを導入して研究報告した熱応力について数値計算を行い、この結果、研究報告されたものとまったく同じ熱応力の分布形態を得、本解析法の正確性が確認された。

2. 温度場

準静的熱弾性問題の場合、スラブ内の温度 $T(x, y)$ は、それによって生じる応力、ひずみと無関係に決められる。定常で熱源のない温度場に対して $T(x, y)$ は次式の熱伝導方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad k^2 = \frac{k_y}{k_x} \quad (1)$$

k_x, k_y は直交異方性体スラブの座標 x, y に関する熱伝導係数である。いま、 x に関して無限、 y に関して幅 $2h$ の有限帯スラブとすると、式 (1) の解は次式の Fourier 積分に表わされる。

$$T(\xi, \eta) = \int_0^\infty \left[\cosh \frac{p}{k} \eta \sinh \frac{p}{k} \eta \right] \mathbf{I}(p) \begin{bmatrix} \cos p\xi \\ \sin p\xi \end{bmatrix} dp \quad (2)$$

ξ, η は x, y を h の比で表わされる無次元座標 $\xi = x/h$ ($-\infty < \xi < \infty$)、 $\eta = y/h$ ($-1 < \eta < 1$) である。 $\mathbf{I}(p)$ は Fourier 積分演算子 p に従属した 2 行 2 列 (2-by-2) のマトリックスで表示される未定定数である。

$$\mathbf{I}(p) = \begin{bmatrix} I_1(p) & I_2(p) \\ I_3(p) & I_4(p) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここに、マトリックス記号 $[\dots]$ は行マトリックス、 $[\dots]$ は列マトリックスである。

$\mathbf{I}(p)$ はスラブの表面 ($\eta = \pm 1$) における温度の境界条件が与えられると決定される。たとえば、温度の境界条件は次式のものとする。

$$\left. \begin{aligned} T(\xi, 1) &= f(\xi) \\ T(\xi, -1) &= g(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$f(\xi), g(\xi)$ は温度荷重である。 $f(\xi), g(\xi)$ を Fourier 積分にて表わすと

$$\begin{bmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \mathbf{k}(p) \begin{bmatrix} \cos p\xi \\ \sin p\xi \end{bmatrix} dp \quad (5)$$

$\mathbf{k}(p)$ は (2-by-2) の Fourier 積分係数であり、次式に得られる。

$$\mathbf{k}(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \begin{bmatrix} f(\xi') \\ g(\xi') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos p\xi' \\ \sin p\xi' \end{bmatrix} d\xi' \quad (6)$$

式 (2), (5) を式 (4) に代入すると、 $\mathbf{I}(p)$ は次式に決定される。

$$\mathbf{I}(p) = \frac{1}{2 \cosh \frac{p}{k} \sinh \frac{p}{k}} \begin{bmatrix} \sinh \frac{p}{k} & \sinh \frac{p}{k} \\ \cosh \frac{p}{k} & -\cosh \frac{p}{k} \end{bmatrix} \mathbf{k}(p) \quad (7)$$

$\mathbf{I}(p)$ が決定されたことにより、温度の境界条件を満足するスラブ内の温度は式 (2) によって完全に把握することができる。

3. 熱弾性方程式

2次元弾性問題において、平面ひずみ状態にある場合は次式に定義される。

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad (8 \cdot a)$$

u, v, w はそれぞれ座標 x, y, z に関する変位である。平面ひずみ状態における直交異方性体の応力とひずみ、ひずみと変位の関係は次式に表わされる¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} T(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (8 \cdot b)$$

\mathbf{V} は直応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ およびせん断応力 τ_{xy} から構成される応力ベクトル、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は直ひずみ、 γ_{xy} はせん断ひずみ、 $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{44}$ は弾性係数、 α_1, α_2 は線膨張係数である。

式 (8・b) の第 1 式から、単位体積当たりのひずみエネルギー U_0 はひずみ成分で表わすと

$$2U_0 = A_{11}\varepsilon_x^2 + 2A_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + A_{22}\varepsilon_y^2 + A_{44}\gamma_{xy}^2 \quad (8 \cdot c)$$

または、応力成分で U_0 を表わすと

$$2U_0 = \frac{1}{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)A_{44}} [A_{22}A_{44}\sigma_x^2 - 2A_{12}A_{44}\sigma_x\sigma_y]$$

$$+A_{11}A_{44}\sigma_y^2+(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)\tau_{xy}^2]\cdots(8\cdot d)$$

力学的に弾性体の変形状態が安定なためには、ひずみあるいは応力成分がすべて零のときを除いて、 U_0 は常に正值 ($U_0 > 0$) になるべきである。したがって式 (8・d) を正值 2 次形式に書き換えると

$$2U_0 = \frac{1}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} \left[A_{22} \left(\sigma_x - \frac{A_{12}}{A_{22}} \sigma_y \right)^2 + \frac{1}{A_{22}} (A_{11}A_{22}-A_{12}^2) \sigma_y^2 \right] + \frac{1}{A_{44}} \tau_{xy}^2$$

これより $U_0 > 0$ になるためには弾性係数間で

$$A_{22} > 0, A_{11} > \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, A_{44} > 0 \cdots \cdots (8\cdot e)$$

の関係をとらねばならない。当然のことながら A_{11} は正の値である。式 (8・b) の 2 式より、ひずみ成分を消去すると、 V は変位成分で表わされる。

$$V = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{\partial}{\partial x} & A_{12} \frac{\partial}{\partial y} \\ A_{12} \frac{\partial}{\partial x} & A_{22} \frac{\partial}{\partial y} \\ A_{31} \frac{\partial}{\partial x} & A_{32} \frac{\partial}{\partial y} \\ A_{44} \frac{\partial}{\partial y} & A_{44} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{bmatrix} T(x, y) \cdots \cdots (9)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は熱弾性係数であり、 α_1, α_2 との関係は次式に示す。

$$\beta_1 = \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12}, \beta_2 = \alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22}, \\ \beta_3 = \alpha_1 A_{31} + \alpha_2 A_{32}$$

2次元弾性問題における応力平衡方程式は次式に表わされる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = 0 \cdots \cdots (10)$$

式 (9), (10) から、定常状態における熱弾性方程式は変位で表わされる連立非同次方程式に表示される。

$$\Delta U = \phi T(\xi, \eta) \cdots \cdots (11)$$

Δ, ϕ は微分演算子である。

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, (A_{12} + A_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ (A_{12} + A_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, A_{44} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{bmatrix} \\ \phi = h \begin{bmatrix} \beta_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \beta_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdots \cdots (12)$$

U は変位 $u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)$ からなる変位ベクトルである。

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdots \cdots (13)$$

式 (11) が満足される解 U を求める。解 U は式 (11) の同次方程式の同次解 U_h と特殊解 U_p の和で表わされるものと仮定する。

$$U = U_h + U_p \cdots \cdots (14)$$

$$U_h = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_h, U_p = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_p \cdots \cdots (15)$$

すなわち、 U_h および U_p は次式を満足する解である¹²⁾。

$$\Delta U_h = 0 \cdots \cdots (16)$$

$$\Delta U_p = \phi T(\xi, \eta) \cdots \cdots (17)$$

4. 同次解の誘導

式 (16) は u_h, v_h による連立変位方程式である。これより連立性を消去した u_h, v_h のそれぞれ独立した微分方程式は、次式の微分演算子 Δ の行列式に表わされる¹⁰⁾。

$$\left. \begin{matrix} \det \Delta u_h = 0 \\ \det \Delta v_h = 0 \end{matrix} \right\} \cdots \cdots (18\cdot a)$$

すなわち、これらは u_h, v_h についてまったく同じ 4 階の微分方程式となる。

$$\left. \begin{matrix} \left[A_{11}A_{44} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + (A_{11}A_{22} - 2A_{12}A_{44} - A_{12}^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right. \\ \left. + A_{22}A_{44} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] u_h = 0 \\ \left[A_{11}A_{44} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + (A_{11}A_{22} - 2A_{12}A_{44} - A_{12}^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right. \\ \left. + A_{22}A_{44} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] v_h = 0 \end{matrix} \right\} \cdots \cdots (18\cdot b)$$

いま、 F を任意の関数として、 $(u, v)_h = F(\varphi), \varphi = i\xi + \kappa\eta$ ($i^2 = -1$) とおくと、式 (18・b) の特性方程式は複 2 次方程式

$$A_{22}A_{44}\kappa^4 - (A_{11}A_{22} - 2A_{12}A_{44} - A_{12}^2)\kappa^2 + A_{11}A_{44} = 0 \cdots \cdots (19)$$

に表わされる。Lekhnitskii が式 (8・d) のひずみエネルギー式を用いて、この特性方程式の特性根の性質を調べた結果、この特性方程式には純虚数根が存在しないことを証明している^{17), 18)}。また、式 (19) の 4 個の独立弾性係数を工学上よく用いられている常用弾性係数¹⁹⁾

$$\left. \begin{matrix} A_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \\ A_{12} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} = \frac{\nu_x E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (\nu_y E_x = \nu_x E_y) \\ A_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}, \quad A_{44} = G_{xy} \end{matrix} \right\}$$

に置き換えて、式 (19) を調べると、これは直交異方性体 2次元弾性問題における応力関数の特性方程式と合致する¹⁷⁾。ここに、 E_x, E_y はそれぞれ x, y 軸方向の縦弾性係数、 ν_x, ν_y はポアソン比、 G_{xy} はせん断弾性係

数である。

式 (19) において、式 (8・e) のひずみエネルギー正値の条件を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{\frac{(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12})[\sqrt{A_{11}A_{22}} + (A_{12} + 2A_{44})]}{4A_{22}A_{44}}} \\ \nu_2 &= \sqrt{\frac{(\sqrt{A_{11}A_{22}} + A_{12})[\sqrt{A_{11}A_{22}} - (A_{12} + 2A_{44})]}{4A_{22}A_{44}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot a)$$

とおくと、式 (19) を満足する特性根 κ は次式に表わされる。

$$\kappa = \pm(\nu_1 + \nu_2), \pm(\nu_1 - \nu_2) \dots\dots\dots(20 \cdot b)$$

したがって、4個の独立弾性係数間で理論的に取り得る κ は次の3通りに分けられる^{(17), (20)}。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad A_{44} < \frac{1}{2}(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12}) : \text{等根でない実数根} \\ \kappa &= \pm\alpha, \pm\beta \quad (\alpha = \nu_1 + \nu_2, \beta = \nu_1 - \nu_2) \\ \text{(ii)} \quad A_{44} = \frac{1}{2}(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12}) : \text{等根で実数根 (準等方性体}^{20)}) \\ \kappa &= \pm\alpha \quad (\alpha = \nu_1, \nu_2 = 0) \\ \text{(iii)} \quad A_{44} > \frac{1}{2}(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12}) : \text{複素根} \\ \kappa &= \pm(\alpha + i\beta), \pm(\alpha - i\beta) \\ \left(\begin{aligned} \alpha &= \nu_1 \\ \beta &= \sqrt{\frac{(\sqrt{A_{11}A_{22}} + A_{12})[\sqrt{A_{11}A_{22}} - (A_{12} + 2A_{44})]}{4A_{22}A_{44}}} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

上記3通りの場合を示したが、直交異方性材については (i) または (ii) の場合であるのが普通であるといわれている²⁰⁾。

以後は、(i) $A_{44} < \frac{1}{2}(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12})$ の場合について解析を進める。

いま、スラブは ξ に関して無限、 η に関して有限な境界をとることから、これらの状態を表示し得る式 (18・b) の解 u_h, v_h は次式の Fourier 積分に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_h &= \int_0^\infty \left[\cosh \alpha p \eta \sinh \alpha p \eta \cosh \beta p \eta \sinh \beta p \eta \right] \\ &\quad \times N(p) \begin{bmatrix} \cos p \xi \\ \sin p \xi \end{bmatrix} dp \\ v_h &= \int_0^\infty \left[\sinh \alpha p \eta \cosh \alpha p \eta \sinh \beta p \eta \cosh \beta p \eta \right] \\ &\quad \times N'(p) \begin{bmatrix} \sin p \xi \\ -\cos p \xi \end{bmatrix} dp \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22 \cdot a)$$

$N(p), N'(p)$ は、Fourier 積分演算子 p に従属した (4-by-2) のマトリックスに表示される未定定数である。

$$N(p) = \begin{bmatrix} N_1(p) & N_2(p) \\ N_3(p) & N_4(p) \\ N_5(p) & N_6(p) \\ N_7(p) & N_8(p) \end{bmatrix}, \quad N'(p) = \begin{bmatrix} N_1(p) & N_2(p) \\ N_3(p) & N_4(p) \\ N_5(p) & N_6(p) \\ N_7(p) & N_8(p) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(22 \cdot b)$$

式 (22・a) は式 (18・b) を満足する解であって、明らかに式 (16) を満足しない。したがって、式 (16) が満足されるように、式 (22・a) の解を修正しなければならない。式 (22・a) を式 (16) に代入しまとめると、式 (16) が成立するためには $N(p)$ と $N'(p)$ の間で、 p に無関係な次式の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(p) \\ N'(p) \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} A_{11} - \alpha^2 A_{44} \\ A_{11} - \alpha^2 A_{44} \\ A_{11} - \beta^2 A_{44} \\ A_{11} - \beta^2 A_{44} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = (A_{12} + A_{44}) \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \\ \beta & \\ & \beta \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} A_{44} - \alpha^2 A_{22} \\ A_{44} - \alpha^2 A_{22} \\ A_{44} - \beta^2 A_{22} \\ A_{44} - \beta^2 A_2 \end{bmatrix}$$

式 (23) の第 1, 2 行式は同次方程式 (16) の第 1, 2 行式から得た方程式である。これらはそれぞれ独立した有効式のように表わされているが、式 (23) の連立 1 次方程式について、この方程式のもつ性質を代数的に調べると、次式の結果が得られた。

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

すなわち、式 (23) の係数マトリックスの行列式が零になることは式 (23) の第 1 行式と第 2 行式がそれぞれ独立した有効式でなく、重複した方程式であることが明らかである。この結果、有効式としては式 (23) の第 1, 2 行式のどちらか一方を採用すればよいことになる。

弾性問題における変位を未知関数とした解析について、いくつかの性質が明らかにされている。この中に、物体力のない弾性問題において、重調和方程式を満足する変位ポテンシャル関数 (Galerkin の変位関数) が得られている。この変位関数の間にはある種の関連 (変位関数の等価性) が存在することが証明されている^{(15), (16)}。したがって、式 (23) の第 1 行式と第 2 行式が重複した方程式であることは変位関数の等価性と同じ内容を表わしているといえる。式 (23) の第 1 行式から、 $N'(p)$ は $N(p)$ に従属して表わすことができる。

$$N'(p) = \begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & n & \\ & & & n \end{bmatrix} N(p) \dots\dots\dots (25)$$

$$m = \frac{A_{11} - \alpha^2 A_{44}}{\alpha(A_{12} + A_{44})}, \quad n = \frac{A_{11} - \beta^2 A_{44}}{\beta(A_{12} + A_{44})} \dots\dots\dots (26)$$

これより、式 (16) を満足する同次解 u_h, v_h は次式に得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_h &= \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cosh \alpha p \eta & \sinh \alpha p \eta & \cosh \beta p \eta & \sinh \beta p \eta \end{bmatrix} N(p) \begin{bmatrix} \cos p \xi \\ \sin p \xi \end{bmatrix} dp \\ v_h &= \int_0^\infty \begin{bmatrix} m \sinh \alpha p \eta & m \cosh \alpha p \eta & n \sinh \beta p \eta & n \cosh \beta p \eta \end{bmatrix} N(p) \begin{bmatrix} \sin p \xi \\ -\cos p \xi \end{bmatrix} dp \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

上記の 2 式を次のようにまとめて定義すると都合よい。

$$U_h = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cosh \alpha p \eta & \sinh \alpha p \eta & \cosh \beta p \eta & \sinh \beta p \eta \\ m \sinh \alpha p \eta & m \cosh \alpha p \eta & n \sinh \beta p \eta & n \cosh \beta p \eta \end{bmatrix} N(p) \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \cos p \xi \\ \sin p \xi \\ \sin p \xi \\ -\cos p \xi \end{bmatrix} \right\} dp \dots\dots\dots (28)$$

式 (25) のように、 v_h の未定定数 $N'(p)$ は u_h の $N(p)$ をもととして表わしたが、 $N'(p)$ をもととして $N(p)$ が表現されることもできる。いずれの場合も式 (16) の同次方程式を満足する。

式 (21) の (ii), (iii) の場合も (i) と同様に解析され、式 (16) を満足する U_h はそれぞれ次式に表わされる。

(ii) $A_{44} = \frac{1}{2}(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12})$ の場合

$$U_h = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cosh \alpha p \eta & \sinh \alpha p \eta & \alpha p \eta \cosh \alpha p \eta & \alpha p \eta \sinh \alpha p \eta \\ m \sinh \alpha p \eta & m \cosh \alpha p \eta & -n \cosh \alpha p \eta + m \alpha p \eta \sinh \alpha p \eta & -n \sinh \alpha p \eta + m \alpha p \eta \cosh \alpha p \eta \end{bmatrix} N(p) \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \cos p \xi \\ \sin p \xi \\ \sin p \xi \\ -\cos p \xi \end{bmatrix} \right\} dp, \quad m = \frac{A_{11} - \alpha^2 A_{44}}{\alpha(A_{12} + A_{44})}, \quad n = \frac{A_{11} + \alpha^2 A_{44}}{\alpha(A_{12} + A_{44})}$$

(iii) $A_{44} > \frac{1}{2}(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12})$ の場合

$$U_h = \int_0^\infty \begin{bmatrix} e^{\alpha p \eta} \cos \beta p \eta & e^{\alpha p \eta} \sin \beta p \eta \\ e^{\alpha p \eta} (n \cos \beta p \eta + m \sin \beta p \eta) & -e^{\alpha p \eta} (m \cos \beta p \eta - n \sin \beta p \eta) \\ e^{-\alpha p \eta} \cos \beta p \eta & e^{-\alpha p \eta} \sin \beta p \eta \\ -e^{-\alpha p \eta} (n \cos \beta p \eta - m \sin \beta p \eta) & -e^{-\alpha p \eta} (m \cos \beta p \eta + n \sin \beta p \eta) \end{bmatrix} N(p) \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \cos p \xi \\ \sin p \xi \\ \sin p \xi \\ -\cos p \xi \end{bmatrix} \right\} dp, \\ m = \frac{\beta[A_{11} + (\alpha^2 + \beta^2)A_{44}]}{(\alpha^2 + \beta^2)(A_{12} + A_{44})}, \quad n = \frac{\alpha[A_{11} - (\alpha^2 + \beta^2)A_{44}]}{(\alpha^2 + \beta^2)(A_{12} + A_{44})}$$

上述の連立偏微分方程式を満足する同次解の誘導については、Huang⁽¹³⁾ がはりの振動問題について研究した一連の解析過程を熱弾性問題に応用したものである。

5. 特殊解の誘導

式 (17) が満足される特殊解 U_p を誘導する。式 (17) の右辺項の温度 $T(\xi, \eta)$ が式 (2) によって定義されることから、 U_p は次式に設定する。

$$u_p = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cosh \frac{p}{k} \eta & \sinh \frac{p}{k} \eta \end{bmatrix} J(p) \begin{bmatrix} \cos p \xi \\ \sin p \xi \end{bmatrix} dp, \quad v_p = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sinh \frac{p}{k} \eta & \cosh \frac{p}{k} \eta \end{bmatrix} J'(p) \begin{bmatrix} \sin p \xi \\ -\cos p \xi \end{bmatrix} dp \dots\dots\dots (29)$$

$J(p), J'(p)$ はそれぞれ (2-by-2) のマトリックスに表示される未定定数である。

$$J(p) = \begin{bmatrix} J_1(p) & J_2(p) \\ J_3(p) & J_4(p) \end{bmatrix}, \quad J'(p) = \begin{bmatrix} J_1(p) & J_2(p) \\ J_3(p) & J_4(p) \end{bmatrix}' \dots\dots\dots (30)$$

式 (2) および式 (29) を式 (17) に代入しまとめると, $\mathbf{J}(p), \mathbf{J}'(p)$ は次式のような $\mathbf{I}(p)$ に従属して表わすことができる.

$$\mathbf{J}(p) = \frac{1}{p} \lambda \mathbf{I}(p) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}'(p) = \frac{1}{p} \mu \mathbf{I}(p) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

ここに, λ, μ は係数であり, p に関係なく定まる.

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{h}{D} \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{k^2} - A_{44} & -\frac{A_{12} + A_{44}}{k} \\ \frac{A_{12} + A_{44}}{k} & \frac{A_{44}}{k^2} - A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \frac{1}{k} \end{bmatrix}, \quad D = \left(\frac{A_{44}}{k^2} - A_{11} \right) \left(\frac{A_{22}}{k^2} - A_{44} \right) + \frac{(A_{12} + A_{44})^2}{k^2} \dots\dots\dots (32)$$

これより, 式 (17) を満足する特殊解 \mathbf{U}_p は次式に得る.

$$\mathbf{U}_p = \int_0^\infty \frac{1}{p} \begin{bmatrix} \lambda \cosh \frac{p}{k} \eta & \lambda \sinh \frac{p}{k} \eta \\ \mu \sinh \frac{p}{k} \eta & \mu \cosh \frac{p}{k} \eta \end{bmatrix} \mathbf{I}(p) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos p\xi \\ \sin p\xi \\ \sin p\xi \\ -\cos p\xi \end{bmatrix} dp \dots\dots\dots (33)$$

6. 変位および応力ベクトル

式 (28), (33) によって同次解および特殊解は定義されるから, 式 (14) の関係により, 変位ベクトル \mathbf{U} は次式で得られる.

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cosh \alpha p \eta & \sinh \alpha p \eta & \cosh \beta p \eta & \sinh \beta p \eta \\ m \sinh \alpha p \eta & m \cosh \alpha p \eta & n \sinh \beta p \eta & n \cosh \beta p \eta \end{bmatrix} \mathbf{N}(p) + \frac{1}{p} \begin{bmatrix} \lambda \cosh \frac{p}{k} \eta & \lambda \sinh \frac{p}{k} \eta \\ \mu \sinh \frac{p}{k} \eta & \mu \cosh \frac{p}{k} \eta \end{bmatrix} \\ & \times \mathbf{I}(p) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos p\xi \\ \sin p\xi \\ \sin p\xi \\ -\cos p\xi \end{bmatrix} dp \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

また, 応力ベクトル \mathbf{V} は式 (34) を式 (9) に代入することにより得られる.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = & \int_0^\infty p \begin{bmatrix} k_{11} \cosh \alpha p \eta & k_{11} \sinh \alpha p \eta & k_{12} \cosh \beta p \eta & k_{12} \sinh \beta p \eta \\ k_{21} \cosh \alpha p \eta & k_{21} \sinh \alpha p \eta & k_{22} \cosh \beta p \eta & k_{22} \sinh \beta p \eta \\ k_{31} \cosh \alpha p \eta & k_{31} \sinh \alpha p \eta & k_{32} \cosh \beta p \eta & k_{32} \sinh \beta p \eta \\ k_{41} \sinh \alpha p \eta & k_{41} \cosh \alpha p \eta & k_{42} \sinh \beta p \eta & k_{42} \cosh \beta p \eta \end{bmatrix} \mathbf{N}(p) + \\ & \begin{bmatrix} k_{13} \cosh \frac{p}{k} \eta & k_{13} \sinh \frac{p}{k} \eta \\ k_{23} \cosh \frac{p}{k} \eta & k_{23} \sinh \frac{p}{k} \eta \\ k_{33} \cosh \frac{p}{k} \eta & k_{33} \sinh \frac{p}{k} \eta \\ k_{43} \sinh \frac{p}{k} \eta & k_{43} \cosh \frac{p}{k} \eta \end{bmatrix} \\ & \times \mathbf{I}(p) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin p\xi \\ -\cos p\xi \\ \sin p\xi \\ -\cos p\xi \\ -\cos p\xi \\ \cos p\xi \\ \sin p\xi \end{bmatrix} dp \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$k_{11} = \frac{1}{h} (\alpha m A_{12} - A_{11}), \quad k_{12} = \frac{1}{h} (\beta n A_{12} - A_{11}), \quad k_{13} = \frac{A_{12}}{h} \frac{\mu}{k} - \frac{A_{11}}{h} \lambda - \beta_1$$

$$k_{21} = \frac{1}{h} (\alpha m A_{22} - A_{12}), \quad k_{22} = \frac{1}{h} (\beta n A_{22} - A_{12}), \quad k_{23} = \frac{A_{22}}{h} \frac{\mu}{k} - \frac{A_{12}}{h} \lambda - \beta_2$$

$$k_{31} = \frac{1}{h} (\alpha m A_{32} - A_{31}), \quad k_{32} = \frac{1}{h} (\beta n A_{32} - A_{31}), \quad k_{33} = \frac{A_{32}}{h} \frac{\mu}{k} - \frac{A_{31}}{h} \lambda - \beta_3$$

$$k_{41} = \frac{A_{44}}{h} (\alpha + m), \quad k_{42} = \frac{A_{44}}{h} (\beta + n), \quad k_{43} = \frac{A_{44}}{h} \left(\mu + \frac{\lambda}{k} \right)$$

式 (21) の (ii), (iii) の場合に関する U, V も同様に誘導することができる。ここでは省略する。

7. 応力自由の境界条件

式 (34), (35) の未定定数 $N(p)$ が決定されると、スラブの任意点における変位 $U(\xi, \eta)$ および応力ベク

トル $V(\xi, \eta)$ は知ることが出来る。たとえば、スラブの $\eta = \pm 1$ における境界条件は応力自由であるとする。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{\eta=\pm 1} = 0 \dots \dots \dots (36)$$

式 (35) の第 2, 4 行式から、上記の境界条件は次式の方程式に表わせる。

$$\begin{bmatrix} k_{21} \cosh \alpha p & k_{21} \sinh \alpha p & k_{22} \cosh \beta p & k_{22} \sinh \beta p \\ k_{41} \sinh \alpha p & k_{41} \cosh \alpha p & k_{42} \sinh \beta p & k_{42} \cosh \beta p \\ k_{21} \cosh \alpha p & -k_{21} \sinh \alpha p & k_{22} \cosh \beta p & -k_{22} \sinh \beta p \\ -k_{41} \sinh \alpha p & k_{41} \cosh \alpha p & -k_{42} \sinh \beta p & k_{42} \cosh \beta p \end{bmatrix} N(p) + \begin{bmatrix} k_{23} \cosh \frac{p}{k} & k_{23} \sinh \frac{p}{k} \\ k_{43} \sinh \frac{p}{k} & k_{43} \cosh \frac{p}{k} \\ k_{23} \cosh \frac{p}{k} & -k_{23} \sinh \frac{p}{k} \\ -k_{43} \sinh \frac{p}{k} & k_{43} \cosh \frac{p}{k} \end{bmatrix} \times I(p) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \dots \dots \dots (37)$$

これより、 $N(p)$ は次式のように決定される。

$$N(p) = \frac{1}{p} Q I(p) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (38)$$

ここに、 Q は (4-by-2) の矩形マトリックスであり次式に表わされる。

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_1} \left(k_{22} k_{43} \cosh \beta p \sinh \frac{p}{k} - k_{23} k_{42} \sinh \beta p \cosh \frac{p}{k} \right), & 0 \\ 0, & \frac{1}{D_2} \left(k_{22} k_{43} \sinh \beta p \cosh \frac{p}{k} - k_{23} k_{42} \cosh \beta p \sinh \frac{p}{k} \right) \\ \frac{1}{D_1} \left(k_{23} k_{41} \sinh \alpha p \cosh \frac{p}{k} - k_{21} k_{43} \cosh \alpha p \sinh \frac{p}{k} \right), & 0 \\ 0, & \frac{1}{D_2} \left(k_{23} k_{41} \cosh \alpha p \sinh \frac{p}{k} - k_{21} k_{43} \sinh \alpha p \cosh \frac{p}{k} \right) \end{bmatrix},$$

$$D_1 = k_{21} k_{42} \cosh \alpha p \sinh \beta p - k_{22} k_{41} \sinh \alpha p \cosh \beta p, \quad D_2 = k_{21} k_{42} \sinh \alpha p \cosh \beta p - k_{22} k_{41} \cosh \alpha p \sinh \beta p \dots \dots \dots (39)$$

$N(p)$ が決定されたことにより、定常状態における直交異方性弾性スラブの熱弾性問題は完全に解決されたことになる。

式 (38) により、応力自由の境界条件を満足する変位および応力ベクトルは次式に得る。

$$U = \int_0^\infty \frac{1}{p} \begin{bmatrix} \cosh \alpha p \eta & \sinh \alpha p \eta & \cosh \beta p \eta & \sinh \beta p \eta \\ m \sinh \alpha p \eta & m \cosh \alpha p \eta & n \sinh \beta p \eta & n \cosh \beta p \eta \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} \lambda \cosh \frac{p}{k} \eta & \lambda \sinh \frac{p}{k} \eta \\ \mu \sinh \frac{p}{k} \eta & \mu \cosh \frac{p}{k} \eta \end{bmatrix} I(p) \cdot \begin{bmatrix} -\sin p \xi \\ \cos p \xi \\ \cos p \xi \\ \sin p \xi \end{bmatrix} dp \dots \dots \dots (40)$$

$$V = \int_0^\infty \begin{bmatrix} k_{11} \cosh \alpha p \eta & k_{11} \sinh \alpha p \eta & k_{12} \cosh \beta p \eta & k_{12} \sinh \beta p \eta \\ k_{21} \cosh \alpha p \eta & k_{21} \sinh \alpha p \eta & k_{22} \cosh \beta p \eta & k_{22} \sinh \beta p \eta \\ k_{31} \cosh \alpha p \eta & k_{31} \sinh \alpha p \eta & k_{32} \cosh \beta p \eta & k_{32} \sinh \beta p \eta \\ k_{41} \sinh \alpha p \eta & k_{41} \cosh \alpha p \eta & k_{42} \sinh \beta p \eta & k_{42} \cosh \beta p \eta \end{bmatrix} Q$$

$$+ \begin{bmatrix} k_{13} \cosh \frac{p}{k} \eta & k_{13} \sinh \frac{p}{k} \eta \\ k_{23} \cosh \frac{p}{k} \eta & k_{23} \sinh \frac{p}{k} \eta \\ k_{33} \cosh \frac{p}{k} \eta & k_{33} \sinh \frac{p}{k} \eta \\ k_{43} \sinh \frac{p}{k} \eta & k_{43} \cosh \frac{p}{k} \eta \end{bmatrix} \mathbf{I}(p) \cdot \begin{Bmatrix} \cos p\xi \\ \sin p\xi \\ \cos p\xi \\ \sin p\xi \\ \cos p\xi \\ \sin p\xi \\ -\sin p\xi \\ \cos p\xi \end{Bmatrix} \Bigg\} dp \dots\dots\dots (41)$$

応力自由 ($\eta = \pm 1$) 以外に対しても未定常数 $N(p)$ はすべて式 (38) のように表わされ、 \mathbf{Q} マトリックスのみが異なるだけである。例として、次の2種類の境界条件に対する \mathbf{Q} マトリックスを示す。

(1) 変位固定 ($\eta = \pm 1$) の境界条件

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{\eta=\pm 1} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_1} \left(\mu \cosh \beta p \sinh \frac{p}{k} - n \lambda \sinh \beta p \cosh \frac{p}{k} \right), & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_2} \left(\mu \sinh \beta p \cosh \frac{p}{k} - n \lambda \cosh \beta p \sinh \frac{p}{k} \right) \\ \frac{1}{D_1} \left(m \lambda \sinh \alpha p \cosh \frac{p}{k} - \mu \cosh \alpha p \sinh \frac{p}{k} \right), & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_2} \left(m \lambda \cosh \alpha p \sinh \frac{p}{k} - \mu \sinh \alpha p \cosh \frac{p}{k} \right) \end{bmatrix}$$

$$D_1 = n \cosh \alpha p \sinh \beta p - m \sinh \alpha p \cosh \beta p, \quad D_2 = n \sinh \alpha p \cosh \beta p - m \cosh \alpha p \sinh \beta p$$

(2) 応力自由 ($\eta = 1$)-変位固定 ($\eta = -1$) の境界条件

$$\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{\eta=1} = 0, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{\eta=-1} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} k_{21} \cosh \alpha p & k_{21} \sinh \alpha p & k_{22} \cosh \beta p & k_{22} \sinh \beta p \\ k_{41} \sinh \alpha p & k_{41} \cosh \alpha p & k_{42} \sinh \beta p & k_{42} \cosh \beta p \\ \cosh \alpha p & -\sinh \alpha p & \cosh \beta p & -\sinh \beta p \\ -m \sinh \alpha p & m \cosh \alpha p & -n \sinh \beta p & n \cosh \beta p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -k_{23} \cosh \frac{p}{k} & -k_{23} \sinh \frac{p}{k} \\ -k_{43} \sinh \frac{p}{k} & -k_{43} \cosh \frac{p}{k} \\ -\lambda \cosh \frac{p}{k} & \lambda \sinh \frac{p}{k} \\ \mu \sinh \frac{p}{k} & -\mu \cosh \frac{p}{k} \end{bmatrix}$$

8. 数値計算例

本解析法の正確性を確認するために Tauchert-Aköz⁹⁾ が研究報告したものと同一熱弾性問題について数値計算を行い比較検討する。これは応力自由の一方の自由境界面に等分布温度荷重が ξ に関して対称の領域に載荷した場合の熱応力分布を調べたものである。さらに、ここでは同じ温度荷重状態のもとで、境界条件が変位固定、

応力自由-変位固定についても数値計算を行い、これらに対する熱応力分布を示す。なお、数値計算で使用した直交異方性弾性スラブの弾性係数、熱弾性係数、および熱伝導係数比は表-1に示す。この場合の弾性係数間の条件は式 (21) の (i) の場合である。

表-1 直交異方性弾性スラブの材料特性

| | | |
|---|---|--|
| $A_{11} = 30.3 \times 10^6 \text{ psi},$ | $A_{12} = 3.78 \times 10^6 \text{ psi}$ | |
| $A_{22} = 4.04 \times 10^6 \text{ psi},$ | $A_{31} = 3.35 \times 10^6 \text{ psi}$ | |
| $A_{32} = 1.99 \times 10^6 \text{ psi},$ | $A_{44} = 1.13 \times 10^6 \text{ psi}$ | |
| $\beta_1 = 204 \text{ psi}/^\circ\text{F},$ | $\beta_2 = 118 \text{ psi}/^\circ\text{F},$ | $\beta_3 = 124 \text{ psi}/^\circ\text{F}$ |
| $k^2 = \frac{k_y}{k_x} = 0.01$ | | |

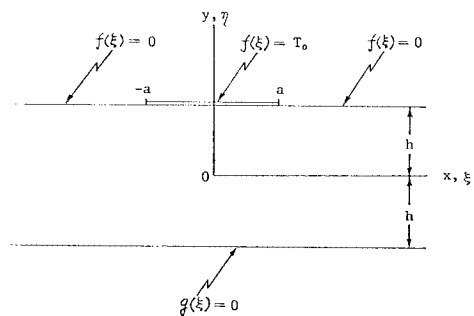


図-1 温度荷重の作用状態

図-1 に示すように、温度荷重状態は直交異方性弾性スラブの表面境界 ($\eta=1$) に、等分布温度荷重 T_0 が $-a < \xi < a$ の対称領域に作用したものとす。すなわち、式 (4) の温度荷重 $f(\xi), g(\xi)$ はそれぞれ

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & (-a > \xi) \\ T_0(-a < \xi < a) & g(\xi) = 0 \dots \dots (42) \\ 0 & (a < \xi) \end{cases}$$

これらの温度荷重状態に対する式 (7) の $I(p)$ は式 (6) から次式に得る。

$$I(p) = \frac{T_0}{\pi} \frac{\sin pa}{p \cosh \frac{p}{k} \sinh \frac{p}{k}} \begin{bmatrix} \sinh \frac{p}{k} & 0 \\ \cosh \frac{p}{k} & 0 \end{bmatrix} \dots (43)$$

式 (43) を式 (41) に代入することにより、上記温度荷重状態に対する直交異方性弾性スラブの熱応力は完全に調べるができる。

図-3 は等分布温度荷重 T_0 の作用領域 a の値を、 $a=1, a=5, a=1/5$ の 3 種のケースについて求めた熱応力分布である。得た熱応力分布は Tauchert-Aköz が研究報告した熱応力分布とまったく同じ形態の結果を得、本解析法の正確性を確認した。ここに、 T_0 の作用領域 $a=1, a=5, a=1/5$ はスラブの幅 h に対してそれぞれ 1, 5, 1/5 倍の領域に作用することを意味する。

Fourier 積分については最も一般的な Simpson 数値積分を用いて行った。Simpson 数値積分は 0 から与え

表-2 Fourier 積分の上限値に対する応力 $\sigma_i(0, \eta)$ の収束状態 (応力自由の境界条件)

| η | Upper limits of Fourier integration | | | | | | | | | |
|----------------------|-------------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | $p=\pi$ | | $p=2\pi$ | | $p=3\pi$ | | $p=4\pi$ | | $p=5\pi$ | |
| | σ_x | σ_z | σ_x | σ_z | σ_x | σ_z | σ_x | σ_z | σ_x | σ_z |
| For the case $a=1$ | | | | | | | | | | |
| 1.0 | -56.73 | -74.69 | -41.29 | -57.07 | -50.43 | -67.49 | -43.93 | -60.08 | -48.97 | -65.84 |
| 0.9 | -6.52 | -30.72 | -7.93 | -30.69 | -7.73 | -30.62 | -7.74 | -30.66 | -7.75 | -30.63 |
| 0.8 | 3.15 | -17.37 | 2.98 | -17.47 | 2.96 | -17.43 | 2.97 | -17.45 | 2.96 | -17.44 |
| 0.6 | 5.27 | -8.56 | 5.31 | -8.62 | 5.30 | -8.60 | 5.30 | -8.60 | 5.30 | -8.60 |
| 0.4 | 4.42 | -5.36 | 4.45 | -5.40 | 4.44 | -5.39 | 4.44 | -5.39 | 4.44 | -5.39 |
| 0.2 | 3.35 | -3.71 | 3.37 | -3.73 | 3.37 | -3.73 | 3.37 | -3.73 | 3.37 | -3.73 |
| 0.0 | 2.31 | -2.69 | 2.32 | -2.70 | 2.32 | -2.70 | 2.32 | -2.70 | 2.32 | -2.70 |
| -0.2 | 1.27 | -1.97 | 1.28 | -1.98 | 1.28 | -1.98 | 1.28 | -1.98 | 1.28 | -1.98 |
| -0.4 | 0.17 | -1.43 | 0.17 | -1.43 | 0.17 | -1.43 | 0.17 | -1.43 | 0.17 | -1.43 |
| -0.6 | -1.11 | -0.99 | -1.11 | -0.99 | -1.11 | -0.99 | -1.11 | -0.99 | -1.11 | -0.99 |
| -0.8 | -2.80 | -0.62 | -2.80 | -0.62 | -2.80 | -0.62 | -2.80 | -0.62 | -2.80 | -0.62 |
| -1.0 | -5.49 | -0.31 | -5.47 | -0.30 | -5.47 | -0.30 | -5.47 | -0.30 | -5.47 | -0.30 |
| For the case $a=5$ | | | | | | | | | | |
| 1.0 | -24.05 | -64.45 | -20.67 | -60.59 | -22.55 | -62.75 | -21.23 | -61.24 | -22.25 | -62.40 |
| 0.9 | -13.71 | -53.51 | -14.07 | -53.44 | -14.02 | -53.43 | -14.02 | -53.44 | -14.02 | -53.43 |
| 0.8 | -6.94 | -45.56 | -7.03 | -45.59 | -7.04 | -45.58 | -7.03 | -45.58 | -7.03 | -45.58 |
| 0.6 | 2.63 | -32.87 | 2.64 | -32.88 | 2.64 | -32.88 | 2.64 | -32.88 | 2.64 | -32.88 |
| 0.4 | 6.89 | -24.04 | 6.90 | -24.05 | 6.89 | -24.04 | 6.89 | -24.04 | 6.89 | -24.04 |
| 0.2 | 7.65 | -17.89 | 7.66 | -17.90 | 7.66 | -17.90 | 7.66 | -17.90 | 7.66 | -17.90 |
| 0.0 | 6.47 | -13.42 | 6.47 | -13.43 | 6.47 | -13.43 | 6.47 | -13.43 | 6.47 | -13.43 |
| -0.2 | 4.21 | -9.98 | 4.21 | -9.98 | 4.21 | -9.98 | 4.21 | -9.98 | 4.21 | -9.98 |
| -0.4 | 1.29 | -7.18 | 1.29 | -7.18 | 1.29 | -7.18 | 1.29 | -7.18 | 1.29 | -7.18 |
| -0.6 | -2.09 | -4.77 | -2.09 | -4.77 | -2.09 | -4.77 | -2.09 | -4.77 | -2.09 | -4.77 |
| -0.8 | -5.85 | -2.61 | -5.85 | -2.61 | -5.85 | -2.61 | -5.85 | -2.61 | -5.85 | -2.61 |
| -1.0 | -9.96 | -0.55 | -9.95 | -0.55 | -9.95 | -0.55 | -9.95 | -0.55 | -9.95 | -0.55 |
| For the case $a=1/5$ | | | | | | | | | | |
| 1.0 | -20.00 | -24.85 | 39.11 | -46.65 | -53.30 | -62.84 | -61.54 | -72.24 | -64.04 | -75.09 |
| 0.9 | -0.43 | -7.28 | 1.30 | -7.35 | 1.62 | -7.25 | 1.64 | -7.20 | 1.63 | -7.18 |
| 0.8 | 1.39 | -3.64 | 1.62 | -3.51 | 1.58 | -3.45 | 1.56 | -3.42 | 1.56 | -3.42 |
| 0.6 | 1.24 | -1.69 | 1.19 | -1.61 | 1.17 | -1.59 | 1.16 | -1.58 | 1.16 | -1.58 |
| 0.4 | 0.93 | -1.04 | 0.89 | -1.00 | 0.89 | -0.99 | 0.88 | -0.98 | 0.88 | -0.98 |
| 0.2 | 0.68 | -0.71 | 0.66 | -0.69 | 0.66 | -0.68 | 0.65 | -0.68 | 0.65 | -0.68 |
| 0.0 | 0.46 | -0.52 | 0.45 | -0.50 | 0.45 | -0.50 | 0.45 | -0.50 | 0.45 | -0.50 |
| -0.2 | 0.25 | -0.38 | 0.24 | -0.37 | 0.24 | -0.37 | 0.24 | -0.37 | 0.24 | -0.37 |
| -0.4 | 0.02 | -0.28 | 0.02 | -0.27 | 0.02 | -0.27 | 0.02 | -0.27 | 0.02 | -0.27 |
| -0.6 | -0.24 | -0.19 | -0.24 | -0.19 | -0.24 | -0.19 | -0.24 | -0.19 | -0.24 | -0.19 |
| -0.8 | 0.60 | -0.12 | -0.60 | -0.12 | -0.60 | -0.12 | -0.60 | -0.12 | -0.60 | -0.12 |
| -1.0 | -1.25 | -0.07 | -1.27 | -0.07 | -1.27 | -0.07 | -1.27 | -0.07 | -1.27 | -0.07 |

$\frac{\sigma_i}{T_0}$ (psi/°F)

た積分上限値の有限領域を細分割することにより、積分精度を上げることができる。数値計算で求めた値は必要とした有効桁数（4桁）に合致するまで細分割を繰り返して求めた。数値積分で注意すべき点は、 $p=0$ の場合、式（40）、（41）の変位および応力ベクトルがこのままの関数形だと無限大となり、不連続性を有することになる。このため、 $p=0$ のとき、関数形の極限操作が必要となる。

表-2 は、Fourier 積分の上限値に対する $\xi=0$ に注目した応力 $\sigma_i(0, \eta)_{i=x,z}$ の収束状態を数値で示したものである。この中で、温度荷重の作用点における縁応力 $\sigma_z(0, 1)$ を除いた他の応力については、3 ケースの温度荷重状態とも積分上限値が $p=4\pi$ 程度で収束した応力値を得ることができた。特に、内部応力については、温度荷重の作用点から離れる位置における応力ほどよく収束した状態を表わし、積分上限値の比較的小さい値をもって 0 から無限大の Fourier 積分が表現されたことになる。

図-2 は、Tauchert-Aköz が積分上限値 $p=20\pi/ah$ 、32 分割の Gauss 積分を用いて得た縁応力値 $\sigma_z(0, 1)$ と比較して表わしたものである。温度荷重状態、ケース $a=1$ 、 $a=5$ の場合は、積分上限値を順次大きく採用することによって縁応力値の変動が順次小さくなり、Fourier 積分の解は収束状態を示す。しかしながら、最も集中温度荷重状態の傾向が強い、ケース $a=1/5$ については、積分上限値を順次大きくとっても縁応力値の収束具合が悪く、収束した状態の縁応力を得ることができなかった。しかし、スラブの境界面から少し内側に入った内部応力 $\sigma_z(0, 0.9)$ については、積分上限値 $p=\pi$ 以上に対して数値の変動が少なく収束状態の応力値を表わし、Fourier 積分の解は定め得ることができた。

一般的に、等分布温度荷重が部分的に作用する場合、縁応力の収束状態は、温度荷重の作用領域が顕著に影響を及ぼす。すなわち、温度荷重の作用領域が小さく、集中温度荷重的な度合いが強くなるほど、荷重状態は極端な不連続性を有する関数となり、これを連続関数である波形の Fourier 積分で表わそうとする解法に起因することであって、無限大的な積分上限値を採用しても、載荷境界上の温度は与えた温度荷重状態（温度境界条件）を完全に表現することが困難である。この Fourier 積分で表わされる温度場の影響によって、集中温度荷重の載荷点で縁応力は無限大的な応力集中現象が起こり、収束した状態の縁応力を得ることは非常に困難となる。

図-4、5 は式（42）の温度荷重状態のもとで、境界条件が変位固定 ($\eta=\pm 1$)、応力自由 ($\eta=1$)-変位固定 ($\eta=-1$) の場合の応力分布を示したものである。この 2 種の境界条件についても、応力自由 ($\eta=\pm 1$) の場合

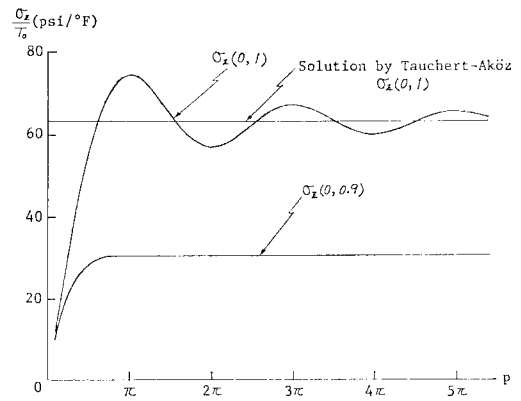
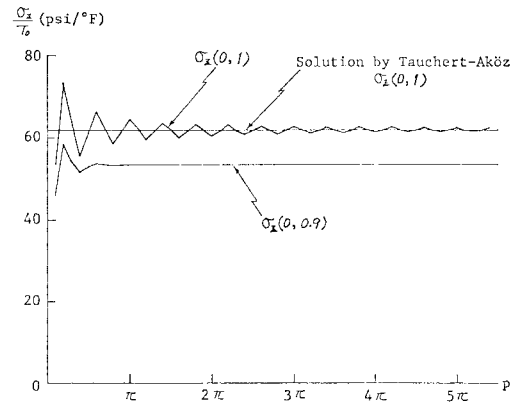
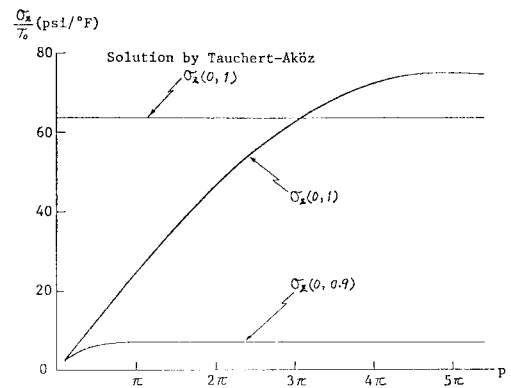
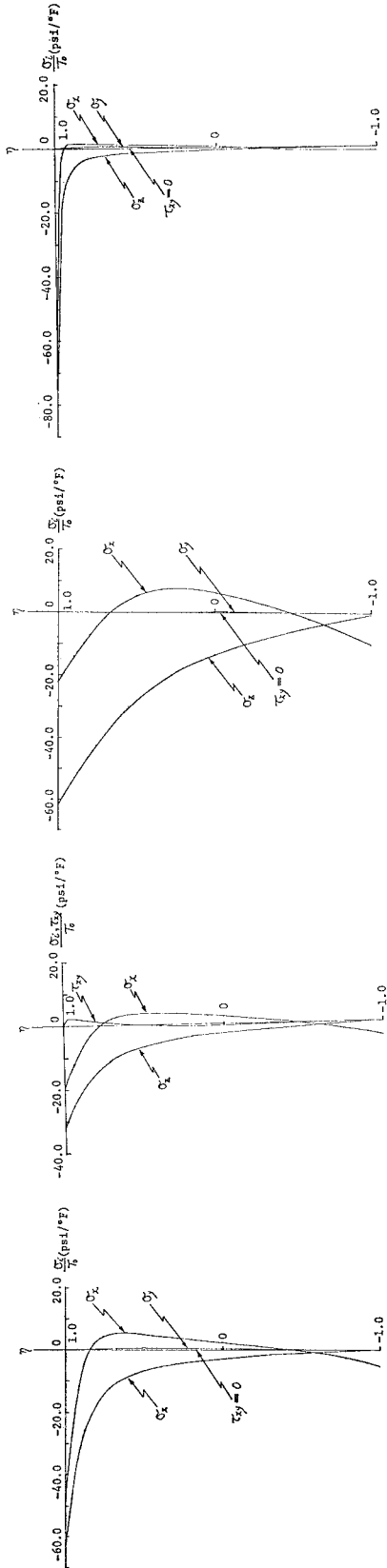
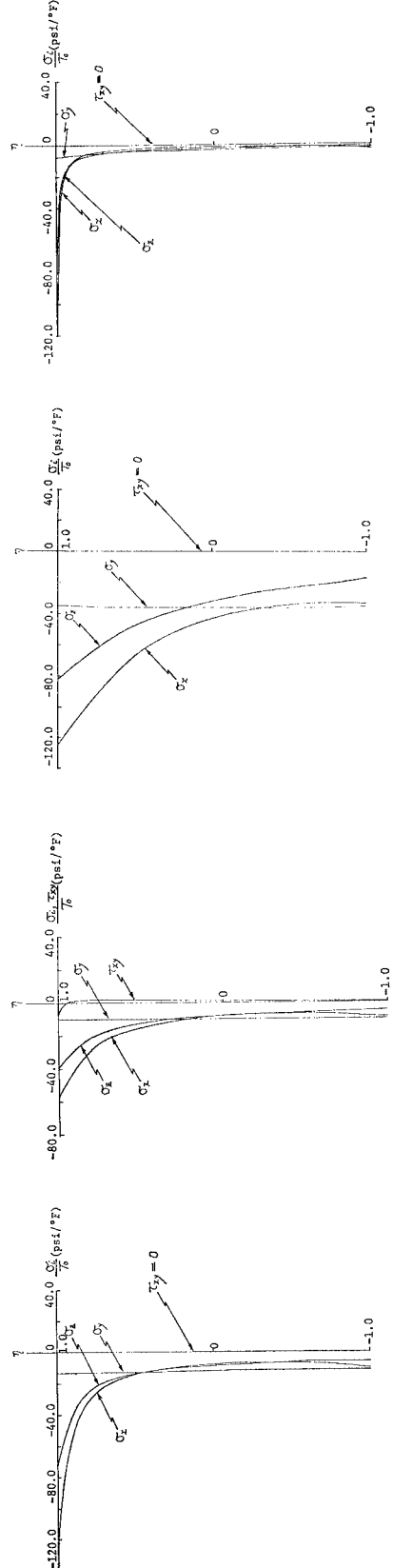
(a) For the case $a=1$ (b) For the case $a=5$ (c) For the case $a=1/5$

図-2 Fourier 積分の上限値に対する縁応力 $\sigma_z(0, 1)$ と内部応力 $\sigma_z(0, 0.9)$ の収束状態（応力自由の境界条件）

と同様に、縁応力は内部応力と比較して、収束状態は悪いが、積分上限値約 $p=4\pi$ 程度で 3 ケースの温度荷重状態とも、内部応力はよく収束した結果を得ることができた。



図—3 応力自由 ($\eta=\pm 1$) の等分布温度荷重の作用領域による応力分布



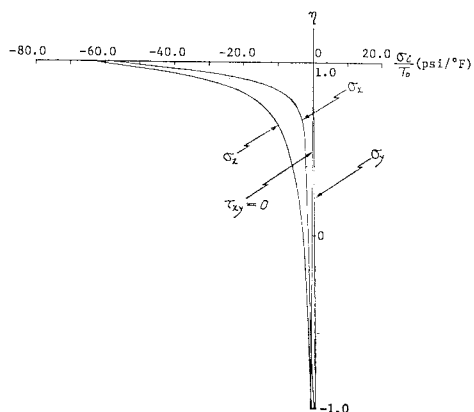
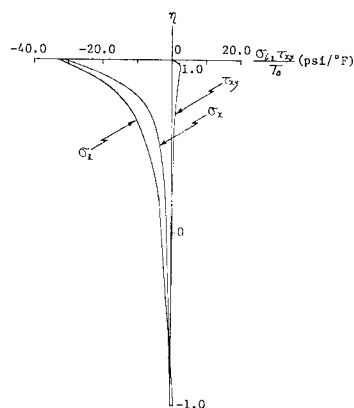
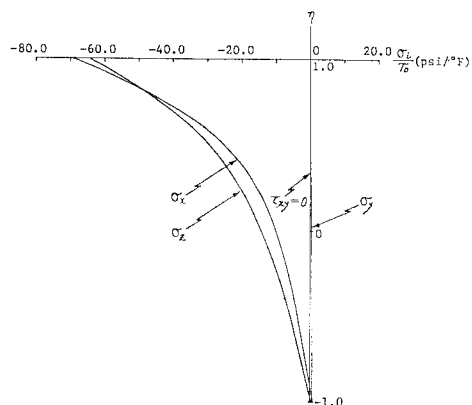
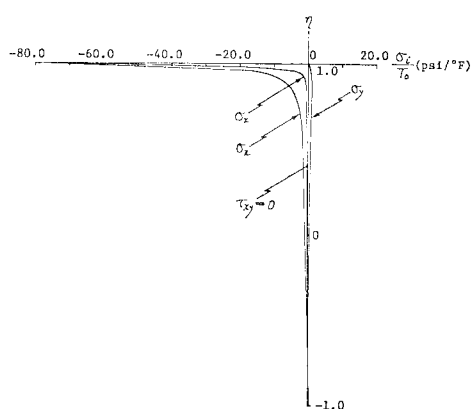
図—4 変位固定 ($\eta=\pm 1$) の等分布温度荷重の作用領域による応力分布

(d) Distribution of stresses along $\xi=0$ for the case $a=1/5$.

(c) Distribution of stresses along $\xi=0$ for the case $a=5$.

(b) Distribution of stresses along $\xi=1$ for the case $a=1$.

(a) Distribution of stresses along $\xi=0$ for the case $a=1$.

(a) Distribution of stresses along $\xi=0$ for the case $a=1$.(b) Distribution of stresses along $\xi=1$ for the case $a=1$.(c) Distribution of stresses along $\xi=0$ for the case $a=5$.(d) Distribution of stresses along $\xi=0$ for the case $a=1/5$.図—5 応力自由 ($\eta=1$)・変位固定 ($\eta=-1$) の等分布温度荷重の作用領域による応力分布

9. あとがき

本研究は定常状態における2次元熱弾性問題の一解析方法を示した。連立非同次方程式に表わされる熱弾性方程式の解は、同次方程式を満足する同次解と、熱伝導方程式が満足される温度場の影響を考慮した特殊解の和で表わし、境界条件が満足される直交異方性弾性スラブの変位および応力の解式を誘導した。そしてスラブの表面境界に応力を与えた第1種境界値問題について数値計算を行い、その結果は変位ポテンシャルを導入して研究報告されたものと同じ結果を得、本解析法の正確性を確認した。

さらに、第1種境界値問題のほかに、同じ温度荷重状態として、変位を与えた第2種境界値問題および応力と変位を与えた混合境界値問題についても数値計算を行い、これらに対する熱応力分布の形態を示した。

また、解式あるいは解の誘導過程はすべてデータ完全分類のマトリックス代数で扱い、簡潔にまとめて表示し

た。すなわち、解式は ξ, η の座標項、未定数項の各成分に従って完全に分類し整理されたマトリックス代数の記述により、解析過程を明確に表わすことができた。

謝 辞：本研究の遂行にあたり、数多くの有益な助言とご指導を賜わった東京大学地震研究所 伯野元彦教授ならびに埼玉大学工学部 秋山成興教授に深謝の意を表する次第です。また 信州大学工学部 山田 一助教授、伊藤 稔助教授、ならびに木村盛茂助教授には懇親なるご指導を賜わった。ここに深謝の意を表します。

参考文献

- 1) Boley, B.A. and J.H. Weiner: Theory of Thermal Stresses, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- 2) Nowacki, W.: Thermoelasticity, Pergamon Press, Oxford, 1962.
- 3) Parkus, H.: Thermoelasticity, Blaisdell Publishing Company, 1968 (渥美 光訳: 熱弾性, 固体力学シリーズ 2, 培風館, 1973).
- 4) Sharma, B.: Thermal Stresses in Transversely Isotropic Semi-Infinite Elastic Solids, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, Trans. ASME, Vol. 80, Series

- E, pp. 86~88, 1958.
- 5) Baker, B.R. : Some Fundamental Thermoelastic Problems in Orthotropic Slabs, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, *Trans. ASME*, Vol. 88, Series E, pp. 45~51, 1966.
 - 6) Aköz, A.Y. and T.R. Taichert : Thermal Stresses in an Orthotropic Elastic Semispace, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, *Trans. ASME*, Vol. 94, Series E, pp. 87~90, 1972.
 - 7) Clements, D.L. : Thermal stresses in an Anisotropic Elastic Half Space, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 24, No. 3, pp. 332-337, 1973.
 - 8) Taichert, T.R. and A.Y. Aköz : Thermal Stresses in an Orthotropic Elastic Slab Due to Prescribed Surface Temperatures, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, *Trans. ASME*, Vol. 96, Series E, pp. 222~228, 1974.
 - 9) Taichert, T.R. and A.Y. Aköz : Stationary Temperature and Stress Fields in an Anisotropic Elastic Slab, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, *Trans. ASME*, Vol. 97, Series E, pp. 647~650, 1975.
 - 10) Neuber, H. : Vollständigkeitsbeweis des Dreifunktionsansatzes der linearen Elastizitätstheorie, *Ingenieur-Archiv*, 41, S. 232~234, 1972.
 - 11) Lekhnitskii, S.G. : *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Translated by P. Fern, Holden-Day, San Francisco, 1963.
 - 12) Herrmann, L.R. : Bending Analysis for Clamped Rectangular Plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 90, pp. 71~86, June, 1964.
 - 13) Huang, T.C. : The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28, *Trans. ASME*, Vol. 83, Series E, pp. 579~584, 1961.
 - 14) 竹内洋一郎 : 熱応力, 日新出版, pp. 43, 1971.
 - 15) 長谷川久夫 : 二次元弾性問題の変位関数のある性質, *機械学会論文集*, No. 41, No. 352, pp. 3494~3496, 1975.
 - 16) Fung, Y.C. (大橋ほか訳) : *固体の力学/理論*, 培風館, pp. 195~196, 1976.
 - 17) Lekhnitskii, S.G. : *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, pp. 19~56, 118~129, 1968.
 - 18) Lekhnitskii, S.G. : *Plane Statical Problem of the Theory of Elasticity of Anisotropic Body*, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, Vol. I, No. 1, pp. 77~89, 1937.
 - 19) 林 毅 : 直交異方性板の弾性係数と剛性に就いて, *日本航空学会誌*, 第8巻, 第79号, pp. 1131~1156, 1941.
 - 20) 池田 健 : 直交異方性板の平面応力に就いて, *日本航空学会誌*, 第9巻, 第90号, pp. 1209~1219, 1942.

(1979.10.4・受付)

【付 記】

共著の一人である谷本勉之助は 1981 年 5 月 8 日に逝去致しました。