

道路網における均衡交通量配分の 勾配射影法による計算法

A COMPUTATIONAL METHOD FOR EQUILIBRIUM TRAFFIC ASSIGNMENT

井 上 博 司*
By Hiroshi INOUE

1. ま え が き

将来の適正な道路網を計画し、また道路交通の効率的な運用を図るためには、将来の道路網上の交通量の分布が正確に予測されなければならない。このため地域間自動車交通量を道路網に割り当てる交通量配分手法の重要性が認識されて久しい。

交通量配分手法に関しては、これまでさまざまな手法が提案され、実用に供されてきたが、それらの多くは運転者はトリップの起終点間の走行所要時間が最も小さい経路を選択するという基本的な前提に基づくものである。

この前提を最も理想化したものが等時間原則という概念であり、これは1952年にJ.G. Wardrop¹⁾によって発表されたものである。等時間原則とは、道路上の交通量が増加すると走行速度が低下し、その結果走行所要時間が増大するので、もし個人がトリップの走行時間という自己の損失を最小にしようとする行動をとるならば、道路網上の交通流の分布は究極的には、“起終点間に存在する可能な経路のうち、利用される経路については所要時間がみな等しく、利用されないどの経路のそれよりも小さい”という平衡状態に至るといえるものである。

この法則が厳密に成り立つとは考えにくい、長い目で見れば平均的にはこれに近い状態が現出しているものと思われる。この法則は簡単明瞭であり、現在までに発表されたどの配分原則よりももっともらしい説得性のあるモデルと考えられる。

等時間原則による交通量配分の計算法に関しては、これまで多くの研究がなされてきたが、それらのほとんどは近似計算法であるか、あるいは簡単な道路網でしか計算できない実用性に欠けるものであり、厳密解を求める実用的な手法はいまだに確立されているとはいえない。

本研究では制約条件付非線形最適化手法として知られるRosenの勾配射影法を等時間原則配分に適用した結果、計算法を簡潔な形に誘導することができ、しかも計算の過程を合理的に説明できることが明らかとなった。また、この計算法を岡山市を中心とする地域の道路網に適用した結果、実用的な規模の交通量配分でも十分使用可能であることが明らかとなったので、ここに報告するものである。

2. 従来の研究の概要

J.G. Wardropによって等時間原則という配分原則が提案されて以来、この配分原則の合理性のゆえに、その実用化のためのさまざまな努力がなされてきた。

初期の研究の多くは等時間原則に関する近似解を求めるものであった。このようなものには、OD交通量を分割してトリップをそれぞれの最短時間経路に流す方法と繰り返し反復計算を用いて走行時間をしだいに修正していく方法とがある。OD交通量を分割する方法としてはCATSの方法²⁾、PATSの方法³⁾、MIT法⁴⁾などがあり、反復計算を用いる方法にはBPR法⁵⁾、TRC法⁶⁾、Wayne法⁷⁾などがある。

一方、厳密解を求める方法の多くは交通量の需給形式と等時間条件式からなる連立方程式を解くものであった。このようなものにはW.W. Mosher⁸⁾、佐佐木⁹⁾、飯田¹⁰⁾、飯田・井上・魚住¹¹⁾、S.C. Dafermos¹²⁾、佐佐木・井上^{13),14)}などの研究がある。しかし連立方程式を解く方法では、簡単な道路網での計算は可能であるが、一般の大規模な道路網を対象とした計算はほとんど不可能であった。

なお、計算に必要な経路を効率的に求める方法についてはT. Leventhalら¹⁵⁾の研究がある。

等時間原則配分において数理計画手法が用いられるようになったのは、N.O. Jørgensen¹⁶⁾によってこれが最

* 正会員 工博 岡山大学助教授 工学部土木工学科

適値問題として定式化されて以来である。S. Nguyen¹⁷⁾ は convex simplex 法を用いる計算方法を提案した。E.R. Ruiter¹⁸⁾ は最短路探索によって求められた新しい経路への配分率を Newton 法によって決定する方法を開発した。これとよく似たものに L.J. Leblanc ら¹⁹⁾ による Frank-Wolfe アルゴリズムを用いる方法があり、この方法では新しい経路への配分率が次元最小化によって求められる。これらの数理計画手法を用いる方法は、一般の大規模な道路網に対しても適用が可能であるが、解の収束性が緩慢なことが指摘されている²⁰⁾。実際の交通量配分計算では許される繰り返しの回数はせいぜい数十回程度であり、この程度の繰り返しでは十分の収束が得られない。ただ、どの程度まで解を収束させるべきであるのか、また、どの程度の繰り返しのときに最も適合度がよいのかなど問題はある。

このようにこれまで等時間原則による配分に関して多くの研究がなされてきたにもかかわらず、理論的に明解でありかつ十分実用的な方法はいまだ確立されていないといえる。

3. 定式化および解の一意性について

等時間原則による交通量配分は N.O. Jørgensen によって最適値問題として定式化されたが、いま経路交通量を変数にすると問題は次のような形に表現することができる。

目的関数

$$F = \sum_j \int_0^{X_j} f_j(X) dX \dots\dots\dots(1)$$

を制約条件

$$X_j = \sum_i \sum_k r_{ikj} x_{ik}, (j=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum_k x_{ik} = S_i, (i=1, 2, \dots, l) \dots\dots\dots(3)$$

$$x_{ik} \geq 0, (i=1, 2, \dots, l; k=1, 2, \dots, n_i) \dots\dots\dots(4)$$

のもとで最小にせよ。

ここに、

$f_j(X)$: 交通量 X の単調増加関数として表わされたリンク j の走行所要時間

X_j : リンク j の交通量

x_{ik} : OD ペア i の k 番目の経路の交通量

S_i : OD ペア i の OD 交通量

$r_{ikj} = \begin{cases} 1: \text{リンク } j \text{ が OD ペア } i \text{ の経路 } k \text{ に含まれるとき} \\ 0: \text{その他のとき} \end{cases}$

m : リンクの数

l : OD ペアの数

n_i : OD ペア i の可能なすべての経路の数

この非線形最適化問題の解が等時間原則の概念に符合するものであることは、その Kuhn-Tucker 条件によって容易に示すことができる。

ここでこの非線形最適化問題が凸計画であることを示す。制約条件は経路交通量に関して線形であるから、これらの条件式を満足する変数の集合 S は明らかに凸集合である。

次に目的関数の凸性に関する性質を調べるためにそのヘッシアン行列を求める。ヘッシアン行列の ik 行, $i'k'$ 列要素を $H_{ik,i'k'}$ とすると、

$$H_{ik,i'k'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_{ik} \partial x_{i'k'}} = \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} r_{ikj} r_{i'k'j} \dots\dots\dots(5)$$

となる。ところでテーラーの定理より、任意の 2 点 $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in S$ について次式を満足する $0 \leq \theta \leq 1$ が存在する。

$$F(\mathbf{x}^{(2)}) = F(\mathbf{x}^{(1)}) + (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})^T \nabla F(\mathbf{x}^{(1)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})^T H[\theta \mathbf{x}^{(2)} + (1-\theta) \mathbf{x}^{(1)}] \cdot (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) \dots\dots\dots(6)$$

よって、

$$F(\mathbf{x}^{(2)}) - F(\mathbf{x}^{(1)}) - (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})^T \nabla F(\mathbf{x}^{(1)}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})^T H[\theta \mathbf{x}^{(2)} + (1-\theta) \mathbf{x}^{(1)}] \cdot (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) \dots\dots\dots(7)$$

を得る。ここで $\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{d}$ とおくと、 $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in S$ より、

$$\sum_k d_{ik} = 0, (\text{OD ペア } i \text{ の経路が複数のとき})$$

$$d_{ii} = 0, (\text{OD ペア } i \text{ の経路がただ 1 本のとき})$$

でなければならない。また、このとき、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})^T H[\theta \mathbf{x}^{(2)} + (1-\theta) \mathbf{x}^{(1)}] (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T H[\mathbf{x}^{(1)} + \theta \mathbf{d}] \mathbf{d} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ik} \sum_{i'k'} d_{ik} d_{i'k'} \left(\sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} r_{ikj} r_{i'k'j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \left(\sum_{ik} r_{ikj} d_{ik} \right)^2 \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

となる。ところで $f_j(X)$ は単調増加関数を仮定しているので、

$$\frac{df_j(X_j)}{dX_j} > 0$$

また、

$$\left(\sum_{ik} r_{ikj} d_{ik} \right)^2 \geq 0$$

よって、

$$F(\mathbf{x}^{(2)}) - F(\mathbf{x}^{(1)}) - (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})^T \nabla F(\mathbf{x}^{(1)}) = \frac{1}{2} \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \left(\sum_{ik} r_{ikj} d_{ik} \right)^2 \geq 0 \dots\dots\dots(\circ)$$

このことより、

$$F(\mathbf{x}^{(2)}) \geq F(\mathbf{x}^{(1)}) + (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})^T \nabla F(\mathbf{x}^{(1)}) \dots\dots\dots(10)$$

を得る。これは $F(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x} \in S$ について凸関数であることを意味するものである。制約条件を満足する変数の集合 S が凸集合であり、しかも $\mathbf{x} \in S$ に対して目的関数が凸であるから、この非線形最小化問題は凸計画である。よって凸集合 S において到達した $F(\mathbf{x})$ の局所的最小点は大局的最小点に一致することがいえる。

次に解の一意性について考えてみる。 $F(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x} \in S$ に対して真に凸であるとき解の一意性が保証される。

ところで $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in S$ に対して式(9)が成り立つので、任意の $\mathbf{x}^{(2)} \neq \mathbf{x}^{(1)}$ すなわち $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ に対して、

$$D_j = \sum_i \sum_k r_{ikj} d_{ik}, (j=1, 2, \dots, m) \dots\dots(11)$$

のうちに0でないものが存在するとき、

$$\sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} (\sum_i \sum_k r_{ikj} d_{ik})^2 > 0$$

となるから $F(\mathbf{x})$ は真に凸となる。

ところが一般には等時間原則による配分ではこの条件は成り立たない。たとえば次の例をあげよう。図-1において、OD ペア a-b および c-d 間にそれぞれ2本の経路が存在するものとする。このとき、

$$d_{ab1} + d_{ab2} = 0$$

$$d_{cd1} + d_{cd2} = 0$$

でなければならない。そこで、

$$d_{ab1} = 1, d_{ab2} = -1$$

$$d_{cd1} = -1, d_{cd2} = 1$$

とすると、

$$D_1 = d_{cd1} + d_{cd2} = 0$$

$$D_2 = d_{cd1} + d_{ab1} = 0$$

$$D_3 = d_{cd2} + d_{ab2} = 0$$

$$D_4 = d_{cd1} + d_{cd2} = 0$$

となる。すなわち、 $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ に対してすべての D_j の値が0になってしまうのである。

よってこの例のように等時間の経路があって、それらの経路を複数のODペアが経路するとき、 $\mathbf{x} \in S$ に対して関数 $F(\mathbf{x})$ は凸ではあるが真に凸ではない。このことから、一般には等時間原則による配分では、経路交通量については解は一意的ではないことがいえる。

解が一意的であるのは、すべての起終点間で経路がそれぞれただ1本である場合、および等時間の経路対があってもそれらを経由するODペアが唯一である場合に

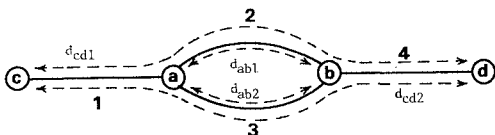


図-1 等時間パターンの例 1

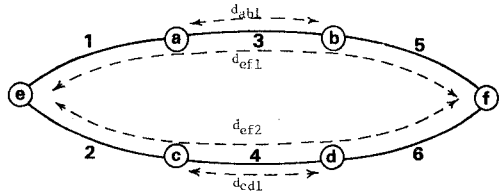


図-2 等時間パターンの例 2

限られる。前者の場合には、解が一意的であるのは自明である。後者の場合たとえば図-2のような例を考えよう。ここで、OD ペア a-b および c-d 間にはそれぞれただ1本の経路しか存在せず、OD ペア e-f 間には2本の等時間経路が存在するものとする。このとき、

$$d_{ef1} + d_{ef2} = 0$$

$$d_{ab1} = d_{cd1} = 0$$

でなければならないが、 $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ ということから、

$$d_{ef1} = d_{ef2} = 0$$

となることはできない。よってこのとき、

$$D_1 = D_3 = D_5 = d_{ef1} \neq 0$$

$$D_2 = D_4 = D_6 = d_{ef2} \neq 0$$

となるから、 $\mathbf{x} \in S$ に対して $F(\mathbf{x})$ は真に凸であり、解は一意的である。

なお、それぞれのリンクを通る経路交通量を加え合わせたリンク交通量に関しては、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_j} = \begin{cases} \frac{df_j(X_j)}{dX_j}, & (j=j') \\ 0, & (j \neq j') \end{cases} \dots\dots(12)$$

であり、任意の $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ に対して $X_j (j=1, 2, \dots, m)$ のうちには0でないものが1つ以上あるから、

$$\mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} = \sum_j X_j^2 \frac{df_j(X_j)}{dX_j} > 0 \dots\dots(13)$$

が成り立つ。よってヘッシアン行列 H は正値行列であるから目的関数は真に凸である。制約条件を満足する \mathbf{X} の集合は明らかに凸集合であるから、リンク交通量に関しては解は一意的であることが保証される。

4. ローゼンの勾配射影法の適用

線形制約条件に対するローゼンの勾配射影法²¹⁾は、実行可能点 $\mathbf{x} \in S$ が与えられたとき、使用可能の条件 $\mathbf{d}^T \nabla f(\mathbf{x}) < 0$ を満たす許容方向ベクトル \mathbf{d} として、最急降下方向 $-\nabla f(\mathbf{x})$ を有効制約条件から作られる線形多様体 M_q に直交射影したものを採用する方法である。この方法ではベクトルの射影は次式で与えられる射影マトリックスにベクトルを乗じることによって得られる。

$$P_s = E - A_s [A_s^T A_s]^{-1} A_s^T \dots\dots(14)$$

ここに、 E は単位行列、 A_s は有効制約条件式の係数ベクトルを列要素にもつマトリックスである。このとき

$P_s^2 = P_s$, $P_s = (P_s)^T$ であるから,

$d^T \nabla f(\mathbf{x}) = (-P_s \nabla f(\mathbf{x}))^T \nabla f(\mathbf{x}) = -\|P_s \nabla f(\mathbf{x})\|^2 = -\|d\|^2 < 0$

となるから d は常に降下方向である.

いま, あるステップでの OD ペア i に関する経路を適当に並べ換え, 配分の対象とされている交通量の割り当てられている経路を $1, 2, \dots, r_i$, 他のすべての交通量の割り当てられていない経路を r_i+1, r_i+2, \dots, n_i とすると, これらの経路交通量についての有効制約条件式は,

$\sum_k x_{ik} = S_i \dots\dots\dots(15)$

$x_{ik} = 0, (k = r_i+1, r_i+2, \dots, n_i) \dots\dots\dots(16)$

であるから, 探索方向ベクトルの OD ペア i についての成分がこれらの条件式を満足するように射影を行えばよい. これらの有効制約条件式の係数ベクトルを列要素とする行列は,

$$A_{si} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r_i \\ r_i+1 \\ r_i+2 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & & & \\ \vdots & & & \\ r_i & & & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ r_i+1 & & & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ r_i+2 & & & 1 & & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\ n_i & & & 1 & & \vdots & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \dots\dots\dots(17)$$

となる. これより OD ペア i についての射影マトリックス P_{si} を計算すると,

$P_{si} = E - A_{si}^T [A_{si} A_{si}^T]^{-1} A_{si}$

$$= \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r_i \\ r_i+1 \\ r_i+2 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & r_i & r_i+1 & r_i+2 & \dots & n_i \\ \hline 1 - \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_i} & & \frac{1}{r_i} & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ r_i & & & & & & & 0 \\ \hline 2 - \frac{1}{r_i} & 1 - \frac{1}{r_i} & & \frac{1}{r_i} & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ r_i+1 & & & & & & & \\ \hline r_i+2 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ n_i & & & & & & & 0 \end{matrix} \dots\dots\dots(18)$$

を得る. ところで,

$\frac{\partial F}{\partial x_{ik}} = \sum_j f_j(X_j) r_{ijk} \dots\dots\dots(19)$

であるが, この式の右辺は OD ペア i の経路 k の走行所要時間に等しい. そこでこれを t_{ik} とおくと, 勾配ベクトルの OD ペア i に関する成分 \mathbf{g}_i は,

$$\mathbf{g}_i = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{i1}} \\ \frac{\partial F}{\partial x_{i2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_{in_i}} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{bmatrix} t_{i1} \\ t_{i2} \\ \vdots \\ t_{in_i} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

となる. よって $-\mathbf{g}_i$ を射影マトリックス P_{si} に乗じて得られる射影は,

$$-P_{si} \mathbf{g}_i = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r_i \\ r_i+1 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{bmatrix} -t_{i1} + \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} t_{ik} \\ -t_{i2} + \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} t_{ik} \\ \vdots \\ -t_{ir_i} + \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} t_{ik} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

となる.

ある実行可能な点 $\mathbf{x} \in S$ から方向 \mathbf{d} への探索は, すべての OD ペアについて同時的に行うが, このとき計算の効率を上げるために変数の尺度について考慮する必要がある. ところで OD ペア i の経路交通量については,

$\sum_k x_{ik} = S_i$

という条件式で制約されているので, 同一の等時間の経路対を有する複数の OD ペアについて, 探索のステップ幅を OD 交通量の値に比例させるのが適当であると考えられる. このことから探索方向ベクトルの OD ペア i に関する成分を次式によって決定する.

$$\mathbf{d}_i = -S_i P_{si} \mathbf{g}_i = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r_i \\ r_i+1 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{bmatrix} S_i(-t_{i1} + t_{i0}) \\ S_i(-t_{i2} + t_{i0}) \\ \vdots \\ S_i(-t_{ir_i} + t_{i0}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(22)$$

($i=1, 2, \dots, l$)

ここに,

$t_{i0} = \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} t_{ik}, (i=1, 2, \dots, l) \dots\dots\dots(23)$

である. もちろん, この探索方向が実行可能であり, かつ降下方向であることには変わりはない.

式 (22) で決定される方向 \mathbf{d} への一次元最小化は, このときの制約条件が侵されない範囲でなければならない. よって $d_{ik} < 0$ となる経路に対しては,

$x_{ik} + \lambda d_{ik} \geq 0$

より,

$\lambda \leq -\frac{x_{ik}}{d_{ik}}$

でなければならない。\$d_{ik}\$ が負のすべての経路に対してこの条件を満足させるためには、

$$\lambda \leq \lambda_{\max} \equiv \min_{\substack{i, 1 \leq k \leq r_i \\ d_{ik} < 0}} \left(-\frac{x_{ik}}{d_{ik}} \right) \dots \dots \dots (24)$$

でなければならないことになる。こうして \$0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}\$ の範囲で一次元最小化を実行することにより、経路交通量の値が改良され、目的関数の値がより小さくなる。

ところで一次元最小化の結果 \$F(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})\$ を最小にする \$\lambda\$ の値が \$\lambda_{\max}\$ に一致したときには、このとき対応する経路の交通量は 0 となっているはずである。これをたとえば、OD ペア \$i\$ の \$k\$ 番目の経路とすると、次の探索方向を決めるときには \$x_{ik} = 0\$ が新たに有効制約条件として加わるので、これを行列 \$A_s\$ に含めなければならない。有効制約条件 \$x_{ik} = 0\$ が \$A_s\$ に付加されると射影マトリックスが変わるけれども、これはそのつど新たに計算し直す必要はない。なぜなら式 (22), (23) より明らかのように、探索方向は配分対象経路の走行所要時間を計算するだけで求まるのであるから、実際にはこの経路を配分対象経路から除くという操作だけでよいのである。

こうして次々と経路交通量の値が更新されていくが、それらの最適性の判定には Rosen の勾配射影法では Kuhn-Tucker 条件が用いられる。それは、

$$\mathbf{d} = \mathbf{0}$$

および、

$$\boldsymbol{\alpha} = [A_s^T A_s]^{-1} A_s^T \mathbf{g} \geq \mathbf{0}$$

という条件である。式 (17), (20), (22) を代入すると、これらの条件は次のようになる。

$$\mathbf{d}_i = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r_i \\ r_i + 1 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{bmatrix} S_i(-t_{i1} + t_{i0}) \\ S_i(-t_{i2} + t_{i0}) \\ \vdots \\ S_i(-t_{ir_i} + t_{i0}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, (i=1, 2, \dots, l) \dots \dots \dots (25)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{matrix} r_i + 1 \\ r_i + 2 \\ \vdots \\ n_i \end{matrix} \begin{bmatrix} t_{i0} \\ l_{ir_i+1} - t_{i0} \\ l_{ir_i+2} - t_{i0} \\ \vdots \\ l_{in_i} - t_{i0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, (i=1, 2, \dots, l) \dots \dots \dots (26)$$

\$\mathbf{d} = \mathbf{0}\$ および \$\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}\$ が成り立つとき、交通量の割り当てられている経路については所要時間が皆等しく、しかもそれらは交通量の割り当てられていないいかなる経路の所要時間よりも小さいという状態の成り立っていることは明らかである。もし \$\mathbf{d} = \mathbf{0}\$ でないなら、その方向への一次元最小化を実行すればよい。\$\mathbf{d} = \mathbf{0}\$ で \$\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}\$ で

ないなら、すなわち \$\alpha_{ik}\$ のうちで負の値をもつ要素が存在するなら、そのうちの最小のものを求め、たとえばこれを \$\alpha_{ik}\$ とすると、この要素に対応する有効制約条件 \$x_{ik} = 0\$ を行列 \$A\$ から取り除けばよい。こうして得られる新しい探索方向ベクトルは許容降下方向である。

ところで、

$$\min_{r_i+1 \leq k \leq n_i} \alpha_{ik} = \min_{r_i+1 \leq k \leq n_i} (t_{ik} - t_{i0}) \dots \dots \dots (27)$$

であるから、OD ペア \$i\$ の経路のうち、\$\alpha\$ が負であってそのうちの最小の値をもつ経路とは、現在交通量の割り当てられていないものであって、かつ、OD ペア \$i\$ の起終点間の最短時間経路となっているものである。したがって、この経路は起終点間の最短経路探索によって求めることができ、もし最短経路探索によって求めた経路がすでに配分の対象とされているものであれば、条件 \$\alpha_i \geq \mathbf{0}\$ は満たされていることになる。

以上より交通量が割り当てられる有効経路を見つけ出すためには、\$\mathbf{d} = \mathbf{0}\$ すなわち探索方向ベクトルが零ベクトルとなったときに最短経路探索を行い、この結果、求まる新たな経路を配分対象として有効経路に含めればよい。もちろん有効制約条件式 \$x_{ik} = 0\$ を行列 \$A_s\$ から取り除くということは、実際の計算のうえではこの経路を新たに配分対象経路に含めるということを意味するのである。

なお、この方法で計算を行っていくためには、初めに実行可能な点を 1 つ与えておかなければならない。これに対する妥当なものとして、たとえば零フロー時の起終点間の最短時間経路にそれぞれの OD 交通量を割り当てたものを用いればよいであろう。

5. 一次元最小化の方法

実行可能点 \$\mathbf{x}_0 \in S\$ から探索方向 \$\mathbf{d}\$ への一次元最小化は通常よく用いられる黄金分割、Fibonacci 級数を用いる方法あるいは Almijo の方法などの汎用的な方法を用いることができる。しかし、これらの方法では各リンクの走行時間の計算回数が多く、あまり効率的であるとはいえない。そこでここでは数少ないステップで一次元最小化が実行できる方法を示す。

いま目的関数をリンク交通量に関して 2 階の導関数の項までテーラー展開すると、

$$F(\mathbf{X}) \cong F(\mathbf{X}_0) + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \nabla F(\mathbf{X}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \nabla^2 F(\mathbf{X}_0) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \dots \dots \dots (28)$$

ここで \$\mathbf{X}_0\$ はリンク交通量の現在の値である。ところで \$\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\$ はリンク交通量に関する \$\mathbf{X}_0\$ からの探索方向に一致するからこれを \$\lambda \mathbf{D}\$ とおくと次式が成り立つ。

$$\lambda \mathbf{D} \equiv \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 = \lambda \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_i \sum_k r_{ikj} d_{ik} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

また,

$$\mathbf{v}^T F(\mathbf{X}_0) = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_j(X_{0j}) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

$$\mathbf{v}^T F(\mathbf{X}_0) = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots \\ \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \Big|_{X_j=X_{0j}} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

であるから、これらを式 (28) に代入すると、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{X}) &\equiv F(\mathbf{X}_0) + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{v}^T F(\mathbf{X}_0) + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathbf{D}^T \mathbf{v}^T F(\mathbf{X}_0) \mathbf{D} \\ &= F(\mathbf{X}_0) + \lambda \sum_{j=1}^m D_j f_j(X_{0j}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{j=1}^m D_j^2 \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \Big|_{X_j=X_{0j}} \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

となる。F(X) を最小にする λ の値に関する近似値 λ₀ は、式 (32) を λ で微分して 0 とおくことによって得られるから、

$$\sum_{j=1}^m D_j f_j(X_{0j}) + \lambda_0 \sum_{j=1}^m D_j^2 \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \Big|_{X_j=X_{0j}} = 0$$

よって、

$$\lambda_0 = - \frac{\sum_{j=1}^m D_j f_j(X_{0j})}{\sum_{j=1}^m D_j^2 \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \Big|_{X_j=X_{0j}}} \dots\dots\dots (33)$$

となる。

この探索ステップによって経路交通量、リンク交通量の値が更新され、

$$\mathbf{x} : = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d} \dots\dots\dots (34)$$

$$\mathbf{X} : = \mathbf{X}_0 + \lambda_0 \mathbf{D} \dots\dots\dots (35)$$

となる。この計算を 2, 3 回繰り返せばよいのであるが、実用的にはほとんど 1 回の計算で十分である。なお λ については式 (24) より 0 ≤ λ ≤ λ_{max} でなければならないから、λ₀ > λ_{max} のときには λ₀ := λ_{max} としなければならないことはいうまでもない。

6. 配分計算の手順

以上に述べた計算の原理より、配分計算の手順をまとめると次のようになる。

(i) 零フロー時の各リンクの走行所要時間を用いて、すべての起終点間の最短経路探索を行う。これらの経路を記憶する。それぞれの OD 交通量を求めた最短経路に割り当て、各リンクの走行所要時間を修正する。

(ii) すべての起終点間の最短経路探索を行う。求めた経路が新しい経路であれば記憶する。すでに記憶しているものと同じであれば捨てる。新しい経路がどの OD ペアについても求められなければ Kuhn-Tucker 条件が成立しているので計算を終る。

(iii) 記憶している配分対象経路について探索方向ベクトルの要素を求める。

$$d_{ik} = S_i \left(\frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} t_{ik} - t_{ik} \right) \quad (i=1, 2, \dots, l; k=1, 2, \dots, r_i)$$

もし $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ なら (ii) へ。

(iv) 配分対象経路のうちで、 $x_{ik} = 0$ かつ $d_{ik} < 0$ となっている経路があればこれらの経路を捨てる。求めた探索方向へのステップ幅の最大値を求める。

$$\lambda_{\max} = \min_{i,k} \left(- \frac{x_{ik}}{d_{ik}} \right), \quad (d_{ik} < 0)$$

(v) リンクについての探索方向を計算する。

$$D_j = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{r_i} r_{ikj} d_{ik} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

0 ≤ λ ≤ λ_{max} の範囲で F(X + λD) を最小にする λ の値 λ₀ を求める。

$$\lambda_0 = \min \left(- \frac{\sum_{j=1}^m D_j f_j(X_j)}{\sum_{j=1}^m D_j^2 \frac{df_j(X_j)}{dX_j}}, \lambda_{\max} \right)$$

(vi) 経路交通量、リンク交通量の値を更新する。

$$\mathbf{x} : = \mathbf{x} + \lambda_0 \mathbf{d}$$

$$\mathbf{X} : = \mathbf{X} + \lambda_0 \mathbf{D}$$

更新されたリンク交通量を用いて、リンク走行時間を修正する。(iii) へ。

なお、上に述べた手順では Kuhn-Tucker 条件が完全に成立するまで繰り返すようになっているが、実用的にはあらかじめ定められた回数だけ (ii) 以下を繰り返せばよい。その場合の繰り返し回数は数回で十分である。

7. 計算例

本計算法の適用例として、岡山市を中心とする地域の道路網への配分に適用した結果を示す。対象とした道路網は岡山市の市街地およびその周辺部の道路からなり、ノード数 121、リンク数 186 である。トリップの発生・吸引点は 50、OD ペアの数は 1225 である。なお、OD 表は三角 OD 表として与えており、道路は両方向を一緒にして扱っている。OD 交通量は昭和 46 年に実施された岡山県南都市圏パーセントトリップ調査で集計さ

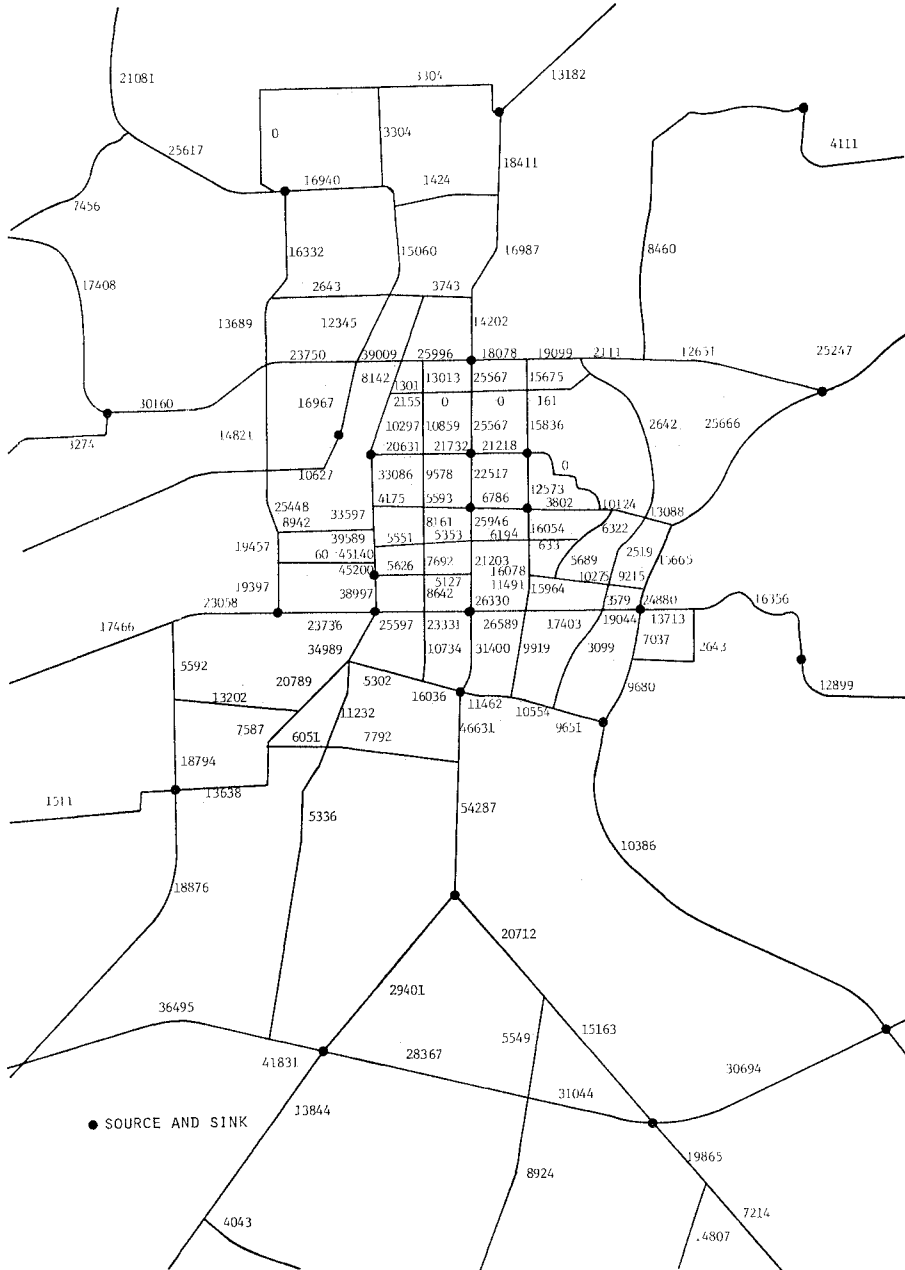


図-3 岡山市道路網への配分結果の一部(台/日)

れた自動車OD表を若干修正して用いた。各リンクの走行時間関数は $f(X) = T_0 e^{CX}$ の形を用いており、定数 T_0 、 C の値は道路を 16 のランクに分けて算出した。

この計算では 4 回の繰り返しの結果もはや新しい経路が求まらなくなり、計算が終了した。したがって解が収束するまでの最短経路探索の回数は、初期値を求めるための探索とあわせて 5 回である。この結果、交通量の割り当てられた経路は 2083 本になった。したがって、1 OD 当たり平均 1.7 本の経路に配分されていることになる。

等時間経路間の所要時間の差はほとんどの OD ペア間で 0.01 分以下となった。4 回の繰り返しの結果求まった道路区間交通量の値を図-3 に示す。また、いくつかのリンクについての交通量の収束状態を図-4 に、いくつかの OD ペアについての経路交通量と走行所要時間の収束状況を表-1 に示す。

なお、本計算では手順 (iii) における $d=0$ の判定を

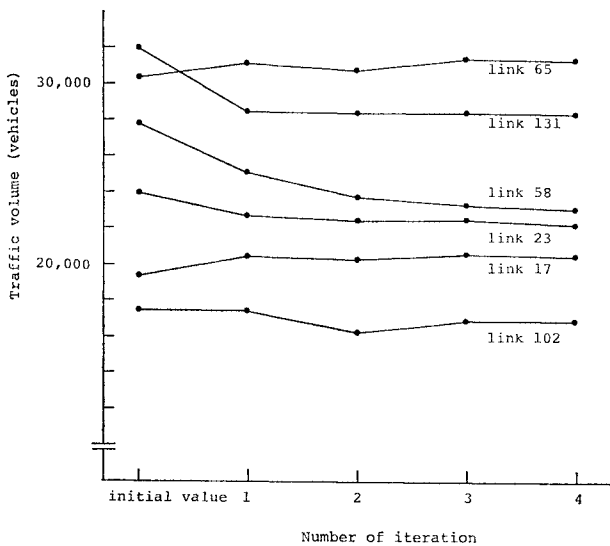
$$\|d\| = \sqrt{\sum_{i,k} d_{ik}^2} < 1000 \text{ (分)}$$

によって行っている。この判定条件を厳しくするほど等時間経路間の所間時間の差は小さくなるが、計算時間は逆に大きくなる。実際の配分計算ではこの判定条件はもっと緩めてもよいであろう。

本計算は岡山大学計算機センターの ACOS 700 (主記憶 1.5 メガバイト, MIPS 1.1) を使用して行った。プ

表一 いくつかの OD ペアの経路交通量 (上段, 台/日) と走行所要時間 (下段, 分)

起点	終点	経路番号	繰り返り回数				
			初期値	1	2	3	4
5	9	1	1338.0 (4.14)	874.1 (4.10)	709.0 (4.12)	630.8 (4.08)	587.1 (4.08)
		2	—	463.9 (4.03)	629.0 (4.07)	670.8 (4.04)	698.6 (4.04)
		3	—	—	—	36.4 (4.05)	52.3 (4.05)
1	19	1	298.0 (6.55)	298.0 (6.46)	298.0 (6.45)	295.3 (6.46)	292.4 (6.48)
		2	—	—	—	2.7 (6.48)	1.4 (6.47)
		3	—	—	—	—	4.2 (6.47)
2	8	1	658.0 (3.14)	254.0 (3.11)	33.6 (3.06)	347.0 (3.01)	325.7 (3.01)
		2	—	404.0 (3.03)	381.1 (3.00)	267.3 (2.97)	276.6 (2.98)
		3	—	—	243.3 (2.96)	43.7 (2.97)	55.7 (2.98)
10	22	1	419.0 (8.13)	419.0 (8.48)	405.2 (8.39)	403.5 (8.36)	403.9 (8.35)
		2	—	—	13.8 (8.38)	15.5 (8.36)	15.1 (8.35)
5	50	1	559.0 (21.81)	559.0 (21.71)	490.0 (21.78)	457.3 (21.74)	429.9 (21.74)
		2	—	—	69.0 (21.73)	86.5 (21.70)	88.9 (21.71)
		3	—	—	—	15.2 (21.72)	12.7 (21.71)
		4	—	—	—	—	27.5 (21.68)



図一四 リンク交通量の収束状況

ログラムは FORTRAN により作成した。計算の実行に使用したメモリーは 78 K ワード, CPU タイムは 1 821 秒であった。

8. 結 論

本研究は従来大規模な道路網ではほとんど不可能とされていた等時間原則による交通量配分の厳密解を求める実用的計算法を開発したものである。ここで結論をまとめると次のようになる。

(1) 等時間原則による交通量配分では道路区間交通量は一意的に定まるが、等時間経路対を複数の OD ペアが経由するときには、経路交通量は一意的には定まらない。経路交通量が一意的であるのは、すべての OD ペアで最短時間経路が唯一であるとき、および等時間経路対があってもそれらを經由する OD ペアが唯一である場合に限られる。以上を数理計画理論により説明した。

(2) 等時間原則による配分は経路交通量を変数として凸形非線形計画問題として定式化することができる。よって局所的最適解が大局的最適解に一致するので勾配法の適用が可能である。

(3) Rosen の勾配射影法を適用したとき、射影されたベクトルの各経路交通量に関する要素は、交通量の配分されている有効経路間の平均所要時間と経路走行所要時間との差により表わされる。変数の尺度を考慮したとき、探索方向はこの射影に各 OD ペアの OD 交通量を乗じたものにするのが適当である。

(4) 決定された探索方向への一次元最小化に関しては、目的関数のリンク交通量に関するヘッシアン行列が対角形になることから、ニュートン法を用いて 1 回のステップで一次元最小化を実行することができる。

(5) 最適性の判定条件は Kuhn-Tucker 条件により与えられるが、この条件に関する判定は、探索方向ベクトルが零ベクトルとなったとき、すべての起終点間の最短経路を探索することによって実行できる。これによって求まる新しい経路を有効経路として記憶しておくことによって、すべての可能な経路を計算の対象とする必要はない。

(6) 本計算法は Rosen の勾配射影法に理論的基礎をおくものであるが、探索方向ベクトルや最適性の判定条件などが簡潔な形で表現できるため、いちいち射影マトリックスを計算する必要はない。

(7) 本計算法を岡山市を中心とする地域の道路網への配分に適用した結果、数回の反復によっ

て解が収束し、計算が終了することが明らかになった。これより大型計算機を使用すれば、一般の実用的な規模の配分計算でも十分適用可能であると思われる。

本計算法では探索された経路を記憶しておかなければならないという欠点があるが、これについては1ビットに1配列要素を記憶させる、あるいは高速の外部記憶装置を用いるなどプログラムの工夫によって補うことが可能であると考えられる。

今後は他の計算法との計算の効率の比較を行うとともに、より大規模な道路網での計算にも適用できるように、アルゴリズムおよびプログラムの改良を図りたい。

最後に本研究を行うにあたり、ご指導およびご討議をいただいた岐阜大学 加藤 晃教授に深甚なる謝意を表する次第であります。

参 考 文 献

- 1) Wardrop, J.G. : Some Theoretical Aspect of Road Research, Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, pp. 325~378, 1952.
- 2) Chicago Area Transportation Study Final Report, Vol. 1, 1959, Vol. 2, 1960.
- 3) Pittsburg Area Transportation Study, Vol. 1, 1961, Vol. 2, 1962.
- 4) Final Report of the Highway Transportation Demand Research Project, Research Report R 65-24, M.I.T., 1965.
- 5) Traffic Assignment Manual, Bureau of Public Roads, Office of Planning, Urban Planning Division, 1964.6.
- 6) Irwin, N.A., N. Dodd and H.G. Voncubé : Capacity Restraint in Assignment Programs, H.R.B. Bulletin 297, pp. 109~127, 1961.
- 7) Smock, R. : An Iterative Assignment Approach to Capacity Restraint on Arterial Networks, H.R.B. Bulletin 347, pp. 60~66, 1962.
- 8) Mosher, W.W. : A Capacity-Restraint Algorithm for Assigning Flow to Transport Network, HRB, Highway Research Record, No. 6, pp. 41~68, 1963.
- 9) 佐佐木 綱 : 道路網における交通量の配分方法, 日本地域学会年報第2号, pp. 19~34, 1963.
- 10) 飯田恭敏 : バスフローを用いた等時間原則による交通量配分, 土木学会論文報告集第168号, pp. 45~57, 1969. 8.
- 11) 飯田恭敏・井上博司・魚住隆彰 : カット法による交通量配分, 土木学会論文報告集第196号, pp. 95~103, 1971. 12.
- 12) Dafermos, S.C. : An Extended Traffic Assignment Model with Applications to Two-Way Traffic, Transportation Science, Vol. 5, No. 4, pp. 366~389, 1971. 11.
- 13) 佐佐木 綱・井上博司 : 等時間原則による交通量配分の繰り返し計算法, 土木学会論文報告集第215号, pp. 43~47, 1973.7.
- 14) Sasaki, T. and H. Inouye : Traffic Assignment by Analogy to Electric Circuit, Proceedings of the Sixth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp. 495~518, 1974.8.
- 15) Leventhal, T., G. Nemhauser and L. Trotter Jr. : A Column Generation Algorithm for Optimal Traffic Assignment, Transportation Science, Vol. 7, No. 2, pp. 168~176, 1973.5.
- 16) Jørgensen, N.O. : Some Aspects of the Urban Traffic Assignment Problem, I.T.T.E. Graduate Report, University of California, Berkley, 1963.
- 17) Nguyen, S. : An Algorithm for the Traffic Assignment Problem, Transportation Science, Vol. 8, No. 3, pp. 203~216, 1974.8.
- 18) Ruiter, E.R. : Implementation of Operational Network Equilibrium procedures, Transportation Research Record, 491, pp. 40~51, 1974.
- 19) Leblanc, L.J., E.K. Morlok and W.P. Dierskalla : An Accurate and Efficient Approach to Equilibrium Traffic Assignment on Congested Networks, Transportation Research Record, 491, pp. 12~23, 1974.
- 20) 加藤 晃・宮城俊彦・平岡 隆 : 最短経路原則に基づく交通配分法の比較・検討, 交通工学第14巻第7号, pp. 3~11, 1979.11.
- 21) Rosen, J.B. : The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part 1. Linear Constraints, J. SIAM, 8, pp. 181~217, 1960.

(1980.5.28・受付)