

統計的手法による波動伝達関数の推定

A STATISTICAL METHOD FOR ESTIMATION OF WAVE TRANSFER FUNCTION

木 下 繁 夫*
By Shigeo KINOSHITA

1. ま え が き

強震地動が表層軟弱地盤の振動特性に依存することは、多く指摘されるところである。表層地盤における各種波動伝播形態の中で、理論的取扱いの容易さもあって、最下層から垂直入射する SH 波の多重反射形態が多くの工学的問題の処理に利用されている。しかしながら、この波動伝播形態が、強震地動の構成に占める割合についての明解な結論は得られていない。

一方、実証記録を得るため、地表・地中の同時地震観測は、近年に至り盛んになり、現在百地点以上で観測と記録の蓄積が行われているといわれる。しかるに、波動伝播形態の区分、地盤の伝達特性の推定およびモデル化を実証記録に基づいて行う場合は、理論的考察とは異なる推定法の問題があり、精度よくこれらを行うことは困難な問題の 1 つである。

地盤の波動伝達系は、SH 波の多重反射形態において、強いフィード・バック系を構成する。したがって水平多層地盤の最下層における観測波は、地表観測波に含まれる最下層外から混入した波および最下層に入射した SH 波以外の波の影響を受けるのが普通である。このような入力雑音をもつ系に対して、相互スペクトル密度関数を用いる一般的な周波数応答関数推定法は適用外である¹⁾。

このためか、相互スペクトル密度関数の利用は位相特性推定へなされているが、利得特性（いわゆる周波数-振幅増幅度曲線）推定に対しては少なく、特定の数学的モデルを仮定せずに、定常理論のみに基づくフーリエ解析法やパワー・スペクトルを用いる方法および物理的モデルを組み込んだスペクトル・フィティングの方法等が利得特性推定のために用いられているのが現状である^{2), 3)}。

しかしながら、利得特性推定のために、地表および最下層における観測波を独立に扱うこれらの方法では、最下層への入射波に対して、地表観測波は、そのスペクトル特性の山形部分を強調するような構造をもつ系（次章の $G_0(\lambda)$ ）の出力であり、最下層観測波は、逆に、そのスペクトル特性の谷形部分を強調するような構造をもつ系（次章の $G_2(\lambda)$ ）の出力であるため、地表観測波のスペクトル特性の山形部分と最下層観測波のスペクトル特性の谷形部分とが近い卓越振動数近傍において推定が不安定となる。

ただし、フーリエ・スペクトル・フィティング法は、適切な適合誤差尺度と計算法が確立されるとするならば、精度のよい推定が期待される。実際に、河村は、この方法を用いて、減衰定数の定量的な検討を行っている⁴⁾。

しかしながら、伝達関数推定問題において、推定区間が多重反射形態にあることの判定は本質的であり、これを解決せねば結果の解釈が複雑となるのは明らかである。現状では、表面波の分散性を識別の根拠として、ランニング・スペクトル解析に基づく主観的判断が多くの場合なされている⁵⁾。これは、地表および最下層における同時観測波の振幅情報のみの利用であり、位相情報を含む相互共分散関数が、垂直方向への波動伝播時間推定に有効であり²⁾、波動伝播形態の判断に関する情報を含むことが示唆されているにもかかわらず、この利用はいまだなされていない。

本報告においては、これらの問題を解決するために、最下層から垂直入射する SH 波に対する地盤の波動伝達関数推定のための時系列モデルを提案し、このモデルに適合誤差尺度としての情報量規準（AIC）を用いる最小 AIC 推定法⁶⁾を適用することにより、多重反射形態の判定と波動伝達関数の最尤推定とを並行して扱う 1 つの統計的手法を提案することを目的としている。

* 正会員 国立防災科学技術センター研究員

2. 波動伝達関数推定のための時系列モデル

(1) 波動伝達関数の近似表現

最下層内から垂直入射する SH 波について、最下層上の表層地盤の波動伝達関数を構成するため、以下のような仮定を設ける。まず、最下層上の表層地盤は、これを p 分割して得られる p 個の薄層から構成されるとする。そして、各薄層は、おのおの均質な媒体からなり、SH 波の通過時間が共通に $T/2$ であるとするとする。さらに、表層地盤との境界から、SH 波が時間 $T/2$ で到達する最下層内の仮想薄層を第 $(p+1)$ 層とする。 p 分割後の各薄層は、地表側から番号付けられているとする。これらの仮定に基づいて、表層地盤の波動伝達関数は、以下の 2 段階で構成される。

a) 行列法による表現

第 k 層を垂直に伝播する第 $(k+1)$ 層との境界における上昇波および第 $(k-1)$ 層との境界における下降波を、正規化円振動数

$$\lambda = \omega T, |\lambda| \leq \pi \dots \dots \dots (1)$$

を周波数パラメーターとして、 $U_k(\lambda)$ および $D_k(\lambda)$ と周波数領域で記述する。仮定に基づき、第 k 層および第 $(k+1)$ 層において、

$$\begin{bmatrix} U_{k+1}(\lambda) \\ D_{k+1}(\lambda) \end{bmatrix} = (1 - \tau_k)^{-1} Q_k(\lambda) \begin{bmatrix} U_k(\lambda) \\ D_k(\lambda) \end{bmatrix} \dots (2)$$

$$(0 \leq k \leq p)$$

となる。ここに、

$$Q_k(\lambda) = \begin{bmatrix} z^{1/2} & -\tau_k \\ -\tau_k & z^{-1/2} \end{bmatrix}, z = \exp(i\lambda) \dots \dots \dots (3)$$

であり、 τ_k は第 k 層と第 $(k+1)$ 層との境界における $D_k(\lambda)$ の反射係数である。また、 $\tau_0 = -1$ および $D_0(\lambda) = 0$ とする。

$$A_k(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)}(\lambda) & a_{12}^{(k)}(\lambda) \\ a_{21}^{(k)}(\lambda) & a_{22}^{(k)}(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\equiv \prod_{n=0}^k Q_n(\lambda) \dots \dots \dots (4)$$

および

$$s_k \equiv \prod_{n=0}^k (1 - \tau_n) \dots \dots \dots (5)$$

なる記号を用いれば、式 (2) を繰り返して適用することにより、波動伝達関数 $G_0(\lambda)$ (= 地表観測波/最下層入射波)、 $G_1(\lambda)$ (= 地表観測波/最下層観測波) および $G_2(\lambda)$ (= 最下層観測波/最下層入射波) は、

$$G_0(\lambda) \equiv \frac{U_0(\lambda)}{z^{-1/2} U_{p+1}(\lambda)}$$

$$\equiv \frac{s_p}{z^{-1/2} a_{11}^{(p)}(\lambda)} \dots \dots \dots (6)$$

$$G_1(\lambda) \equiv \frac{U_0(\lambda)}{z^{-1/2} U_{p+1}(\lambda) + D_{p+1}(\lambda)}$$

$$\equiv \frac{s_p}{z^{-1/2} a_{11}^{(p)}(\lambda) + a_{21}^{(p)}(\lambda)} \dots \dots \dots (7)$$

および

$$G_2(\lambda) \equiv \frac{z^{-1/2} U_{p+1}(\lambda) + D_{p+1}(\lambda)}{z^{-1/2} U_{p+1}(\lambda)}$$

$$\equiv 1 + \frac{a_{21}^{(p)}(\lambda)}{z^{-1/2} a_{11}^{(p)}(\lambda)} \dots \dots \dots (8)$$

となる。波動伝達関数のこのような行列成分による表現法が、いわゆるハスケルの方法⁷⁾といわれるものである。

b) 有理関数形表現

次に、式 (2)、(3) および (4) から得られる関係式

$$a_{11}^{(k)}(\lambda) = z^{1/2} a_{11}^{(k-1)}(\lambda) - \tau_k a_{21}^{(k-1)}(\lambda) \dots (9)$$

$$(1 \leq k \leq p)$$

および

$$a_{21}^{(k)}(\lambda) = z^{-1/2} a_{21}^{(k-1)}(\lambda) - \tau_k a_{11}^{(k-1)}(\lambda) \dots (10)$$

$$(1 \leq k \leq p)$$

を利用すれば、

$$a_{11}^{(k)}(\lambda) = z^{1/2} a_{21}^{(k)}(-\lambda), (0 \leq k \leq p) \dots (11)$$

が数学的帰納法により証明される。また、式 (9)、(10) および (11) から、

$$a_{11}^{(k)}(\lambda) = z^{1/2} [a_{11}^{(k-1)}(\lambda) - \tau_k a_{11}^{(k-1)}(-\lambda)]$$

$$(1 \leq k \leq p) \dots \dots \dots (12)$$

なる漸化式が得られる。ここに、 $a_{11}^{(0)}(\lambda) = z^{1/2}$ とする。さらに、

$$a_k(\lambda) = z^{-(k+1)/2} a_{11}^{(k)}(\lambda), (0 \leq k \leq p) \dots (13)$$

なる変換により、式 (12) は、

$$a_k(\lambda) = a_{k-1}(\lambda) - \tau_k z^{-k} a_{k-1}(-\lambda) \dots \dots \dots (14)$$

$$(1 \leq k \leq p)$$

となる。ここに、 $a_0(\lambda) = 1$ である。式 (14) から、 $a_k(\lambda)$ は z^{-1} の多項式で、

$$a_k(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^k g_n^{(k)} z^{-n} \dots \dots \dots (15)$$

とすれば、

$$g_k^{(k)} = -\tau_k, (1 \leq k \leq p) \dots \dots \dots (16)$$

および

$$g_n^{(k)} = g_n^{(k-1)} + g_k^{(k)} g_{k-n}^{(k-1)} \dots \dots \dots (17)$$

$$(1 \leq n \leq k-1)$$

が得られる。結局、式 (6) および (7) は、

$$G_0(\lambda) = \frac{s_p z^{-b}}{a_p(\lambda)}$$

$$\equiv \frac{s_p z^{-b}}{\sum_{k=0}^p g_k^{(p)} z^{-k}} \dots \dots \dots (18)$$

および

$$G_1(\lambda) = \frac{s_p z^{-b}}{a_p(\lambda) + z^{-p} a_p(-\lambda)}$$

$$= \frac{s_p z^{-b}}{\sum_{k=0}^p (g_k^{(p)} + g_{p-k}^{(p)}) z^{-k}} \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここに、 $g_0^{(p)}=1$ および $b=p/2$ とする。また、 $G_1(0)=1$ から、

$$s_p = \sum_{k=0}^p (g_k^{(p)} + g_{p-k}^{(p)}) \dots\dots\dots (20)$$

となり、

$$G_1(\lambda) = \frac{(1 + \sum_{k=1}^p g_k) z^{-b}}{1 + \sum_{k=1}^p g_k z^{-k}} \dots\dots\dots (21)$$

となる。ここに、

$$g_k = \frac{g_k^{(p)} + g_{p-k}^{(p)}}{g_0^{(p)} + g_p^{(p)}}, \quad (0 \leq k \leq p) \dots\dots\dots (22)$$

である。式 (21) および (22) から、 $G_1(\lambda)$ の特性多項式は鏡像多項式となる。

波動伝達関数を式 (21) のように閉じた形で表現する一般的な取扱いは、小堀・南井によってなされている⁸⁾。この項で得られた結果は、モデル化を“地盤”の段階で行うことによる近似表現であるが、本報告で扱う時系列解析の適用には便利な表現である。

(2) 相互共分散関数の特徴

実測記録を用いる場合、直接推定対象となる波動伝達関数は $G_1(\lambda)$ である。地表観測波および最下層観測波のフーリエ表示をおのおの $Y(\lambda)$ および $X(\lambda)$ とし、 $Y(0)=0$ および $X(0)=0$ とすれば、式 (21) から、地表および最下層における観測波の相互共分散関数は、

$$R_{YX}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} Y(\lambda) X(-\lambda) z^k d\lambda \\ = (\sum_{m=0}^p g_m)^{-1} \sum_{n=0}^p g_n R_{YY}(k+n-b) \dots\dots\dots (23)$$

となる。ここに、 $R_{YY}(k)$ は地表観測波の自己共分散関数であり、遅延時間 kT は k で略記されるとする。 $R_{YY}(k)$ が偶関数、 $\{g_k\}_{k=0}^p$ が鏡像多項式の係数列および $b=p/2$ であるから、 b が偶数ならば、 $R_{YX}(k)$ は偶関数となる。SH 波の多重反射形態においては、垂直方向の伝播時間が bT であるから、 $R_{YX}(k)$ は、 $k=\pm b$ 近傍でピークをもつ左右ほぼ対称の振動減衰形として推定されるはずである。

波動伝播形態がラブ波の伝播へ移行した際、垂直方向へ伝播するみかけの SH 波の伝播時間は、周波数依存性が強くなり、 bT と比較してかなり小さくなる。このため、 $R_{YX}(k)$ は、SH 波の多重反射形態における形とは異なるものとなる。

(3) 推定のための時系列モデル

最下層および地表における同時観測地震波を、均一な標準化時間 T で標準化して、それぞれ $\{x_n\}_{n=1}^N$ およ

び $\{y_n\}_{n=1}^N$ なる時系列をつくる。ここに、 N は標本数である。周波数領域における複素変数 z^{-1} は、時間領域における遅延時間 T の遅延作用をなすから、式 (21) より、 $G_1(\lambda)$ 推定のための時系列モデルとして、

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^p \alpha_k x_{n-b+k} + u_n; \quad \alpha_0 \equiv 1 \dots\dots\dots (24)$$

を提案する。ここに、 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は正規過程とし、 $E[\cdot]$ を \cdot の期待値を示すとしたとき、 $E[x_n]=0$ および $E[y_n]=0$ が満たされているとする。また、 $\{u_n\}$ は入力雑音過程であり、本報告では 2 つの場合について考える。

1 つは、これを、

$$E[u_n]=0, \quad E[u_n u_m] = \sigma_U^2 \delta_{mn} \dots\dots\dots (25)$$

の正規性白色雑音過程とするものであり、

$$v_{n-k} = y_{n-k} - x_{n-b}, \quad (0 \leq k \leq p) \dots\dots\dots (26)$$

とすれば、みかけ上 $\{v_n\}$ の自己回帰過程となる。式 (25) における δ_{mn} はクロネッカのデルタとする。式 (24) および (25) からなるモデルをモデル I とする。このモデル I における入力雑音過程に関する仮定は、強い拘束であり、実測記録に対しての適用には無理が生じる。しかしながら、取扱いの容易さから、 $G_1(\lambda)$ の概略を知るような目的には有効である。第 2 のモデルは、 $\{u_n\}$ を自己回帰モデル、

$$\sum_{k=0}^q \beta_k u_{n-k} = w_n; \quad \beta_0 = 1 \dots\dots\dots (27)$$

で与えるものである。ここに、 $\{w_n\}$ は、

$$E[w_n]=0, \quad E[w_n w_m] = \sigma_W^2 \delta_{mn} \dots\dots\dots (28)$$

なる正規性白色雑音過程とする。この式 (24)、(27) および (28) からなるモデルをモデル II とする。モデル II は、十分大きな q を使えば、現実的なものとなる可能性がある。

このモデル II は、次数の組 (b, p, q) で特徴づけられる。次数 p は、地表波の表層地盤の各層からの反射に基づく自己回帰を表すために必要な次数を示している。形式的にみて、式 (16) で与えられる係数列 $\{g_k^{(k)}\}_{k=1}^p$ (上昇波の反射係数列に相当する) を偏自己相関係数列とみなせば、式 (17) は自己回帰係数の計算方法そのものであり、 $\{g_k^{(p)}\}_{k=1}^p$ が自己回帰係数列に相当する⁹⁾。このようにみれば、 bT は、地表波に対して、この自己回帰分以外に、直接最下層から線り込まれるべき入射波の時間差と解釈される。次数 b はこのような意味をもつが、 bT が入射 SH 波の垂直方向伝播時間に相当することからも意味づけられる。すなわち、次数の組 (b, p) は、波動伝播形態と表層地盤の速度構造とに依存するパラメーターである。これに対して、次数 q は、垂直入射する SH 波以外の波を雑音とみなしたとき、この雑音を自己回帰表現するために必要な次数であり、 (b, p) とは性格の異なるパラメーターである。

3. 波動伝達関数の最尤推定

前章 (3) において, $G_1(\lambda)$ 推定のための時系列モデル I および II を提案した. モデル I のパラメータは, 最小自乗法により, 容易に推定される. しかしながら, モデル II のパラメータ推定は非線形計算となる. 本章ではモデル II に関する推定法を考察し, モデル I に関する推定法は (3) で結果を記述する.

(1) 推定問題の定式化

式 (24), (27) および (28) からなるモデル II のパラメータ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma_W^2\}$ を最尤法により推定する. $\{w_n\}$ に関する仮定により, 対応する尤度関数は,

$$l = (2\pi\sigma_W^2)^{-N/2} \exp\left(-\sum_{n=1}^N w_n^2 / 2\sigma_W^2\right) \dots\dots (29)$$

で近似される. 通常最尤法で行われるように, l の最大化に変えて, 近似対数尤度関数

$$L = -2 \log_e l \\ = N(\log_e 2\pi + \log_e \sigma_W^2 + s_W^2 / \sigma_W^2) \dots\dots (30)$$

の最小化に基づくパラメータの推定を行う. ここに,

$$s_W^2 = \sum_{n=1}^N w_n^2 / N \dots\dots (31)$$

である. 始めに, σ_W^2 について L を最小化することにより, $\sigma_W^2 = s_W^2$ のとき L が最小化される. したがって, $\sigma_W^2 = s_W^2$ を式 (30) に代入して定数項を除けば, 問題は,

$$M = \log_e s_W^2 \dots\dots (32)$$

を最小とするパラメーター・ベクトル

$$\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)' \dots\dots (33)$$

の推定問題となる. ここに, ' は行列の転置を示すとする.

問題を周波数領域で扱うために, 式 (31) の s_W^2 について, 周波数領域における近似表現を求める. まず, $x_n=0$ および $y_n=0 (n \leq 0$ および $n > N)$ を仮定し, $x_n / \sqrt{2\pi N}$ および $y_n / \sqrt{2\pi N}$ のフーリエ表示をおおの,

$$X(\lambda) = (2\pi N)^{-1/2} \sum_{n=1}^N x_n z^{-n} \dots\dots (34)$$

および

$$Y(\lambda) = (2\pi N)^{-1/2} \sum_{n=1}^N y_n z^{-n} \dots\dots (35)$$

で表わす. 同様に, α_k および β_k のフーリエ表示をおおの,

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^p \alpha_k z^{-k} \dots\dots (36)$$

および

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^q \beta_k z^{-k} \dots\dots (37)$$

とする. 次に, $w_n / \sqrt{2\pi N}$ のフーリエ表示を式 (34) および (35) と同様に定義する. このとき, 式 (24) および (27) に式 (34), (35), (36) および (37) のフーリエ表示を適用して $w_n / \sqrt{2\pi N}$ のフーリエ表示を求めれば, これは,

$$W(\lambda) = B(\lambda)[A(\lambda)Y(\lambda) - A(0)z^{-b}X(\lambda)] \dots (38)$$

で近似される. したがって, 式 (31) で与えられる s_W^2 は,

$$s_W^2 = \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda)W(-\lambda)d\lambda \dots\dots (39)$$

で近似される.

(2) 推定問題の解法

前節で定式化した θ に関する M の最小化問題の解は, ベクトル列 $\{\theta_n\}$ から得られるとする. $M(\theta_{n+1})$ を θ_n でテーラー展開し, 最初の 2 次までとると,

$$M(\theta_{n+1}) = M(\theta_n) + \xi'(\theta_n)(\theta_{n+1} - \theta_n) \\ + (\theta_{n+1} - \theta_n)' H(\theta_n)(\theta_{n+1} - \theta_n) / 2 \\ \dots\dots (40)$$

となる. ここに, $\xi(\theta_n)$ は θ_n のグラジエントを, $H(\theta_n)$ は θ_n のヘシヤンをおおの示すものとする. 式 (40) のように 2 次までとると, ベクトル列の収束に伴いグラジエントは零ベクトルとなり, 推定パラメーターの分散は, このときのヘシヤンに基づいて得られるフィッシャー情報行列の逆行列の主対角成分で評価される¹⁰⁾. そこで, θ_n の i および j 成分をおおの $\theta_i^{(n)}$ および $\theta_j^{(n)}$ とすれば, $\xi(\theta_n)$ の i 成分および $H(\theta_n)$ の (i, j) 成分は, おおの,

$$\xi(\theta_n)|_i = \frac{\partial M}{\partial \theta_i^{(n)}} \text{ および } H(\theta_n)|_{i,j} = \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_i^{(n)} \partial \theta_j^{(n)}}$$

で定義される. $M(\theta_{n+1})$ を最小化するため, θ_{n+1} に関するグラジエントを零ベクトル $\mathbf{0}$ とすれば, 式 (40) から,

$$\xi(\theta_n) + H(\theta_n)(\theta_{n+1} - \theta_n) = \mathbf{0} \dots\dots (41)$$

となる. ヘシヤンが正則ならば, 式 (41) は,

$$\theta_{n+1} = \theta_n - H^{-1}(\theta_n)\xi(\theta_n) \dots\dots (42)$$

なるニュートン・ラプソン形の推定式となる. 以下, $\sigma_W^2(\theta_n)$, $\xi(\theta_n)$ および $H(\theta_n)$ の評価について考察するが, 簡単のため, 添字 n は省略する.

a) 分散 σ_W^2

正規性白色雑音過程 $\{w_n\}$ の自己共分散関数 $R_{WW}(k)$ は, 式 (38) から, 次式となる.

$$R_{WW}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda)W(-\lambda)z^k d\lambda \\ = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q \alpha_i \beta_j \alpha_m \beta_n$$

$$\begin{aligned} & \cdot [R_{YY}(k+m+n-i-j) \\ & - R_{XY}(k-b+m+n-j) \\ & - R_{YX}(k+b+n-i-j) \\ & + R_{XX}(k+n-j)] \dots\dots\dots (43) \end{aligned} \quad (1 \leq i, j \leq p) \dots\dots\dots (52)$$

式 (43) の右辺における自己および相互共分散関数は、式 (34) および (35) から、

$$\begin{aligned} R_{YY}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} Y(\lambda) Y(-\lambda) z^k d\lambda \\ &= N^{-1} \sum_{n=1}^{N-k} y_{n+k} y_n \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{XY}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda) Y(-\lambda) z^k d\lambda \\ &= N^{-1} \sum_{n=1}^{N-k} x_{n+k} y_n \\ &= R_{YX}(-k) \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} R_{XX}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda) X(-\lambda) z^k d\lambda \\ &= N^{-1} \sum_{n=1}^{N-k} x_{n+k} x_n \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

となる。分散 σ_W^2 は、式 (43) から

$$\sigma_W^2 = R_{WW}(0) \dots\dots\dots (47)$$

である。

b) グラジエント $\hat{\xi}$

$\hat{\xi}(\theta)$ の i 成分は、式 (32) および (39) から、

$$\frac{\partial M}{\partial \theta_i} = \frac{2}{\sigma_W^2} \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda) \frac{\partial W(-\lambda)}{\partial \theta_i} d\lambda \dots\dots\dots (48)$$

で評価される。したがって、各成分は、式 (38) から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \alpha_i} &= \frac{2}{\sigma_W^2} \left[\sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^q \alpha_l \beta_m \beta_n \right. \\ & \cdot \{R_{YY}(i+n-l-m) - R_{YX}(b+n-l-m) \\ & - R_{XY}(i-b+n-m) + R_{XX}(i-m)\}] \\ & (1 \leq i \leq p) \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \beta_i} &= \frac{2}{\sigma_W^2} \left[\sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^p \alpha_l \beta_m \alpha_n \right. \\ & \cdot \{R_{YY}(i+n-l-m) - R_{YX}(i+b-l-m) \\ & - R_{XY}(i-b+n-m) + R_{XX}(i-m)\}] \\ & (1 \leq i \leq q) \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

となる。

c) ヘシヤン H

$H(\theta)$ は、 (i, j) 成分が、

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{2}{\sigma_W^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial W(\lambda)}{\partial \theta_i} \frac{\partial W(-\lambda)}{\partial \theta_j} d\lambda \dots\dots\dots (51)$$

で評価される対称行列で近似される⁹⁾。したがって、近似ヘシヤンの各成分は、式 (38) から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} &= \frac{2}{\sigma_W^2} \left[\sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^q \beta_m \beta_n \right. \\ & \cdot \{R_{YY}(j-i+n-m) - R_{YX}(b-i+n-m) \\ & - R_{XY}(j-b+n-m) + R_{XX}(n-m)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial \beta_i \partial \beta_j} &= \frac{2}{\sigma_W^2} \left[\sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^p \alpha_m \alpha_n \right. \\ & \cdot \{R_{YY}(j-i+n-m) - R_{YX}(b+j-i-m) \\ & - R_{XY}(j-b-i+n) + R_{XX}(j-i)\}] \\ & (1 \leq i, j \leq q) \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} &= \frac{2}{\sigma_W^2} \left[\sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^p \beta_m \alpha_n \right. \\ & \cdot \{R_{YY}(j-i+n-m) - R_{YX}(j+b-i-m) \\ & - R_{XY}(j-b+n-m) + R_{XX}(j-m)\}] \\ & (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q) \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

となる。

(3) 情報量規準の適用

a) 情報量規準と適用の意味

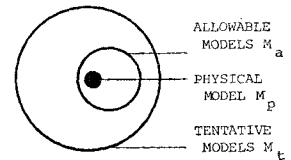
前節におけるパラメーターの最尤推定では、次数の組 (b, p, q) を既知とした。S 波速度検層結果に基づいて得られる (b_0, p_0) は、 (b, q) に対する妥当な目安である。しかしながら、この組は、多重反射形態にある SH 波に対して適用できるものであり、他の伝播形態にある観測記録に対しては誤った結果をもたらす恐れがある。さらに、 q についてはなんら決定すべき前知識もない。

次数の組 (b, p, q) の決定を含めて、統計的モデルの集合から、ある最適なモデルを推定する一方法に最小 AIC 推定法⁹⁾がある。これは、統計的モデルの集合の中から、その最大対数尤度と独立に調整可能なモデルのパラメーター数を用いて定義される情報量規準¹¹⁾：

$$\begin{aligned} \text{AIC}(b, p, q) &= -2(\text{最大対数尤度}) \\ & + 2(\text{モデル内で独立に調整可能なパラメーター数}) \\ & \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

を最小とするモデルとその最尤推定パラメーターをもつて最適モデルとする方法である。本報告では、この規準に従って波動伝達関数を推定するが、その意味について考察する。

いま、式 (24), (27) および (28) に従うモデルの集合を M_t とする。この M_t の部分集合で、 (b, p) の組が (b_0, p_0) を含み、かつ、 (b_0, p_0) の近傍にあるものを M_a とする。すなわち、多重反射形態における波動伝達関数のモデルとして、S 波速度検層結果に基づく物理的なモデル M_p が M_a に含まれているとする。そこで、 M_t に含まれる想定モデルを、観測記録の中の 1 つのフレームに適用して、AIC を最小とする最適モデルを見出したとする。この AIC 最小化による最適モデルの決定は、このフレ



図—1 時系列モデルの包含関係

つの実現値である観測値に対する確率変数の確率密度関数の想定モデルから予測される確率密度関数に関するエントロピーの期待値を最大とするモデルを見出すことを意味している⁹⁾。すなわち、想定したモデルのわく M_a から、このフレームの波動伝播形態に最も近いモデルを決定することが、AIC 最小化によりなされることを意味している。この事実は、AIC 最小化から得られた最適モデルが、 M_a に含まれるならば、推定に用いたフレームは多重反射形態のものとして、このモデルから波動伝達関数を推定し、 M_a に含まれなければ、このフレームは多重反射形態のものではないと判断することの可能性を示している。ただし、 M_a 内のモデルが、十分によく多重反射形態の波動伝達関数を表現できることを仮定していることはいうまでもない。

b) 情報量規準

モデルIIに対する AIC は、定数項を除いて、

$$AIC(b, p, q) = N \log_e \sigma_w^2 + 2(p+q) \dots (56)$$

となる。ここに、 σ_w^2 は式 (47) および (43) から得られる。モデルIに対するパラメーターは、式 (24) における入力雑音 $\{u_n\}$ の分散を最小化することから推定される。結果は、連立方程式

$$V(m, 0) + \sum_{k=1}^p a_k V(m, k) = \sigma_U^2 \delta_{m,0} \dots (57)$$

$(0 \leq m \leq p)$

の解として得られる。ここに、

$$V(m, k) = R_{XX}(0) + R_{YY}(m-k) - R_{XY}(m-b) - R_{XY}(k-b) \dots (58)$$

である。モデルIに対する AIC は、モデルIIとの比較を考慮して、

$$AIC(b, p) = N \log_e \sigma_U^2 + 2p \dots (59)$$

とする。分散 σ_U^2 は、式 (57) から推定される。

4. 工学的応用への考察

(1) 卓越振動数と減衰定数の推定

波動伝達関数 $G_1(\lambda)$ の極 z_k は、式 (24) に基づく代数学方程式

$$z^{p_1} + \hat{a}_1 z^{p_1-1} + \dots + \hat{a}_{p_1} = 0 \dots (60)$$

の根として推定される。 $\hat{z}_k (k=1, \dots, p_1)$ を極座標表示して、 $\hat{z}_k = \hat{r}_k \exp(i\hat{\lambda}_k)$ とすれば、極 \hat{z}_k に対応する卓越振動数 \hat{f}_k および減衰定数 (-3 dB 帯域幅/中心振動数の2倍で定義する) \hat{h}_k は、

$$\hat{f}_k = |\hat{\lambda}_k| / 2\pi T \dots (61)$$

および

$$\hat{h}_k = -\log_e \hat{r}_k / |\hat{\lambda}_k| \dots (62)$$

で推定される。実際には、卓越振動は1組の複素共役根

で表現されるため、式 (60) の左辺を2次形に因数分解して解くベアストウ法¹²⁾が便利である。

(2) 位相特性の推定

推定波動伝達関数 $\hat{G}_1(\lambda)$ を、

$$\hat{G}_1(\lambda) = |\hat{G}_1(\lambda)| \exp[-i\hat{\phi}_1(\lambda)] \\ = \hat{G}_{1R}(\lambda) + i\hat{G}_{1I}(\lambda) \dots (63)$$

とする。ここに、 $\hat{\phi}_1(\lambda)$ は推定位相(差)特性である。式 (63) の表示に基づいて、伝達関数 $G_1(\lambda)$ の位相遅延時間特性および群遅延時間特性は、

$$\hat{t}_p(\lambda) = T \hat{\phi}_1(\lambda) / \lambda \dots (64)$$

および

$$\hat{t}_g(\lambda) = T \frac{d}{d\lambda} \hat{\phi}_1(\lambda) \\ = T \left[-\hat{G}_{1R}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \hat{G}_{1I}(\lambda) + \hat{G}_{1I}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \hat{G}_{1R}(\lambda) \right] \dots (65)$$

として推定される。式 (65) の計算に必要な微分量は、

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{G}_1(\lambda) = -i\hat{G}_1(\lambda) \left[b_1 - \frac{\sum_{k=1}^{p_1} k \hat{a}_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p_1} \hat{a}_k z^{-k}} \right] \dots (66)$$

の実部および虚部から求まる。

5. 観測記録への適用

以上の理論的考察から導かれた波動伝達関数 $G_1(\lambda)$ の推定法の有効性を確かめるために、実測された地震波記録へ本方法を適用してみた。記録は、国立防災科学技術センター・岩槻地殻活動観測施設(東経 139°55'33"E, 北緯 35°44'17"N) 構内の地表および地下 108 m で同時観測されたものである。観測に使用された加速度計は、固有振動数 5 Hz, 減衰定数 30 以上のサーボ形である。

(1) 速度検層結果に基づく時系列モデル M_p

推定計算に先立って、S波速度検層結果に基づいて時系列モデル M_p を検討した。この観測点では、地中地震計埋設時に、地下 108 m から地表まで 1 m 間隔で板叩き法による速度検層が実施され

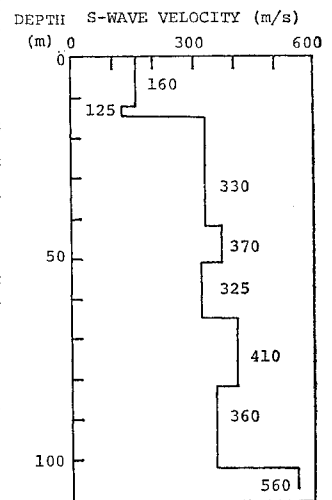


図-2 S波速度構造

ている。図-2 が得られた推定速度構造である。この推定速度構造に基づいて、各層の S 波通過時間を $T/2=0.01$ 秒として薄層分割すれば、 $p_0=35$ となる。これは、標準化時間 $T=0.02$ 秒で原波形を標準化した時系列を用いることに対応する。また、 b_0 は 17 程度となる。

(2) 適用結果と考察

ここでは、1978 年伊豆大島近海の地震 (例 1; 発生時 1 月 14 日 12 時 24 分, 震源位置 34.8°N, 139.3°E, 震源深さ 0 km, マグニチュード 7.0) および 1978 年宮城県沖地震 (例 2; 発生時 6 月 12 日 17 時 14 分, 震源位置 38.1°N, 142.4°E, 震源深さ 30 km, マグニチュード 7.4) において観測された各 EW 成分について適用した結果を示す。

a) 例 1

図-3 は観測波形 40 秒間である。推定計算に必要とするフレームの長さは、 $p_0T=0.7$ 秒であるから、通常の定常時系列解析と同様に、 p_0T の 5~10 倍とする。そこで 40 秒間の記録を 1 フレーム長 7 秒として、1 秒ずつ移動させて 34 のフレームを作り、各フレームにおいてモデル I のあてはめを行った。 M_t として、 (b, p) を $15 \leq b \leq 19$ および $30 \leq p \leq 40$ に制限して AIC 最小となる (b_1, p_1) を計算し、図-4 の結果を得た。図-4 には、各フレームの地表面に自己回帰モデルをあてはめ、推定回帰係数に基づく代数方程式を解いて得ら

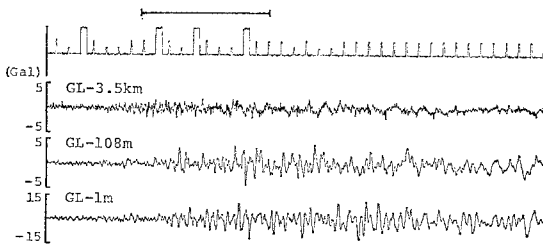


図-3 加速度記録

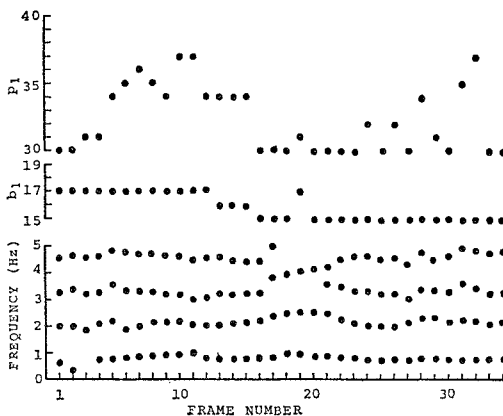


図-4 モデル I の推定次数と卓越振動数

れた卓越振動数を参考のために付した。回帰係数の推定には、フレーム間に軽い平滑化フィルター¹³⁾を用いてある。そこで、多重反射形態にある可能性を示すモデルの集合 M_a として、S 波速度検層結果に基づいて得られる物理的なモデル M_p (次数の組 $(b_0, p_0)=(17, 35)$) を包含し、次数の組 (b_1, p_1) が、 $16 \leq b_1 \leq 18, 33 \leq p_1 \leq 37$ に推定されるモデルの集合を 3.(3) a) 項に述べたように設定する。この設定に対して、図-4 の結果を適用すれば、第 5~15 フレーム間が多重反射形態にある可能性を示すといえる。多重反射形態にあることを示すモデルの集合 M_a を的確に決定するためには、さらにいくつかの観測例を適用して判断せねばならないが、一応の目安は次例で述べる。また、卓越振動数の推定値の安定性も良好である。

上記考察に基づいて、第 5~15 フレームの中心区間 10.24 秒 (図-3 に示してある線分区間で、 $N=512$) を対象として再びモデル I のあてはめを行った結果が図-5 である。モデル I では、 $(b_1, p_1)=(17, 34)$ となり、 (b_0, p_0) との対応は良好である。そこで、モデル II のあてはめを行うと、図-5 に示す結果となり、 $(b_1, p_1, q_1)=(17, 34, 25)$ が得られる。このようにして推定された波動伝達関数 $\hat{G}_1(\lambda)$ の利得特性とフーリエ比が図-6 である。推定利得特性は、フーリエ振幅比をよく平滑化

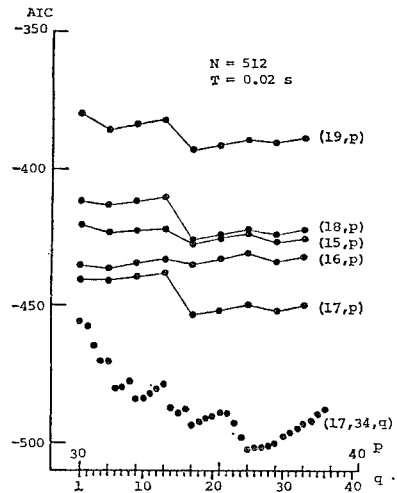


図-5 AIC (モデル I および II)

表-1 卓越振動数と減衰定数

n	G_0		G_1		\hat{G}_1^*		\hat{G}_1^{**}			
	F_n (Hz)	h_n	F_n (Hz)	h_n	F_n (Hz)	h_n	FRAME 1		FRAME 2	
1	0.91	0.397	0.88	0.84	0.353	0.92	0.173	0.87	0.168	
2	2.18	0.126	2.17	2.13	0.044	2.06	0.038	2.03	0.012	
3	3.29	0.098	3.32	3.45	0.075	3.35	0.033	3.65	0.085	

* Example 1, ** Example 2

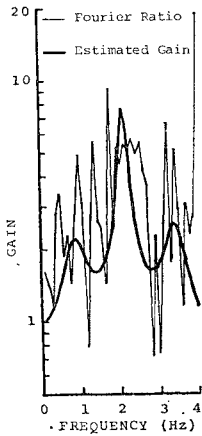


図-6 推定利得特性とフーリエ振幅比

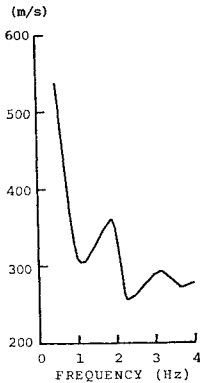


図-7 推定位相速度特性

している。また、式 (61) および (62) による卓越振動数と減衰定数の推定値は表-1となる。同表に示した速度検層結果に基づく $G_1(\lambda)$ の卓越振動数との対応もよい。また、速度検層結果に基づく $G_0(\lambda)$ の卓越振動数および減衰定数を、式 (18) の特性方程式を解いて、式 (61) および (62) と同様に扱い、求めた結果も示してある。図-7 および 8 は、 $\hat{G}_1(\lambda)$ の位相速度特性および群遅延時間特性の推定結果である。卓越振動に相当する振動数における位相速度は、平均して 320 m/s 程度となり、これが $b_1 = 17$ の主因であると推察される。図-9 は、推定された相互共分散関数であるが、2. (2) の特徴を示している。また、深層井(地下 3.5 km)における観測波の S 波部分が地表に到達する時間が約 3 秒であ

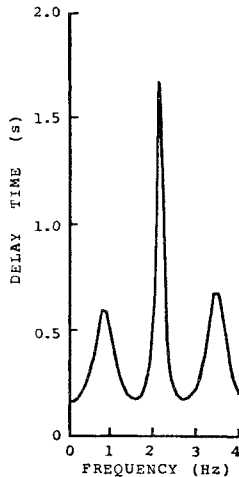


図-8 推定群遅延時間特性

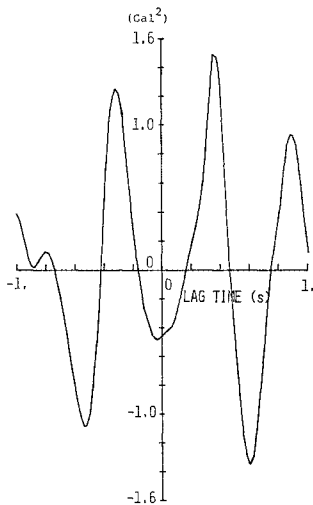


図-9 標本相互共分散関数

る¹⁴⁾ことから、推定に用いた区間が多重反射形態にあることの可能性が図-3 から読みとれる。

b) 例 2

図-10 が 40 秒間の観測波形である。この図において、8 秒目からの 10.24 秒間およびそれに続く同長の区間を第 1 フレームおよび第 2 フレームとする。この両フレームにおいて、モデル II のあてはめを行った結果、 (b_1, p_1, q_1) はおのおの (17, 34, 14) および (16, 33, 8) を得た。両フレームにおける推定波動伝達関数 $\hat{G}_1(\lambda)$ の利得特性とフーリエ振幅比が図-11 および 12 である。ほぼ良好に平滑化されているが、第 1 フレームの方がよい。第 1 フレームにおいて推定された $(b_1, p_1) = (17, 34)$ は、S 波速度検層の結果に基づいて推定される多重反射形態においてあるべき次数の組 $(b_0, p_0) = (17, 35)$ にほぼ一致する。SH 波の多重反射形態において、 p_0 は地表波の表層地盤の各層からの反射に基づく自己回帰を表わすために必要な次数であり、 b_0 は、この自己回帰分以

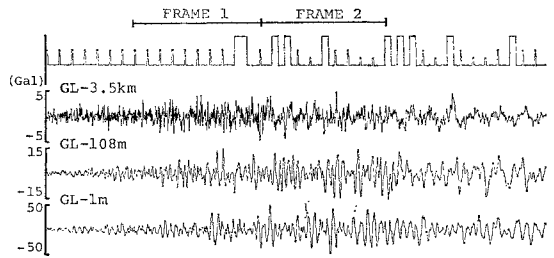


図-10 加速度記録

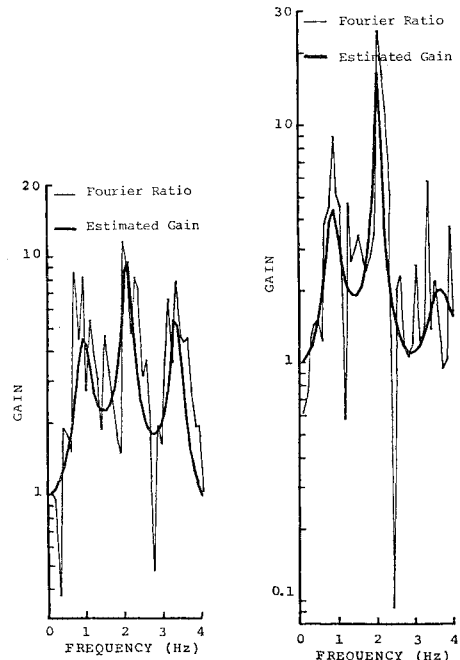
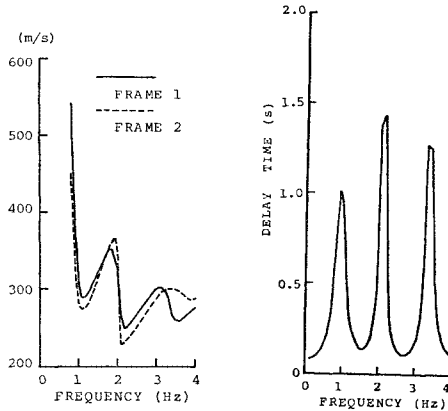
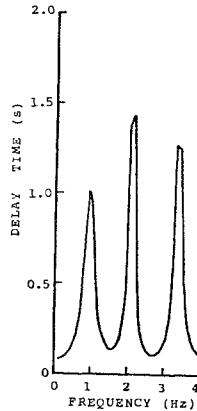


図-11 推定利得特性とフーリエ振幅比

図-12 推定利得特性とフーリエ振幅比

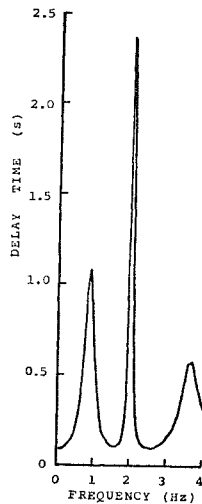


図一13 推定位相速度特性



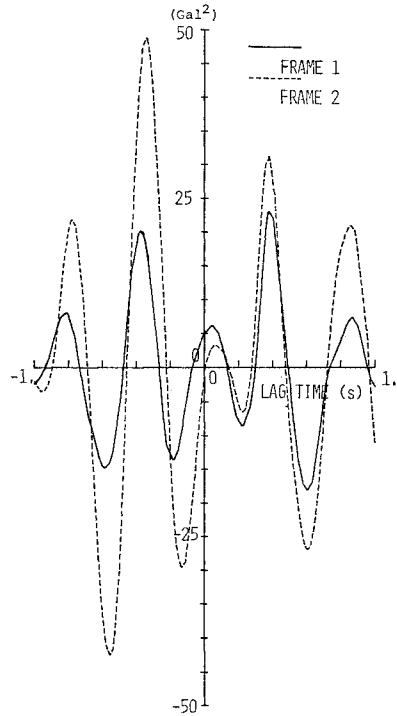
図一14 推定群遅延時間特性

外に、直接繰り込まれるべき入射波の地表波に対する時間差を表わす次数である。したがって第1フレームにおいて得られた情報量規準に基づく最適モデルの次数の組 (b_1, p_1) が (b_0, p_0) にはほぼ一致することは、このフレームが多重反射形態にあることの十分性を示している。これは、図一10の深層井の観測記録との対応からも、例1と同様に推察される。例1と同様に、推定波動伝達関数 $\hat{G}_1(\lambda)$ の位相速度特性を 図一13 に、両フレームにおける群遅延時間特性を 図一14 および 15 に示す。



図一15 推定群遅延時間特性

図一13の第1フレームにおける結果は、例1とほぼ同様である。第2フレームにおいては、図一12にみられる2 Hzの強い卓越振動に対応する位相速度の上昇がみられる。これが、第2フレームにおいて、 $b_1=16$ となった原因と推察される。この推定波動伝達関数 $\hat{G}_1(\lambda)$ における位相速度の上昇は、このフレームが垂直入射するSH波の多重反射形態に近いものとしても、いくらかずれていることを示している。これは、図一15の推定群遅延時間特性における2 Hzのピーク値の上昇から、図一8および14と比較して、明瞭に判断できる。さらに、図一16の推定相互共分散関数の比較は、第2フレームでの特徴が多重反射形態の特徴を示している第1フレームでの結果と比べて変化していることを示している。念のため、第2フレームに続く10.24秒に対して、モデルIIのあてはめを行った結果は、 $(b_1, p_1, q_1) = (15, 31, 14)$ であった。これは例1で仮定した M_a にも含まれず、多重反射形態における



図一16 標準相互共分散関数

$G_1(\lambda)$ の推定区間としては不適であることを示している。この2つの例からも明らかのように、集合 M_a を、 $b_1=b_0, p_0-2 \leq p_1 \leq p_0+2$ 程度に制限できそうである。第1および2フレームにおける推定卓越振動数および推定減衰定数を表一に加えてある。

c) 結果に対する考察

ここでは、例1および例2の第1フレームで得られた推定波動伝達関数 $\hat{G}_1(\lambda)$ について比較し、次に、これらと速度検層結果に基づいて計算される $G_1(\lambda)$ とを比較する。

まず、

$$R(\lambda) = \left| \frac{Y(\lambda) - \hat{G}_1(\lambda)X(\lambda)}{\hat{G}_1(\lambda)X(\lambda)} \right| \dots \dots \dots (67)$$

なる関数を定義する。これは、モデルのフィティング誤差の周波数特性ともいべきものである。当然のことながら $R(\lambda)$ は小さい方がよい。同時に、 $R(\lambda)$ は平坦な特性をもつ方がよい。さもないと、定義により、 $Y(\lambda)/\hat{G}_1(\lambda)X(\lambda)$ は平坦でない周波数特性をもつことになる。これは、 $Y(\lambda)$ が $\hat{G}_1(\lambda)X(\lambda)$ だけでは説明されない周波数特性をもつことを意味する。すなわち、 $Y(\lambda)$ を多重反射状態にあるときのものと仮定したとき、その推定値 $\hat{G}_1(\lambda)X(\lambda)$ だけでは、 $Y(\lambda)$ のすべては説明されないこととなり、 $G_1(\lambda)$ の推定には不都合となる。

$R(\lambda)$ は、式 (38) により、次式となる。

$$R(\lambda) = |\{\hat{A}(0)z^{-b_1}\hat{B}(\lambda)\}^{-1}\hat{W}(\lambda)/X(\lambda)| \dots \dots (68)$$

式 (68) は、雑音過程 $\{u_n\}$ を $G_1(\lambda)$ に対して入力換算したものの観測入力 $\{x_n\}$ に対する比を意味する。ここでは、式 (68) を

$$\hat{R}(\lambda) = \sqrt{\hat{P}_U(\lambda) / \hat{P}_X(\lambda)} \dots\dots\dots (69)$$

で近似推定する。ここで、 $\hat{P}_X(\lambda)$ は観測入力 $\{x_n\}$ の推定スペクトル密度関数であり、 $\hat{P}_U(\lambda)$ は、

$$\hat{P}_U(\lambda) = \frac{\hat{\sigma}_W^2}{2\pi(1 + \sum_{n=1}^{p_1} \hat{\alpha}_n z^{-n})^2 \cdot |1 + \sum_{n=1}^{q_1} \hat{\beta}_n z^{-n}|^2} \dots\dots\dots (70)$$

とする。 $\hat{P}_X(\lambda)$ は、自己共分散関数 $\{R_{XX}(n)\}$ から推定される自己回帰係数列 $\{\hat{\zeta}_k\}_{k=1}^K$ を用いて、

$$\hat{P}_X(\lambda) = \frac{\hat{\sigma}_e^2}{2\pi|1 + \sum_{k=1}^K \hat{\zeta}_k z^{-k}|^2} \dots\dots\dots (71)$$

として推定されるものとする。ただし、

$$\hat{\sigma}_e^2 = R_{XX}(0) - \sum_{k=1}^K \hat{\zeta}_k R_{XX}(k) \dots\dots\dots (72)$$

とする。

例1および例2の第1フレームにおける $\hat{R}(\lambda)$ を 図-17 に示す。この結果は、例2の第1フレームにおいて得られた $\hat{G}_1(\lambda)$ が、例1の場合よりもよい推定用実測記録を用いて得られたものであることを示している。

ここまで、推定波動伝達関数 $\hat{G}_1(\lambda)$ の利得特性の評価は、観測記録のフーリエ振幅比の平滑化が十分なされているかどうかを判断基準としている。この評価は、本報告で扱っている方法自体に対してのものである。これとは別に、 $\hat{G}_1(\lambda)$ の利得特性は、速度検層結果に基づいて式 (21) から直接計算される $G_1(\lambda)$ の利得特性との比較からも評価されねばならない。これは、地盤の振動特性、特に、その減衰特性を評価することである。ただし、

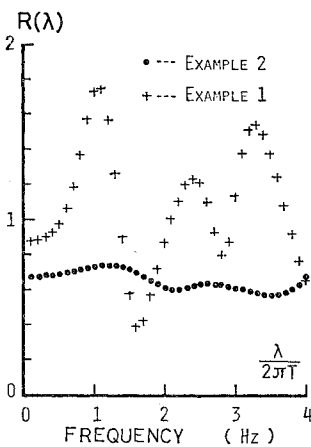


図-17 適合誤差特性

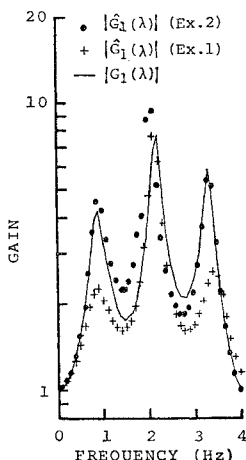


図-18 推定利得特性と速度構造から決定した利得特性

これに対する検討は、本報告が波動伝達関数の推定法を主題としているため、むしろ、次の課題でもある。したがって、ここでは、例1および例2の第1フレームで得られた利得特性の推定結果と、式 (21) から計算される $G_1(\lambda)$ に適当な減衰特性を想定して得られる利得特性とを図示し、比較する程度とする。式 (21) から得られる $G_1(\lambda)$ に減衰特性を入れることは、形式的に周波数変換を行うことによりなされる⁸⁾。そこで、例1および例2の第1フレームで得た $\hat{G}_1(\lambda)$ の利得特性と、式 (21) において、変換

$$i\lambda \rightarrow \begin{cases} -\lambda/6 + i\lambda, & (0 \leq \lambda \leq 2\pi T) \\ -\lambda/\{6 + 20 \log_e(\lambda/2\pi T)\} + i\lambda, & (2\pi T \leq \lambda \leq \pi) \end{cases} \dots\dots\dots (73)$$

を行って得られた $G_1(\lambda)$ の利得特性とを 図-18 に示す。ここで仮定した減衰特性は、表-1 に示した減衰定数の推定結果が高周波数域で減少していることを考慮して試行錯誤的に与えたものにすぎないが、だいたいの傾向はとらえている。

6. むすび

近年、地表および地中における同時地震観測が広く普及した。本研究では、これらの観測記録に基づいて、表層地盤の波動伝達特性を推定する1つの統計的手法を考察した。この手法の目的は、最下層から垂直入射したSH波の多重反射形態にある区間を判定し、同時に、最下層上地盤の波動伝達関数 $G_1(\lambda)$ を推定することにある。得られた結果は、以下のように要約される。

(1) いわゆるハスケル流のマトリックス法から出発して、地盤の波動伝達関数 $G_1(\lambda)$ を複素変数 $z^{-1} = \exp(-i\lambda)$ 、 $(|\lambda| \leq \pi)$ の有理形関数で近似表現した。次に、この近似表現において z^{-1} が遅延作用素として働くことから、 $G_1(\lambda)$ に相当する式 (24) の時系列モデルを導入した。観測地震波には、対象とする垂直入射したSH波以外の波が混入しているのが普通であり、このモデルのあてはめに伴う残差は、一般に、正規性白色雑音とはならない。このため、あてはめに伴う残差を自己回帰構造で与えるモデルIIを提案した。ただし、残差を正規性白色雑音と仮定するモデルIも、 $G_1(\lambda)$ の概要を知るために有効であり、あわせて扱った。

(2) 時系列モデルIIのパラメーターは、最尤法を用いて推定される。推定には、ニュートン・ラプソン形の繰返し計算を用いた。この計算上必要とされるグラジエントおよび近似ヘシヤンは、標本共分散行列の列を用いて、閉じた形で与えられる。

(3) 時系列モデルIIは、地表波の表層地盤の各層からの反射に基づく自己回帰を表わすために必要な次数

p , この自己回帰分以外に, 直接繰り込まれるべき入射波の地表波に対する時間差を表わす次数 b および垂直入射する SH 波以外の波を入力雑音とみなしたとき, この雑音を自己回帰表現するための次数 q から構成される次数の組 (b, p, q) で特徴づけられる. 特に (b, p) は地盤の速度構造と波動伝播形態とに依存するパラメーターである. 本報告では, モデル II の観測波あてはめのための適合誤差尺度として用いた情報量規準に従って決定された (b_1, p_1) と S 波速度検層に基づいて得られた (b_0, p_0) との照合から, 推定に用いた区間が多重反射形態にあるか否かを判断した. また, 多重反射形態における地表および最下層観測波の相互共分散関数が $\pm b_0 T$ 近傍にピークをもつ偶関数的な構造となることを示し, 補助的な判断規準とした. 地表および地中の同時観測に基づく多重反射形態の判断規準として, この 2 項目は有効である.

(4) 地盤の卓越振動の振動数と減衰定数は, モデル II の推定パラメーターを用いて決定された $\hat{G}_1(\lambda)$ の分母の特性方程式の根から推定される. また, $\hat{G}_1(\lambda)$ が z^{-1} の有理関数形表現であることから, 平滑化された位相特性が得られる. 特に, 位相遅延時間特性および群遅延時間特性も閉じた形で推定される.

(5) 上記事項の実測記録への適用結果は良好である.

以上が本研究で得た結果の概要である. 次に, 本報告では採り上げなかったが, 本方法のいくつかの拡張と適用について述べる. 本方法の拡張の 1 つは, 時系列モデルの式 (24) において, $\alpha_k = \alpha_{p-k}$ の条件を付加することである. 推定パラメーター数が半減し, 2. (1) b) 項の結果から, $G_0(\lambda)$ の直接推定の可能性がある. また, 地中の 2 点観測記録に対しては, 式 (21) を 2 段階適用することによって得られる z^{-1} の有理関数形表現に基づいて, 式 (24) と同様な時系列モデルが得られる. ただし, 入力に相当する列は 1 項では済まなくなる. 本方法の適用は, せん断形振動をする構造物の振動台実験による伝達関数推定にも有効である. 特に, 振動系が強いフィード・バック系となつて, 推定コヒーレンスが小さくなつてしまうような場合に対して, 適用効果が期待できる.

最後に, 耐震工学および地震防災の分野における計画地震動策定のために, 強震地動がいかなる波動および波動伝播形態から構成されるかの知識は不可欠なものである. 本報告では, 地表および地中における同時地震観測に伴い, 表層厚 100 m 程度の地盤における SH 波の多重反射形態に関する識別法および地盤の伝達特性推定

法について考察した. 本報告で扱った 2 つの例からも明らかのように, この波動伝播形態は地震動の主要な部分にみられるが, その一部について説明するとどまる. このため, 現在, 強震地動における他の構成要素を明確にすることを目的として, 岩槻を含む深層三井を利用した先第三系基盤岩中での地震観測, およびこれらを中心とする浅層井と地表での地震観測と, これらに伴う処理法の開発とが計画・実施されている. 得られた結果については, 別に発表する予定である.

参考文献

- 1) Akaike, H.: Some problems in the application of the cross-spectral methods, I_n Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series, John Wiley & Sons, New York, pp. 81~107, 1966.
- 2) Tanaka, T., S. Yoshizawa, T. Morishita, K. Osada and Y. Osawa: Observation and analysis of underground earthquake motions, 5th World Conference on Earthquake Engineering, Rome, pp. 658~667, 1974.
- 3) 田中貞二・北川良和: 地中地震観測, 第 6 回地盤震動シンポジウム, 日本建築学会, pp. 23~30, 昭和 53 年 3 月.
- 4) 河村壮一: 各種地盤での地表・地中地震動特性, 第 5 回地盤震動シンポジウム, 日本建築学会, pp. 45~48, 昭和 52 年 2 月.
- 5) たとえば, 太田 裕: 地震工学への最適化法の適用 (1. 八戸港湾 SMAC 設置点の地下構造推定), 日本建築学会論文報告集, 第 229 号, pp. 35~41, 昭和 50 年 3 月.
- 6) Akaike, H.: Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion, I_n System Identification, Academic Press, New York, pp. 27~96, 1976.
- 7) Haskell, N.A.: Crustal reflection of plane SH waves, *J. Geophys. Res.*, Vol. 65, No. 12, pp. 4147~4150, December, 1960.
- 8) Kobori, T. and R. Minai: One-dimensional wave-transfer functions of linear visco-elastic multi-layered half-space, *Bull. Disas. Prev. Res. Int. Kyoto Univ.*, Vol. 18, Part 4, No. 148, pp. 27~64, March, 1969.
- 9) Box, G.E.P. and G.M. Jenkins: *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, California, pp. 82~84, 1970.
- 10) 文献 9), pp. 226~228.
- 11) Akaike, H.: Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, I_n 2nd International Symposium on Information Theory, Akademiai Kiado, Budapest, pp. 267~281, 1973
- 12) Ralston, A.: *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 372~378, 1965.
- 13) 松井英一・中島隆之・鈴木虎三・大村 浩: Kalman フィルタ理論による音声分析, 電子技術総合研究所彙報, 第 36 巻 3 号, pp. 42~51, 1972.
- 14) Yamamizu, F. and N. Goto: Direct measurement of seismic wave velocities in deep soil deposits, *Proc. of the Fifth Japan Earthquake Engineering Symposium*, pp. 329~336, Nov., 1978.

(1980.5.9・受付)