

熱伝導型方程式の直接時間積分法と
高精度化のアルゴリズムDIRECT TIME INTEGRATION METHOD FOR THE TRANSIENT
HEAT CONDUCTION EQUATION

吉 田 裕*・藤 原 亨**・野 村 卓 史***

By Yutaka YOSHIDA, Tohru FUJIWARA and Takashi NOMURA

1. はじめに

拡散問題，土の圧密問題など，工学の分野において熱伝導型方程式に帰着する問題は多い。これらの問題の解析は，有限要素法または差分法を適用して空間を離散化し，その結果得られる時間に関する 1 階の連立常微分方程式を時間方向に積分する，ことによってなされるのが普通である。非線形問題の解析も，結局は区分線形化法など線形化された方程式の解析が基本となるから，1 階のマトリックス微分方程式の時間積分が解析の要となる問題は想像以上に多く存在する。この時間方向の積分は，モード解析法によるか，あるいは直接積分法によってなされるが，非線形問題の解析などは，実際問題として，直接積分法によらなければ解析が不可能である。

連立常微分方程式を逐次数値的に積分していくための種々の直接積分公式が具体化されており，実際の解析に広く用いられている。重みつき残差法に基づいて誘導された公式^{1)~4)}，指数関数の Padé 同次形近次式を基礎とする積分法^{5)~7)}，などもみられるが，熱伝導型の方程式に対して一般に用いられている公式は，微分項を差分近似することによって構成されたものか，微分項の分布形を仮定したうえでその積分を評価することによって構成された差分公式が普通である。公式には，積分作用素の乗算のみで逐次積分可能な陽形式のものや，逐次積分計算の過程で繰り返し計算，連立 1 次方程式の解を求める計算または逆行行列計算などが必要な陰形式のもの，また，初期条件からただちに積分のスタートが可能なものや，スタート時には特別な扱いが必要となるものなどがあり，多段型の公式を含めて，その具体的な内容は多種

多様である。いうまでもなく，これらの直接積分公式は積分時間間隔が小さいことを前提に構成された近似公式であり，その近似精度は個々の積分公式によって異なり，また同じ公式でもとられる積分時間間隔の大きさに依存する。

電子計算機が大型化，高性能化するに伴い，有限要素法に代表される数値解析法が急速に進歩，普及し，大規模な方程式の解析が実用レベルで広く行われるようになった^{8)~13)}，解析に採用する直接積分公式の基本的な特性が，得られる解の信頼性に決定的な影響を与えることが認識され，実用化されている種々の積分公式の諸特性およびそれらに固有の問題点が系統的に明らかにされてきた^{14)~21)}。実際，対象となる方程式の係数行列が大次元のものでは，系の固有値が非常に広い範囲に分布する。したがって，このような系の長時間の現象の変化を，小さな時間間隔で繰り返し逐次積分して追跡するような場合や，非線形現象を追跡する解析の場合には，たとえもっともらしい解が得られる場合でも，その解がまったく信頼できないものであったりすることはまれなことではない。

積分公式を導入して具体的な問題の解析を行う立場からいえば，公式を構成するための計算が簡単で，しかも精度のよいものであることが望ましいが，両者がともに満たされることは難しい。したがって実際には，計算対象の特性，計算の目的と積分公式に固有の特性とを総合的，相対的に判断して，用いるべき公式を決めることになる。しかし，積分公式の諸特性が明確な場合でも，選択の判断はそう単純ではない。たとえば，1 つ 1 つの公式の構成および求解過程に必要な計算は簡単だが，精度，安定性などに関する制約のために積分時間間隔を非常に小さくとらなければならなくなる場合と，積分公式は複雑でその構成および求解過程に相当な計算時間を必要とするが，精度がよいために積分時間間隔を大きくとれる場合とでは，計算効率の判断は対象とする全積分時

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 本州四国連絡橋公団 (研究当時 東京工業大学大学院修士課程学生)

*** 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

間範囲の大きさによって変わってくる。また、熱源項に相当する実際の外乱のほか、温度固定などの境界条件も実際の解析では外乱項として扱われることになる。時間に関して連続に分布する外乱項が、有限の時間間隔で逐次積分する形で与えられる公式に、どのように取り込まれ、評価されるかは、得られる結果に重大な影響を及ぼす。したがって、積分公式を選択するうえで外乱項の評価特性も重要な判断要因となる。特に非線形問題の解析では、時間積分法に起因する誤差が得られる結果により微妙に影響することになるから、非線形項の扱いなどに関する、その問題に固有の難しさと、直接積分法に起因する問題点とが錯綜し、解析過程の構成をより困難にしている場合が多く見受けられる。このような場合には、いかにアルゴリズムが複雑であっても、相当に信頼できる時間積分法が与えられれば、問題解決の見通しははるかに開かれることになる。

実用化されている種々の積分公式の問題点が認識され、発展的に新たな積分公式の提案、それらの改良がなされてきてはいるが、研究が進むほど直接時間積分法に関する問題点が強く再認識される場合が多く、根本的な解決に至る道程は遠いと感じるのが現状である。著者らは上述したような現状認識に基づき、その精度に関して相当に信頼できる直接積分法を開発することを目的として研究を行ってきた^{22)~26)}。

本論文は、特に時間に関する1階の連立常微分方程式を対象として、時間方向に有限要素法を適用して構成される直接時間積分法を提案し、その精度、安定性などに関する基本的特性を明らかにするとともに、具体的な数値解析例によってそれらを検証したものである。ここに提案する積分法は、先に著者らが運動方程式の新たな直接積分法の開発に際して提案した方法²²⁾を熱伝導型の方程式に適用することによって構成されたものである。すなわち、本来の変数に関する1階の微分方程式で記述される初期値問題を新たに導入する変数に関する2階の方程式の境界値問題に変換し、得られた支配方程式と等価な変分汎関数を与え、これに基づいて有限要素法を適用し、時間方向の離散化を行うものである。その概要は、これまでに日本鋼構造協会マトリックス法国内シンポジウム^{23)~26)}などにおいて発表した²²⁾が、その後基本的な積分法に基づいた高精度化のアルゴリズムを構成し、積分作用素の高精度化に伴ってとり残されていた外乱項の評価法に関する検討を加え、これの高精度評価法を具体化し、全体的に統一のとれた熱伝導型方程式の直接積分法として一応の完成をみたのでここに発表するものである。

ここに提案する直接時間積分法は、差分公式などと比べれば、アルゴリズムがかなり複雑で、しかもより多く

の記憶容量を必要とする。したがって、1つの積分作用素を構成するために必要な計算時間も相当多くなるが、精度の点では飛躍的な向上がみられている。基礎となる変分原理における自然条件と対象物理量とが明確に対応しており、したがって積分法における外乱項の位置づけがはっきりしているため、積分作用素の精度だけでなく、外乱項の評価精度もともに向上させることができ、精度に関して相当に信頼できる統一のとれた積分法となっている。

2. 基礎方程式

有限要素法または差分法を適用して空間を離散化し有限の自由度に理想化された熱伝導方程式は、式(1)のような時間に関する1階の連立常微分方程式に帰着する。

$$C\dot{x}^{(1)} + Hx = \bar{q} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $x^{(i)} = d^i x / dt^i$ 、 C は熱容量に関するマトリックス、 H は熱伝導および熱伝達に関するマトリックス、 \bar{q} は与えられる熱源および熱流に対応するベクトル、 x は節点温度のベクトルである。温度応定の条件など x の一部が境界条件として与えられる場合は、 x を未知の部分 x_I と既知の部分 \bar{x}_N に分離し、対応する係数マトリックスの部分部分を部分マトリックスで表示して式(1)を次式のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_I^{(1)} \\ \bar{x}_N^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_I \\ \bar{x}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_I \\ q_N \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

したがって、解くべき問題は次式のように与えられる。

$$C_{11}x_I^{(1)} + H_{11}x_I = \bar{q}_I - C_{12}\bar{x}_N^{(1)} - H_{12}\bar{x}_N \dots\dots\dots (3)$$

式(3)を改めて次のように書く。

$$\alpha x^{(1)} + \beta x = \bar{f} \dots\dots\dots (4)$$

式(3)から明らかなように、式(4)の外乱項 \bar{f} には、本来の外乱である熱源および熱流の条件のほかに温度が規定される第1種境界条件の影響も含まれるものである。ここで対象とする問題は、式(4)に示すようなマトリックス表示された時間に関する1階の連立常微分方程式を与えられた初期条件(式(5))のもとで解くことである。

$$x|_{t=0} = x_0 \dots\dots\dots (5)$$

以下の展開においては、式(4)の係数マトリックス α および β は定数係数のマトリックスであるものとし、さらに α が対称である場合に限定する。すなわち、

$$\alpha^T = \alpha \dots\dots\dots (6)$$

本論文における主張の第1は、境界値問題の解法として確立されている有限要素技法を初期値問題の解析に適用するために、式(4)、(5)で与えられる初期値問題を

境界値問題に変換することである。変換にあたっては、有限要素法を適用して得られる解析過程を平易かつ明確に具体化することができ、さらに本来の方程式 (4) の解が基本変数と分離され、自然変数として明確に考慮されるような変分原理を構成することができる過程として、以下に述べるような方法をとる。すなわち、新たに変数ベクトル φ を導入し、本来の変数ベクトル x を次式のように定義する。

$$x = \alpha^{-1}(-\alpha^T \varphi^{(1)} + \beta^T \varphi) \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) を式 (4) に代入して得られる方程式

$$-\alpha \varphi^{(2)} + (\beta^T - \beta) \varphi^{(1)} + \beta \alpha^{-1} \beta^T \varphi = \bar{F} \dots\dots (8)$$

がここで対象とする基礎方程式である。

3. 基礎方程式と等価な変分汎関数

対象とする全時間領域を $0 < t < T$ とする。対象時間領域内で式 (8) に与えた基礎方程式と等価な変分汎関数を次式のように与えることができる。

$$\Pi = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (-\alpha^T \varphi^{(1)} + \beta^T \varphi)^T \alpha^{-1} (-\alpha^T \varphi^{(1)} + \beta^T \varphi) - \varphi^T \bar{F} \right] dt - [\varphi^T F]_0^T \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 F は $t=0$ および $t=T$ において基本変数のベクトル φ に対応する自然変数のベクトルである。式 (9) の変数 φ に関する第 1 変分 $\delta \Pi$ は、

$$\delta \Pi = \int_0^T [\delta \varphi^T \{-\alpha \varphi^{(2)} + (\beta^T - \beta) \varphi^{(1)} + \beta \alpha^{-1} \beta^T \varphi - \bar{F}\}] dt - [\delta \varphi^T (-\alpha \varphi^{(1)} + \beta^T \varphi + F)]_0^T \dots\dots\dots (10)$$

となるから、時間領域の終端 $t=T$ における境界条件として、

$$\varphi|_{t=T} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

を与え、 φ を拘束するものとすれば、式 (9) に与えた汎関数の停留条件 $\delta \Pi = 0$ に対応する Euler 方程式が次式のように示されることは式 (10) から明らかである。

$$-\alpha \varphi^{(2)} + (\beta^T - \beta) \varphi^{(1)} + \beta \alpha^{-1} \beta^T \varphi - \bar{F} = 0 \quad \text{in } 0 < t < T \dots\dots (12)$$

$$-\alpha \varphi^{(1)} + \beta^T \varphi + F = 0 \quad \text{on } t=0 \dots\dots (13)$$

式 (12) は式 (8) に与えた基礎方程式と同じものである。また、本来の変数 x が式 (7) のように定義されていることを考慮すれば、式 (13) で与えられる自然条件は変数 x によって

$$F = -\alpha x \quad \text{on } t=0 \dots\dots (14)$$

のように表わされるものである。式 (14) に示されるよ

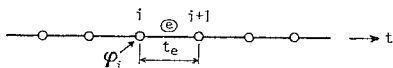


Fig. 1 Discretization of the Time Domain.

うに、自然変数 F が基本変数 φ と分離され、本来の変数 x と直接対応することが、以下の積分法の展開を明確にするための鍵となっている。

4. 有限要素技法に基づいた時間領域の離散化

対象時間領域 $0 < t < T$ 内に数多くの時間節点を導入して有限時間長さの部分時間領域に分割し、全対象時間領域を部分時間領域 (時間要素) の集合として理想化する。各時間節点に対応する時刻 ($t=t_i$) における基本変数のベクトル φ_i を節点変数としてそれぞれの時間節点に導入する (Fig. 1 参照)。各時間要素内の変数 φ の分布をその要素の始端と終端に導入された節点変数の関数として補間する。すなわち時間節点 i および $i+1$ の間に存在する代表的な時間要素 e を考える。この要素の時間長さを $t_e (t_e = t_{i+1} - t_i)$ として、この間での φ の分布を直線分布に近似すれば、要素内の φ は両端の節点に導入された節点変数、

$$u_e^T = \langle \varphi_i^T \varphi_{i+1}^T \rangle \dots\dots\dots (15)$$

によって次のように補間される。

$$\varphi = \Phi B u_e \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$\Phi = [\Gamma_1 \Gamma_{t_e}] \dots\dots\dots (17)$$

$$B = A^{-1} \dots\dots\dots (18)$$

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_0 \\ \Gamma_1 & \Gamma_{t_e} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

であり、記号 $\Gamma \alpha$ は対角要素がすべて α からなる対角マトリックスを意味する。

すべての部分時間領域内の変数 φ の分布が対応する節点変数の関数として式 (16) のように表わされると、式 (9) に与えられた変分汎関数を節点変数の関数として評価することができる。各時間要素内の変数 φ がそれぞれ、要素両端の節点における節点変数のみの関数として一義的に決まるように補間されているので、式 (9) の全対象時間領域にわたる積分は各部分時間領域ごとの積分結果の和として評価することができる。1つの部分時間領域内の積分結果および変分汎関数の停留条件に対応して得られる関係式は、通常の有限要素法における要素剛性関係式に相当する。実際の解析はこれをもとにしてなされるので、ここでは時間要素に対応する関係式の内容を明確にする。すなわち要素内の変数 φ が式 (16) のように補間されると、式 (9) の変分汎関数に現われる微分項は次のように表わされる。

$$-\alpha^T \varphi^{(1)} + \beta^T \varphi = P B u_e \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$P = [\beta^T ; -\alpha^T + t \beta^T] \dots\dots\dots (21)$$

したがって、式 (9) の変分汎関数の停留条件に対応し

て、要素関係式は次式のように得られる。

$$k_e u_e = F_e + \bar{F}_e \dots\dots\dots (22)$$

ここに、マトリックス k_e は、

$$k_e = B^T \left[\int_0^{t_e} P^T \alpha^{-1} P dt \right] B \dots\dots\dots (23)$$

であり、これを部分マトリックスで書くとき、それぞれの部分マトリックスの内容は次のように表わされる。

$$k_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{3} \beta \alpha^{-1} \beta^T t_e + \frac{1}{2} (\beta^T + \beta) + \alpha \frac{1}{t_e} \\ k_{12} &= \frac{1}{6} \beta \alpha^{-1} \beta^T t_e + \frac{1}{2} (\beta^T - \beta) - \alpha \frac{1}{t_e} \\ k_{21} &= k_{12}^T \\ k_{22} &= \frac{1}{3} \beta \alpha^{-1} \beta^T t_e - \frac{1}{2} (\beta^T + \beta) + \alpha \frac{1}{t_e} \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

また、 F_e は時間要素の始端と終端に与えられる自然条件に対応するベクトルで、式 (14) を考慮すれば次式のように表わされる。

$$F_e = \begin{Bmatrix} -F_i \\ F_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha x_i \\ -\alpha x_{i+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

式 (22) のベクトル \bar{F}_e は、部分時間領域内に分布する外乱項の影響を両端の時間節点で評価するための等価節点外乱のベクトルである。すなわち、Fig. 2 に示すように時間要素両端の節点 i および $i+1$ における分布外乱の値が \bar{f}_i および \bar{f}_{i+1} と与えられ、これが時間要素内で直線的に分布する場合には、要素内の外乱の値 \bar{f} は次式のように補間される。

$$\bar{f} = \Phi B \begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

式 (9) の汎関数から明らかなように、外乱項は変数 φ を重み関数とした積分の意味で評価される。要素内の φ の分布が式 (16) のように表わされることを考慮すれば、等価節点外乱 \bar{F}_e は次式のように評価される。

$$\begin{aligned} \bar{F}_e &= \begin{Bmatrix} f_{i,i+1} \\ f_{i+1,i} \end{Bmatrix} \\ &= B^T \int_0^{t_e} \Phi^T f dt \\ &= B^T \left[\int_0^{t_e} \Phi^T \Phi dt \right] B \begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{t_e}{6} \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

以上の関係を考慮して、式 (22) を改めて具体的に示

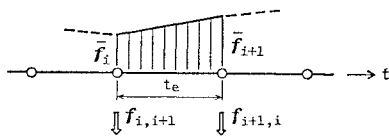


Fig. 2 Equivalent Nodal Loadings.

す。

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha x_i \\ -\alpha x_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{i,i+1} \\ f_{i+1,i} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

5. 積分漸化公式への変換

式 (9) に与えた変分汎関数に基づいて誘導されるマトリックス方程式は、本来、対象時間領域内に導入されたすべての節点変数によって描かれる対象領域全体にわたる方程式である。具体的には、式 (29) に得られた時間要素に関する係数マトリックスを対象領域内のすべての時間要素に適用し、通常の剛性法による解法と同様に、これらを重ね合わせて対象領域全体の係数マトリックスを構成し、与えられた分布外乱に対応する等価節点外乱のもとで、得られた連立1次方程式を解くことになる。この場合境界条件を明確に与えることが必要となるが、ここでは対象領域の始端においては、与えられた初期条件に対して自然条件が $F|_{t=0} = -\alpha x_0$ と与えられ、終端においては基本変数を $\varphi|_{t=T} = 0$ として強制することによって明確に与えることができる。連立1次方程式を解いて得られるものは、各節点に導入された節点変数 φ_i であり、これは構造解析における節点変位に対応する。基本変数 φ_i が求まると、構造解析において要素剛性関係に基づいて部材内力を求めるのと同様に、式 (29) の要素関係式に基づいて各時間節点における対象物理量 x_i を求めることができる。

空間の自由度数に対応する次元の基本変数のベクトル φ_i が時間節点の数だけあるから、このような解法をとる場合、対象とすることになる変数は膨大な数となる。時間積分に関して得られる方程式自体は1次元時間軸に関するものであるから、係数マトリックスは限られた帯幅の性質のよいバンドマトリックスとなる。したがって、対象時間領域全体の方程式を直接解くための実用的に意義のあるアルゴリズムを考えることは可能であるが、通常とられている積分法との対応や、非線形問題への適用、丸めの誤差の問題等を考慮すると、step-by-step に積分していくための漸化公式の型にする方が融通のきく時間積分法となる。したがって、ここで積分漸化公式へ変換することを考える。

式 (29) に得られた時間要素関係式は、時間長さ t_e の部分時間領域の始端と終端の対象物理量 x_i と x_{i+1} との関係を与えている。ここで、要素の時間長さ t_e を積分時間間隔 dt と対応させ、既知の x_i から x_{i+1} を求めるための関係式を構成することを考える。いま、部分時間領域の終端 $i+1$ における基本変数を $\varphi_{i+1} = 0$ として拘束するものとすれば、式 (29) から次の式が得ら

れる。

$$k_{11}\varphi_i = \alpha x_i + f_{i,i+1} \dots\dots\dots (30)$$

$$k_{21}\varphi_i = -\alpha x_{i+1} + f_{i+1,i} \dots\dots\dots (31)$$

式 (30), (31) から φ_i を消去して次式のような漸化公式が得られる。

$$x_{i+1} = -\alpha^{-1}k_{21}k_{11}^{-1}\alpha x_i - \alpha^{-1}(k_{21}k_{11}^{-1}f_{i,i+1} - f_{i+1,i}) \dots\dots\dots (32)$$

式 (32) が本論文で提案する時間積分の漸化公式のうち最も基本的なもので、以下の議論においてはこれを1要素公式とよぶ。

式 (32) では漸化公式を形式的に記述しているため、逐次計算の過程で k_{11} および α の逆行列計算が必要であるかのようにみえるが、実際の計算は式 (30) の右辺が与えられ、式 (30) を解いて φ_i を求め、式 (31) の左辺の乗算を行い、式 (31) を解いて x_{i+1} を求めることになり、この過程では連立1次方程式の解を求める計算だけが必要で、逆行列計算は必要としない。

式 (29) と式 (30), (31) とを比較してわかるように、式 (32) に与えた漸化公式には、式 (29) の係数部分マトリックスのうち k_{12} および k_{22} が含まれていない。有限要素技法を適用して得られた式 (29) は近似関係式であるが、さらに式 (32) ではそれをも有効に用いていないことになる。そこで、計算量は多くなるが、次に示すような方法でより精度の高い時間積分公式を構成することができる。すなわち、積分時間間隔の midpoint に時間節点を導入し、1 積分時間間隔 dt を2つの時間要素で評価することを考える。この場合、式 (25) に与えられた時間要素の部分マトリックス k_{ij} の作成に際しての要素時間長さ t_e は $t_e = dt/2$ とすることになる。ここでも積分時間間隔の終端での基本変数を $\varphi_{i+1} = \mathbf{0}$ とし拘束すれば、次のような新たな漸化公式が得られる。

$$x_{i+1} = -\alpha^{-1}k_{21}[k_{12} - k_{11}k_{21}^{-1}(k_{11} + k_{22})]^{-1}\alpha x_i - \alpha^{-1}[k_{21}[k_{12} - k_{11}k_{21}^{-1}(k_{11} + k_{22})]^{-1} \cdot f_{i,i+1} - f_{i+1,i}] \dots\dots\dots (33)$$

以下の議論においては、式 (33) に得られた積分漸化公式を2要素公式とよぶ。

なお、式 (33) の表示では、等価節点外乱 $f_{i,i+1}$ および $f_{i+1,i}$ は、式 (28) において $t_e = dt$ とし求めた、時間積分区間全体に対する量を用いており、中間節点を配慮して外乱項の評価特性を向上させることはしていない。2要素公式を含め、複数要素公式における外乱については8. で詳述する。

6. 提案する時間積分公式の特性

具体的な説明は省略するが、係数マトリックス α および β の両方もが対称である場合には、式 (32) お

よび (33) に提案した積分漸化公式の積分作用素を直交変換によって対角化し得ることを証明することができる。直交変換に対して固有値は不変であるから、 α とともに β も対称である場合は、1 自由度系の場合に対する漸化公式の特性を多自由度系の場合に得られる解の評価にも適用することができる。

したがって、ここでは次のような1自由度系の自由応答の問題に対して、提案する積分作用素の特性を検討する。

$$\alpha x^{(1)} + \beta x = 0 \dots\dots\dots (34)$$

式 (34) に対応する理論漸化式は次のように与えられる。

$$x_{i+1} = e^{-z} x_i \dots\dots\dots (35)$$

ここに、 $z = \frac{\beta}{\alpha} \cdot dt$ 。

これに対して、1要素公式(式 (32))は1自由度の自由応答の場合には、

$$x_{i+1} = -\alpha^{-1}k_{21}k_{11}^{-1}\alpha \cdot x_i \dots\dots\dots (36)$$

と与えられる。式 (36) の積分作用素が式 (35) の指数関数 e^{-z} を近似的に評価していることになる。提案する1要素公式の積分作用素を E_1 と書くものとし、系の固有値 $\omega = [\beta/\alpha]$ 、積分時間間隔 dt に対する $z = \omega \cdot dt$ に関して積分作用素 E_1 の内容を具体的に展開すると、 E_1 が次式のような関数となっていることがわかる。

$$E_1 = -\alpha^{-1}k_{21}k_{11}^{-1}\alpha = \frac{-z^2 + 6}{2z^2 + 6z + 6} \dots\dots\dots (37)$$

また、式 (33) に与えた2要素公式の積分作用素 E_2 が、 z に関して次のような関数となっていることを示すことができる。

$$E_2 = \frac{z^4 - 48z^2 + 576}{7z^4 + 48z^2 + 240z^2 + 576z + 576} \dots\dots\dots (38)$$

式 (37) および (38) に示された、1要素および2要素公式の積分作用素の関数形が積分時間間隔の大きさに対応する $z = [\omega \cdot dt]$ に対してどのように変化しているかを、正解である e^{-z} の値と比較して図示したものが Fig. 3 (a), (b) である。

作用素 E_1 の値も E_2 の値も $z = [\omega \cdot dt]$ の値によらず常に $|E_i| < 1$ を満たすことから、提案した公式が無条件に安定であることがわかる。 E_1 の値は $z > \sqrt{6}$ の範囲で負となり、 z が無限大に対して E_1 は $-1/2$ に漸近する。このことは、具体的な解析において、対象系の固有値との相対で積分間隔 dt を大きくすると、積分計算を繰り返すたびに正解をはさんで解が小さく得られたり大きく得られたりして、時間方向に振動する解を与える結果になる。しかし、多自由度系の場合には現象の大勢が ω の小さな値に対応するモードに支配されるのが普通であり、 z がかなり大きな場合でも E_1 の値が $-1/2$

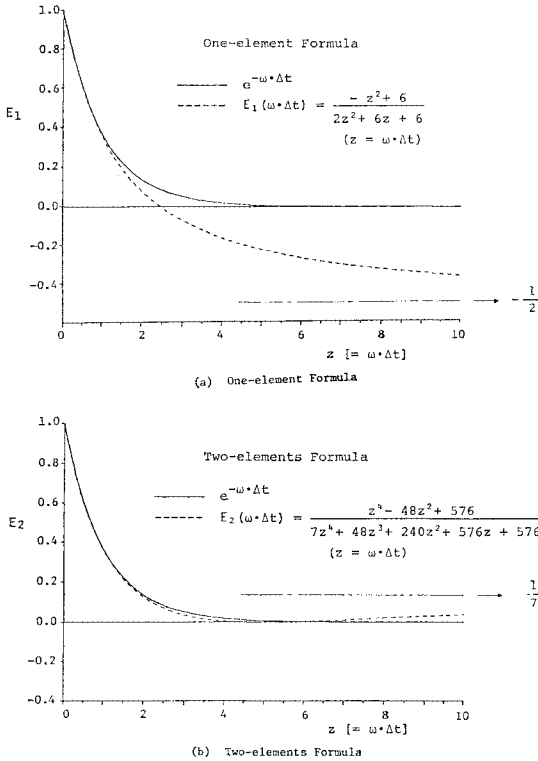


Fig. 3 Variation of the Characteristic Values with $z [= \omega \cdot \Delta t]$ for the One- and Two-elements Formula.

より小さくはならないから、解が振動する場合でも解は急速に収束することになる。

また、Fig. 3 (a) と (b) を比較して明らかなように、2要素公式の場合には、単に1つの積分時間間隔を2つの要素で評価する結果として構成する基本要素の時間長さが半分になるために、精度がよくなるというだけでなく、1要素公式では Δt が大きくなる場合に E_1 が $-1/2$ に漸近するのに対して2要素公式では $1/7$ に漸近するというように、公式の基本的な特性そのものが改善されている。このことは、2要素公式では式 (29) における k_{22} を含めて係数が有効に考慮されるためである。

ここに提案した積分公式の位置づけを明確にするために、実際の解析によく用いられている他の直接積分公式の特性図²⁷⁾を、1要素および2要素公式の特性図と比較して Fig. 4 に示す。

7. 積分公式の特性を検証するための計算例

ここにとりあげる問題は、1辺の長さが 1 m の正方形断面の長い角柱の断面内の温度分布の時間変化を求めようとするものである。すなわち、長さ方向の温度分布は一様なものとして理想化された2次元問題である。初

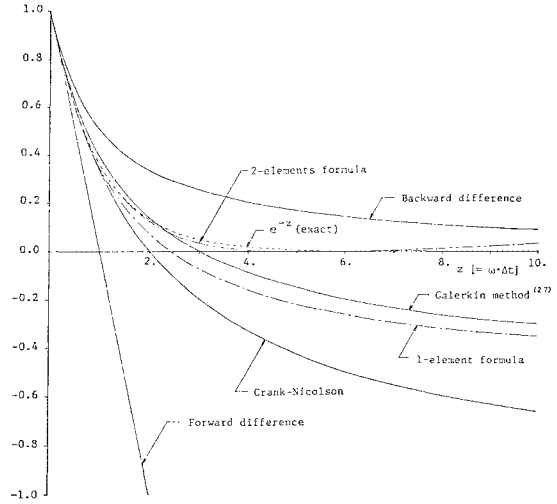


Fig. 4 Comparison of the Characteristic Values of the Proposed Schemes with those of Conventional Schemes (27).

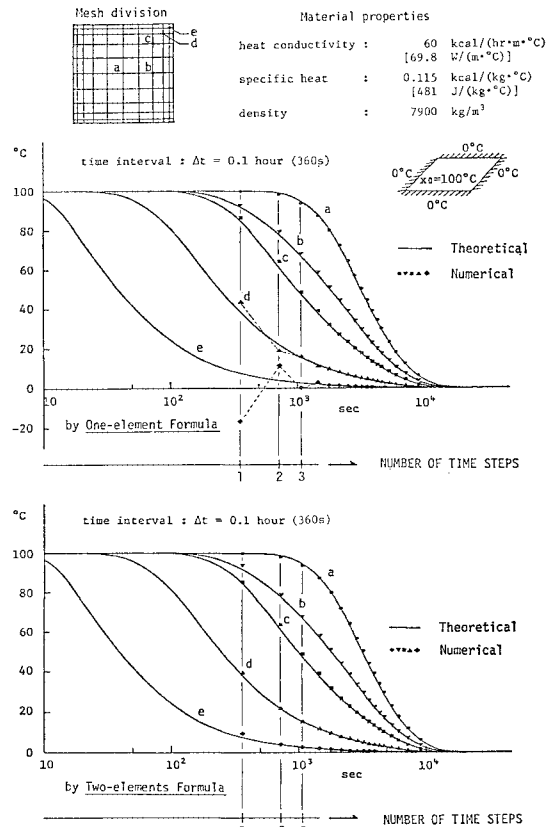


Fig. 5 Temperature Evolutions.

期の温度分布が断面内で一様に 100°C であったものを、時刻 $t=0$ から後の側面の温度を 0°C に拘束する場合である。Fig. 5 は、断面内の温度分布の時間変化を提案した1要素公式および2要素公式を用いて計算し、得ら

$$\hat{f}_0 = \tilde{f}_0 - \sum_{j=1}^{m-1} (k_{11}H_j + k_{12}H_{j-1})\tilde{f}_j \dots\dots\dots(44)$$

式 (43) に得られた関係式は 1 つの積分時間間隔の始端の F_0 と終端の F_m との関係を与えるものである。したがって、式 (43) を時間間隔の始端の $F_i[-\alpha x_i]$ と終端の $F_{i+1}[-\alpha x_{i+1}]$ との関係としてみれば、積分間隔 Δt を m 個の時間要素で評価した場合の積分漸化公式が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} x_{i+1} = & -\alpha^{-1}(k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1})^{-1}\alpha x_i \\ & -\alpha^{-1}[(k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1})^{-1}\hat{f}_i - \tilde{f}_{i+1}] \end{aligned} \dots\dots\dots(45)$$

ここに、

$$\hat{f}_i = \tilde{f}_i - \sum_{j=1}^{m-1} (k_{11}H_j + k_{12}H_{j-1})\tilde{f}_j \dots\dots\dots(46)$$

式 (45) が本論文で提案する一般化された高精度多要素公式である。式 (45) における外乱項 $\hat{f}_i, \tilde{f}_{i+1}$ の意義および実用的な評価法については別途詳しく議論する。

具体的な計算においては、まず 1 つの積分時間間隔を構成する要素数 m を定め、式 (40) に基づいて逐次 H_j を求めて係数マトリックス $k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1}$ を組み立て、式 (45) に従い積分計算を進めることになる。実際の計算に際しては連立 1 次方程式を解けばすむ部分も式 (45) では形式的に逆行列で表示しているが、実際に逆行列計算が必要となるのは、式 (25) に基づいて k_{ij} を構成する際の α^{-1} と、式 (40) の H_j を構成する際の k_{21}^{-1} だけである。全対象時間領域内で積分時間間隔 Δt

が一定で、系の係数マトリックス α および β がその間に不変であれば、係数マトリックス $(k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1})$ は一度作成すればよく、さらに最初の積分計算の際にこれの前進消去を行えば、あとの積分計算では後退代入だけを行えばすむように積分計算過程を組み立てることができる。

式 (45) に与えた多要素公式の $m=3$, および 4 の場合の積分作用素の特性図を Fig. 7 に示した。ここに示した特性図は数値的に求めたものであり、 $z[=\omega \cdot \Delta t]$ が無限大で関数値がどのような値に漸近するかを知るために、 $z=10^8$ の場合の関数値を求め図中に記入した。特性図を一見して明らかのように、多要素公式の要素数が多くなると精度は飛躍的に向上する。これは積分時間間隔の終端で基本変数 φ_{i+1} を強制的に拘束する影響が相対的に低減され、公式の基本的性質そのものが改善されるためである。

9. 高精度公式に対応する外乱項の評価

式 (3) の右辺から明らかなように、熱源項に相当する実際の外乱のほかに、温度固定などの境界条件も実際の解析では外乱項として扱われることになる。時間に関して連続に分布する外乱項が、有限の時間間隔で設定された時間節点で評価されることになるから、外乱項が積分公式を用いた漸化計算にどのように評価されるかは、得られる結果に重大な影響を及ぼす。ここに提案する積分法は変分原理に基礎をおいて展開されており、その中で自然条件が対象物理量と明確に対応するとともに、外乱項の評価過程が明確である。この点が提案する積分法の重要な特徴の 1 つとなっている。

式 (45) に与えた多要素公式は、1 つの積分時間間隔を m 個の時間要素で評価することによって構成されたものである。したがって誘導過程では、この積分時間間隔内に $m-1$ 個の 2 次的な時間節点が導入される (Fig. 8 参照)。これらの内部時間節点 1~ $m-1$, および本来の時間節点 i および $i+1$ (式 (39) の 0 および m がこれに対応する) で考慮されるべき等価節点外乱 (式 (39) の \tilde{f}_j) は与えられた分布外乱に対して式 (28) によって評価される既知量であり、Fig. 2 に示した記号の用い方をすれば次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_i = \tilde{f}_0 = f_{0,1} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{f}_j = f_{j,j-1} + f_{j,j+1} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{f}_{i+1} = \tilde{f}_m = f_{m,m-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

したがって、式 (45) の \hat{f}_i は式 (46) に基づいて決めることができ、また \tilde{f}_{i+1} は式 (47) からただちに決ま

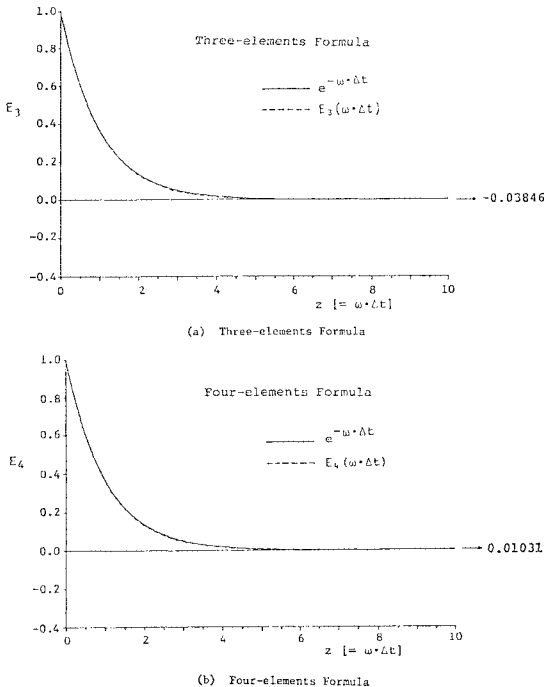


Fig. 7 Variation of the Characteristic Values with $z[=\omega \cdot \Delta t]$ for the Multi-elements Formula.

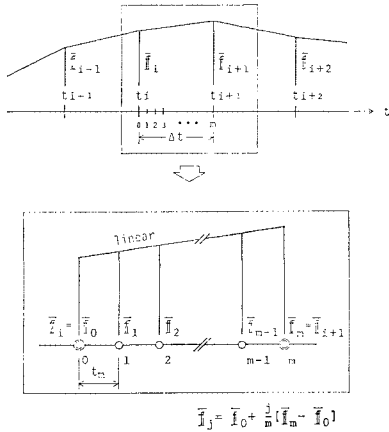


Fig. 8 Schematic Representation of Equivalent Nodal Loadings for the Multi-elements Formula.

るものである。しかし、式 (46) に与えられた \hat{f}_i の計算は相当手間のかかるものである。積分漸化計算のたびにこれを求めなければならないのであれば、積分公式としての実用性が損なわれる。

積分漸化計算にあたって、1つの積分時間間隔内では外乱が直線的に変化していると見なせる場合に限れば、積分区間内部の節点に対応する分布外乱の値 \bar{F}_j が、両端の節点における値 \bar{F}_i, \bar{F}_{i+1} によって次のように一義的に決まるから、一度 \hat{f}_i の計算を行った後はその結果を有効に用いることができるように書き改めることができる。すなわち、

$$\bar{F}_j = \bar{F}_i + j\xi \dots\dots\dots (48)$$

ここに、

$$\xi = \frac{1}{m} (\bar{F}_{i+1} - \bar{F}_i) \dots\dots\dots (49)$$

時間要素内で直線分布する場合の等価節点外乱は、式 (28) のように与えられるので、式 (47) の節点外乱はそれぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_i &= \tilde{f}_0 = t_m \left(\frac{1}{2} \bar{F}_i + \frac{1}{6} \xi \right) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{f}_j &= t_m (\bar{F}_i + j\xi) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{f}_{i+1} &= \tilde{f}_m = t_m \left(\frac{1}{2} \bar{F}_i + \frac{3m-1}{6} \xi \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

したがって、式 (46) の \hat{f}_i は次式のように与えることができる。

$$\begin{aligned} \hat{f}_i &= \tilde{f}_i - t_m \left(k_{11} \sum_{j=1}^{m-1} H_j + k_{12} \sum_{j=1}^{m-1} H_{j-1} \right) \bar{F}_i \\ &\quad - t_m \left(k_{11} \sum_{j=1}^{m-1} j H_j + k_{12} \sum_{j=1}^{m-1} j H_{j-1} \right) \xi \end{aligned} \dots\dots\dots (51)$$

式 (51) の係数マトリックスは、式 (40) に基づいて H_j を求め、式 (45) に与えた積分作用素を構成する過

程と一緒に作成しておくことができる。一度この係数マトリックスを作れば、1つの積分区間内で外乱項が直線的に変化する場合を対象とする限り、後の積分漸化計算における外乱項は、積分区間の両端での分布外乱の値 \bar{F}_i および \bar{F}_{i+1} に対する式 (51) の乗算のみで評価することができる。

式 (51) から明らかのように、外乱項を評価するために必要となる記憶容量および計算量が相当増えることになるが、以下に具体的に示すように、外乱項の評価精度は格段によくなる。

10. 外乱項の近似特性の検討

ここでは、次のような1自由度系を対象として、式 (45) に与えた多要素公式の特に外乱項の近似特性を検討する。

$$\alpha x^{(1)} + \beta x = \bar{f} \dots\dots\dots (52)$$

時間節点 i および $i+1$ ではさまれた積分時間間隔 dt 内で外乱項 \bar{f} が \bar{f}_i から \bar{f}_{i+1} に直線的に変化する場合には、式 (52) の理論解は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= e^{-z} \cdot x_i + \frac{1}{dt} (-ze^{-z} - e^{-z} + 1) \frac{g_i}{\omega^2} \\ &\quad + \frac{1}{dt} (e^{-z} + z - 1) \frac{g_{i+1}}{\omega^2} \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

ここに、 $z = \omega \cdot dt$, $\omega = \beta/\alpha$, $g_i = \bar{f}_i/\alpha$, $g_{i+1} = \bar{f}_{i+1}/\alpha$ である。式 (53) の外乱項を改めて次のようにとりあげる。

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{dt} (-ze^{-z} - e^{-z} + 1) \frac{g_i}{\omega^2} \\ &\quad + \frac{1}{dt} (e^{-z} + z - 1) \frac{g_{i+1}}{\omega^2} \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

これに対して、式 (45) に与えた多要素公式の外乱項は、1自由度系で外乱項が積分区間内で直線的に変化する場合には、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{G}_m &= E_m(z) \left\{ \tilde{g}_i + t_m \left(\sum_{j=1}^{m-1} E_j(z) \right) \tilde{g}_i \right. \\ &\quad \left. + t_m \left(\sum_{j=1}^{m-1} j E_j(z) \right) \xi \right\} + \tilde{g}_{i+1} \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}_i &= \frac{t_m}{6} (3\tilde{g}_i + \xi) \\ \tilde{g}_{i+1} &= \frac{t_m}{6} \{ 3\tilde{g}_i + (3m-1)\xi \} \\ \xi &= \frac{1}{m} (\tilde{g}_{i+1} - \tilde{g}_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

であり、

$$E_j(z) = -(k_{11} H_j + k_{12} H_{j-1})^{-1} \dots\dots\dots (57)$$

である。理論的には式 (54) のように評価されるべき外乱項が近似公式においては式 (55) のように評価されることになる。したがって両者を相対的に比較検討するこ

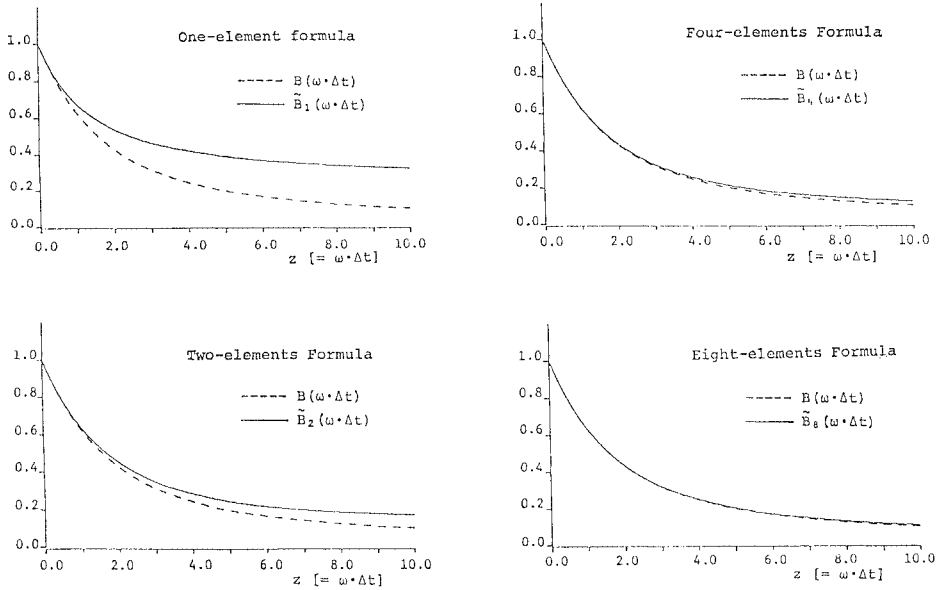


Fig. 9 Variation of the Characteristic Values of the Equivalent Nodal Loadings with $z [= \omega \cdot \Delta t]$.

とによって、外乱項の近似特性を明らかにすることができる。

ここでは、相対的な評価が明確になるように、積分区間内で外乱が一定の場合を対象とする。すなわち、

$$\bar{g} = \bar{g}_i = \bar{g}_{i+1} \dots \dots \dots (58)$$

いま、 G および \tilde{G}_m を

$$Q = \bar{g} \cdot \Delta t \dots \dots \dots (59)$$

で除して無次元化すると次のようになる。

$$B(z) = \frac{G}{Q} = \frac{1}{z}(1 - e^{-z}) \dots \dots \dots (60)$$

$$\tilde{B}_m(z) = \frac{\tilde{G}_m}{Q} = \frac{1}{m} \left[E_m(z) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} E_j(z) \right\} + \frac{1}{2} \right] \dots \dots \dots (61)$$

式 (61) の $\tilde{B}_m(z)$ の値を $z [= \omega \cdot \Delta t]$ に関して求め、式 (60) の $B(z)$ の値と比較して図示したのが Fig. 9 である。Fig. 9 から明らかなように、多要素公式の場合には、単に 1 つの基本要素の時間長さが短くなるために近似特性がよくなるだけでなく、特性が本質的に改善されることがわかる。

11. 多要素公式の効率を検証するための適用例

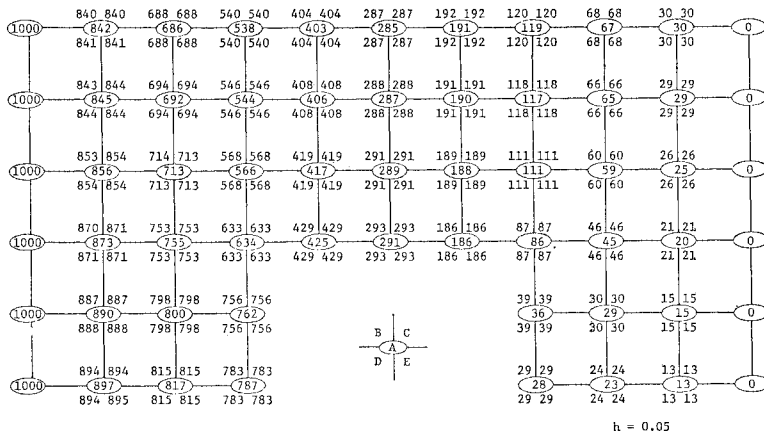
ここで対象とする例題は、Fig. 10 に示すような凹隅角部を有する 2 次元問題である。初期温度が 0°C であった対象が、ある時間瞬間から以後 ($t \geq 0$) は対象領域の左辺 ($x=0$) が 1000°C に拘束され、右辺 ($x=1.0$) が 0°C に拘束される場合の領域内の温度分布の時間変化を追跡するものである。その他の境界に対しては断熱

の条件を課している。

この問題は、差分法で空間を離散化し、時間積分に差分公式を適用する場合に特異点となる凹隅角部を有する問題で、その処理法の展開に際してとりあげられてきた問題である。最近では J.C. Bruch, Jr. ら⁹⁾ が重みつき残差法に基づいて空間とともに時間を含めて有限要素法を適用する解法を展開した際にこの問題を取りあげて計算を行い、差分法による結果と比較している。その後、G.E. Bell ら⁹⁾ は、凹隅角部の評価精度を高めるための独自の差分公式を展開してこの問題を取りあげている。

上述の Bruch, Jr. らおよび Bell らの展開においては、両者とも、本来の初期条件が領域内のすべての点で 0°C であるべき問題に対して、その積分出発時の処理の都合上、凹部のない長方形領域の問題（この場合には 1 次元問題に理想化される）の理論解である誤差関数によって求まる微小時間経過後の解を初期条件として与えて積分を始めている。本論文で提案した積分法は、これまでの説明から明らかなように、積分漸化計算の出発時になら特別な手続きを必要としない。したがって、Fig. 10 に示した計算結果はすべて初期条件は完全に 0°C として求めたものである。

計算に際しては、上述の 2 論文でとられている要素分割または差分格子と同じ要素分割を用いている。また、Bell らの論文では温度伝導率 κ および長辺の長さで無次元化された 1 差分格子間隔 $h=0.05$ に対して、 $\kappa \Delta t = h^2/6$ として、積分計算のステップ数 $n=240$ 、すなわち $n\kappa \Delta t=0.1$ の値を表示している。これに対して、Bruch, Jr. らの論文では上と同じ時点まで 200 ステップで計算し、その結果を示している。



A	Bruch, Jr., et al. ¹⁴⁾	200 steps
B	1-element formula	200 steps
C	2-elements formula	100 steps
D	4-elements formula	50 steps
E	8-elements formula	25 steps

Fig. 10 Temperature Distribution Corresponding to $n \cdot \kappa \cdot \Delta t = 0.1$.

Fig. 10 に示した本積分法による結果は、上述の2論文で与えられた結果と対応させて、同じ時点の解を、1要素公式では200ステップ、2要素公式では100ステップ、4要素公式では50ステップ、8要素公式では25ステップで計算したものであり、それらを Bruch, Jr. らの結果と比較したものである。本積分法による結果はすべてほぼ同じ値が得られているが、Bruch, Jr. らの結果とは若干の差がみられる。著者らの計算では熱容量に関するマトリックス α は lumping しており、また時間積分方法の違いだけでなく、有限要素法による空間の離散化の方法の違いも影響すると考えられるので、どちらがより正しいかは速断できない。

ここに用いた1要素公式から8要素公式までのそれぞれの公式に対して、積分公式を構成するために要した時間および1ステップの求解過程に要した時間を Table 1 に示した。Table 1 から明らかのように、多要素公式では積分公式を作成するために必要となる時間は多くなるが、それから先の各ステップごとの積分漸化計算

に要する時間はほぼ同じである。Fig. 10 からわかるように、同じ精度の解を得るのに1要素公式では200ステップ必要としたのに対して、8要素公式では25ステップで済んでいる。したがって、長時間の現象の変化を追跡するような解析の場合には、多要素公式を用いた方が計算効率がよくなる場合は十分にあり得ることである。

12. 外界との間に熱交換を伴う境界のある問題

外界との間に熱交換を伴う過渡熱伝導問題は、比較的解析しにくいとされている問題である。ここ

では Fig. 11 に示すような、凹隅角部を有し、さらに周囲の境界において外界との間に熱交換の条件が与えられた問題を対象として解析した結果を示す。このような問題に対する比較すべき解が対象の詳細とともに与えら

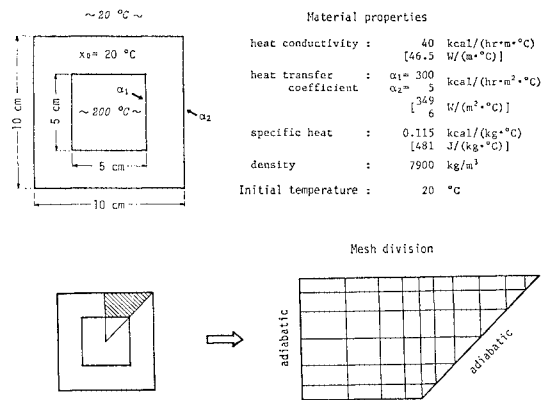


Fig. 11 Problem with Heat Transfer to Surrounding Atmosphere.

Table 1 Comparison of the Execution Time (sec.) Consumed in the Processes of Constitution and Performance of the Multi-elements Formula.

Number of time elements (m)		1	2	4	8	
Process of constituting $k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1}$	Number of repetition steps	0	1	3	7	1,443/step (average)
	Repetitious process for composing H_m, H_{m-1}	—	1.436	4.277	10.162	
	Composition of $k_{11}H_m + k_{12}H_{m-1}$	4.339	3.351	4.413	4.308	
	Total CPU time	4.339	5.787	8.690	14.470	
Process of time integration	The first step of integration (involving forward reduction)	2.854	2.920	2.872	2.866	0.161/step (average)
	Number of succeeding steps	199	99	49	24	
	Succeeding steps (involving backward substitution)	32.094	15.805	7.892	3.938	
	Total CPU time	34.893	18.859	10.761	6.730	

れている文献は、著者らの知る範囲では見当たらない。したがってここでは、結果の検証というよりも、このような例題に対してもここに提案する直接時間積分法によって安定して解析を進めることができる、ということを示すことを目的として、設定した問題および得られた結果の詳細を示す。

解析対象は Fig. 11 に示したように、正方形の中空部を有する正方形断面のパイプを想定し、軸方向の温度は一樣として理想化された2次元問題である。初期温度分布が断面内で一樣に 20°C であったものに、ある時間瞬間以後 ($t > 0$) にパイプ内部に 200°C の流体が流れ、

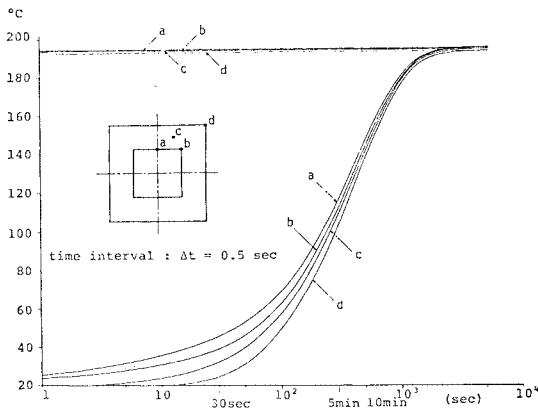


Fig. 12 Temperature Evolutions.

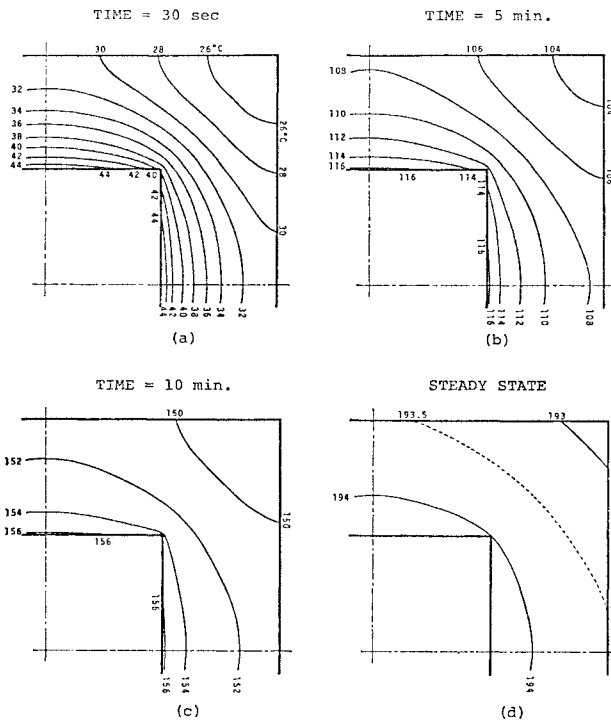


Fig. 13 Temperature Distributions in a Section.

パイプの内壁と流体との間に熱交換が生ずる問題である。パイプの外側の表面は 20°C の流体と接しており、ここにも熱交換の条件を与えている。熱交換はニュートン則に従うものとしており、設定した熱交換係数およびその他の物性値は図中に記入したとおりである。対称条件を考慮してパイプ断面の 1/8 を対象として解析した。解析に用いた要素分割は図中に示したとおりである。解析には本論文で提案した積分公式のうち 4 要素公式を用いている。また、積分時間間隔は $\Delta t = 0.5$ 秒 (0.5 s) として計算した。

Fig. 12 は断面の特定の点 (図中に明記した) の温度の時間変化を計算結果に基づいて示したものである。図中に示した横線は、定常問題として解析した結果得られた、対応する点の温度を示したものである。積分漸化計算によって得られた解は定常解に収束している。また、Fig. 13 (a)~(c) に 30 秒 (30 s)、5 分 (300 s) および 10 分 (600 s) 後の断面内の温度分布を示し、Fig. 13 (d) には定常問題として得られた断面内の温度分布を示した。

13. おわりに

以上に、熱伝導型方程式を対象として、時間方向に有限要素技法を適用して構成される直接時間積分法およびそれに基づいた高精度化のアルゴリズムを提案し、その精度、安定性などに関する基本的な特性を検討した。ここに提案した直接時間積分法は、差分公式などと比べれば公式の構成および求解過程が相当複雑であり、またかなり多くの記憶容量を必要とするが、精度は飛躍的によくなっている。また、本積分法は変分原理に基礎をおいて構成されたものであり、基礎となる変分原理における自然条件と対象物理量とが明確に対応している。その結果、積分作用素の精度とともに、外乱項の評価精度も向上させることができている。精度に関して相当に信頼できる統一のとれた積分法となっている。さらに本積分法の重要な特色は、積分計算の出発時になら特別な手続きを必要とせず、初期条件からただちに積分可能なことである。

公表されている積分法の中で精度がよいとされているものの多くは高精度差分法に相当し、近似精度を高めるために多くの時間点における物理量を取り込む形で構成されたものである。したがってある程度積分漸化計算を進めた後の一般部に対しては相当に精度が高くなるが、そのかわり積分計算の出発時には相当複雑な手続きが必要となるのが普通である。最近では重みつき残差法に基づ

いて時間方向に有限要素法を適用して得られた公式なども公表されているが、この場合には外乱の位置づけが明確でなく、積分作用素に関する議論が主で外乱項の評価に対してはほとんど言及されていない。したがって、積分作用素の精度に比べて外乱項の精度がとり残される結果となっている。

有限要素法に代表される数値解析法が普及し、大規模な方程式の解析が実用レベルで広く行われている現在、アルゴリズムがいかにも複雑であっても、精度に関して相対的に信頼できる直接時間積分法を必要とする問題は多い。このような問題の解決に対して、本積分法が有力な手がかりとなり得ると確信している。また、計算効率を判断する要因は、単に1つ1つの公式の構成および求解過程に必要な計算手続きの問題だけではない。得られる公式の精度がよいものであれば積分時間間隔を相当に大きくとることができるので、長時間の現象の追跡などの場合には、精度のよい積分法はそれなりに効率のよい積分法としても位置づけられることになる。

ここに提案した直接時間積分法が、通常用いられている公式の中で一般に精度が高いといわれている方法に比べても隔絶の精度を有し、しかも積分作用素の精度だけでなく外乱項の評価精度もともに高いものであり、さらに積分漸化計算の出発時になら特別な手続きを必要とせず、初期条件からただちに積分計算を進めることができる方法であるという特色を考えると、その存在意義は非常に大きいと判断している。

参 考 文 献

- Zienkiewicz, O.C. and R.W. Lewis : An Analysis of Various Time-Stepping Schemes for Initial Value Problems, *Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn.*, Vol. 1, pp. 407~408, 1973.
- Zienkiewicz, O.C. : A New Look at the Newmark, Houbolt and Other Time Stepping Formulas. A Weighted Residual Approach, *Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn.*, Vol. 5, pp. 413~418, 1977.
- Warzee, G. : Finite Element Analysis of Transient Heat Conduction, Application of the Weighted Residual Process, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 3, pp. 255~268, 1974.
- Bruch, Jr., J.C. and G. Zyzolowski : Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 8, pp. 481~494, 1974.
- Trujillo, D.M. : The Direct Numerical Integration of Linear Matrix Differential Equations Using Padé Approximations, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 9, pp. 259~270, 1975.
- 清水信行・渡辺嘉二郎・嶋田健司・鎌田美知枝・山本鎮男 : 大次元常微分方程式の直接数値積分法, 日本機械学会論文集, 第43巻, 第368号, pp. 1272~1289, 1977年4月.
- 塩尻弘雄・中村秀治 : 構造解析における動的応答解析の一方法について, 土木学会論文報告集, 第246号, pp. 21~33, 1976年2月.
- Hogge, M.A. : Integration Operators for First Order Linear Matrix Differential Equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 11, pp. 281~294, 1977.
- Bell, G.E. and J. Crank : A Simple Finite-Difference Modification for Improving Accuracy Near a Corner in Heat Flow Problems, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 10, pp. 827~832, 1976.
- Neuman, S.P. and T.N. Narasiman : Mixed Explicit-Implicit Iterative Finite Element Scheme for Diffusion-Type Problems : I. Theory, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 11, pp. 309~323, 1977.
- Narasiman, T.N., S.P. Neuman and A.L. Edwards : Mixed Explicit-Implicit Iterative Finite Element Scheme for Diffusion-Type Problems : II. Solution Strategy and Examples, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 11, pp. 325~344, 1977.
- Zlatev, Z. and P.G. Thomsen : Application of Backward Differentiation Methods to the Finite Element Solution of Time-Dependent Problems, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 14, pp. 1051~1061, 1979.
- Cermák, L. and M. Zlámal : Transformation of Dependent Variables and the Finite Element Solution of Nonlinear Evolution Equations, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 15, pp. 31~40, 1980.
- Bathe, K.J. and E.L. Wilson : Stability and Accuracy of Direct Integration Methods, *Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn.*, Vol. 1, pp. 283~291, 1973.
- Wood, W.L. and R.W. Lewis : A Comparison of Time Marching Schemes for the Transient Heat Conduction Equation, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 9, pp. 679~689, 1975.
- Argyris, J.H., L.E. Vaz and K.J. Willam : Higher Order Methods for Transient Diffusion Analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 12, pp. 243~278, 1977.
- Hilber, H.M. and T.J.R. Hughes : Collocation, Dissipation and 'Overshoot' for Time Integration Schemes in Structural Dynamics, *Int. J. Earthq. Engng Struct. Dyn.*, Vol. 6, pp. 99~117, 1978.
- Wood, W.L. : On the Zienkiewicz Three- and Four-Time-Level Schemes Applied to the Numerical Integration of Parabolic Equations, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 12, pp. 1717~1726, 1978.
- Pammer, Z. : A Mesh Refinement Method for Transient Heat Conduction Problems Solved by Finite Elements, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 15, pp. 495~505, 1980.
- 清水信行・本間美知枝・山本鎮男・渡辺嘉二郎・嶋田健司 : 大次元常微分方程式の直接数値積分法(積分法の評価と選定基準), 日本機械学会論文集, 第46巻, 第401号, pp. 26~41, 1980年1月.
- Connor, J.J. and G.C. Christodoulou : Stability of Finite Element Models for Convection-Diffusion, U.S.-Japan Seminar of Interdisciplinary Finite Element Analysis, Cornell Univ., N.Y., 1978.
- 吉田 裕・増田陳紀・村田 修 : 運動方程式と等価な変分汎関数と時間積分の有限要素スキーム, 土木学会論文報告集, 第254号, pp. 27~36, 1976年10月.
- 藤原 亨・吉田 裕・増田陳紀 : 1階の連立線形常微分方程式の直接積分法, 第32回土木学会年次学術講演会講演概要集, I-60, 1977年10月.
- 藤原 亨・吉田 裕・増田陳紀 : 熱伝導型方程式の積分法とそれに基づく運動方程式の解法, 第33回土木学会

- 年次学術講演会講演概要集, I-13, 1978年9月.
- 25) 吉田 裕・増田陳紀・藤原 亨：有限要素法に基づいた熱伝導型方程式の時間積分公式, 日本鋼構造協会第11回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, pp. 121~126, 1977.
- 26) 吉田 裕・増田陳紀・藤原 亨：1階線型連立常微分方程式の直接積分法, 日本鋼構造協会第13回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, pp. 31~36, 1979.
- 27) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, 3rd edn., Chap. 21, McGraw-Hill, London, 1977.

(1980.8.21・受付)
