

非定常浸透流における境界面問題の 有限要素解析とその実験的検証

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF INTERFACE PROBLEM IN
NONSTEADY SEEPAGE AND ITS VERIFICATION
BY AN EXPERIMENTAL MODEL

河野 伊 一 郎*

By Ichiro KOHNO

1. ま え が き

異なった密度と異なった粘性を有する2つの液体が、1つの境界面で接しながら土中を浸透する問題は、浸透流における境界面問題 (Interface Problem) とよばれる。海岸地下水における淡水-塩水の境界面問題に代表され、また、石油開発やその地下貯留に伴う油-地下水の問題あるいは地下水中への漏油問題などがこの種の問題に属する。また、この液体の1つが空気に置き換わったと考えた場合には自由水面を有する地下水問題であり、この範ちゅうの特異なケースと考えることができよう¹⁾。

これらの浸透流における境界面問題は、海岸地下水における淡水-塩水の境界面問題としてこれまで数多く取り上げられ、研究されてきた。その先駆的研究は、Ghyben, Herzberg らによって行われ、また、わが国では Nomitsu, Toyohara, Kamimoto らによって解析的な研究が実施され、その定常流としての特性がある程度明らかにされた²⁾。その後も、Kochina³⁾, Strack⁴⁾ らは複素関数論によるホドグラフ解法等を用いて、海岸地下水の境界面問題の定常解を求めている。特に Strack は淡水部から揚水した場合の境界面の変化、すなわち Upcone 現象を非常に複雑な複素関数変換を履行して巧みに解くことに成功している。そのほか、わが国では、上田, 杉尾, 崎山らによる研究^{5), 6)}をはじめ、複素関数論を応用した研究が数多くなされているが、それらは主として時間的な変化を伴わない定常問題としてのものである。

一方、非定常問題として取り扱った研究としては、Muskat⁷⁾ や Tamai らの研究⁸⁾, その他⁹⁾があるが、それらは Dupuit-Forchheimer の仮定を用いた準一様流

的な取扱いをして塩水くさびの先端の時間的な移動を求める式を誘導しているもので、必ずしも一般的な解法とはいえない。

これに対して著者は、有限要素解析の手法をこれらの問題に適用することを試みてきた^{10)~12)}。それによって定常問題に対しては、これまでのように複雑な複素関数論やホドグラフ解法などの特殊な数学的手法を駆使せず、また境界条件に厳しく制限されることが少なくなった。また非定常問題に対しても、これまでのような準一様流などの仮定 (限定) が必要でないこと、さらには、定常・非定常問題において、境界条件による制限がきわめて少ないばかりでなく、複素関数論では不可能である3次元浸透流解析への拡張が可能であることなどの汎用性を有していることが特長である。

浸透問題を解析する手法として、有限要素解析が数多く行われるようになり、またその手法は多くの著書にも紹介されるようになった。飽和状態に限らず、不飽和問題にも拡張され¹³⁾、また拡散問題についての解析も可能となっている¹⁴⁾。

本文では、飽和状態における非拡散流体としての浸透解析を行っている。

まず、有限要素法を利用した解析手法について、特に境界面が満足すべき2つの条件、すなわち、(i) 境界面上では両液の圧力が等しいこと、(ii) 境界面の移動に際して質量保存則による連続の条件が成立すること、をいかに計算に取り入れるかを中心に解説を行う。

次に、この有限要素解析の精度等を検証するために、以前に著者が開発した細管網モデル¹⁵⁾を使って2層浸透流の実験を実施した。その実験結果を同一条件における有限要素解析結果と対比して検討することにより、この解析方法の精度等の保障と現実問題の解析手法としての適応性を示し得たと考えている。

これらの認識に基づいて、海岸地下水の揚水 (あるいは

* 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科

は注水)による淡水-塩水境界面上昇(あるいは下降), すなわち Upcone 現象を解析例として取り上げ, それらの計算結果を示した.

2. 基礎関係式と満足すべき条件

Fig. 1 (a) に示すような異なった密度 (γ_f, γ_s) と異なった粘性 (μ_f, μ_s) を有する2つの液体 (F と S) が境界面 ABC で接しながら土中を浸透している2次元浸透流を考える. **Fig. 1** (b) は, その典型である海岸地下水における淡水 (F) と塩水 (S) の境界面ならびにその境界状況を示した概念図である.

F, S 領域における水頭表示は, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned} h_f &= z_f + \frac{P_f}{\gamma_f} \text{ or } P_f = \gamma_f h_f - \gamma_f z_f \text{ in } F \\ h_s &= z_s + \frac{P_s}{\gamma_s} \text{ or } P_s = \gamma_s h_s - \gamma_s z_s \text{ in } S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに, h は全水頭 (ヒエゾメーター水頭), z は位置水頭, P は水 (液) の圧力, である.

また, 運動方程式は土中浸透におけるダルシーの法則が適用できるとして,

$$\left. \begin{aligned} v_f &= \frac{\gamma_f}{\mu_f} K_0 \frac{dh_f}{ds} = k_f \frac{dh_f}{ds} \text{ in } F \\ v_s &= \frac{\gamma_s}{\mu_s} K_0 \frac{dh_s}{ds} = k_s \frac{dh_s}{ds} \text{ in } S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここに, v は流速 (みかけの流速), k は透水係数, K_0 は物理透水係数 (Physical Permeability Coefficient), s は浸透流方向の距離である.

また, 断面2次元浸透流 (x, z 平面内) に対して, F, S 領域においてそれぞれ式 (1), (2) の表示をすれば, 連続の式は次のように表わされる.

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + q \text{ in } F, S \dots\dots\dots(3)$$

または,

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\gamma}{\mu} K_0 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) + q \dots\dots\dots(4)$$

ここに, v_x, v_z はそれぞれ x, z 方向の流速成分, S_0 は比貯留係数 (不飽和状態での比水分容量と同じもの) である. q は浸透領域外からの水収分量である. また3次元浸透流に対しては, 式 (3) の右辺に $(\partial v_y / \partial y)$ の項を加えることにより, 容易に拡張できる. しかし, 以降は2次元浸透流について解説することとする.

したがって, 問題は与えられた初期条件, ならびに境界条件のもとで, それぞれの領域で式 (4) を解けばよいことになるが, ここで, 境界 ABC 上において次の2つの条件が満足されねばならない.

- (i) 境界面 ABC 上では, 力のつり合いの条件から, 両流体の圧力が等しいこと.

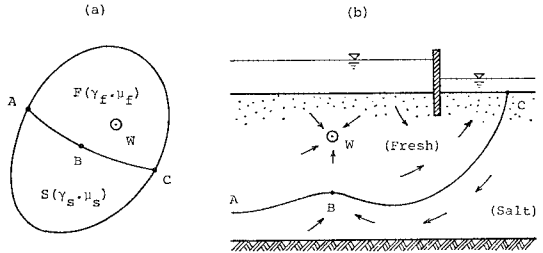


Fig. 1 Domains and interface.

- (ii) 境界面の移動に際して, 境界面上での連続の関係が成立していなければならないこと.

である.

条件 (i) について, 式 (1) において $P_f = P_s$ とおくと,

$$z_B = \frac{\gamma_f}{\gamma_f - \gamma_s} h_f - \frac{\gamma_s}{\gamma_f - \gamma_s} h_s \dots\dots\dots(5)$$

または,

$$h_f = \frac{\gamma_f - \gamma_s}{\gamma_f} z_B + \frac{\gamma_s}{\gamma_f} h_s$$

$$h_s = \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_s} z_B + \frac{\gamma_f}{\gamma_s} h_f$$

が成立する. ここに, $z_B = z_f$ (境界面上の点 B) である. すなわち, 境界面の位置が決まれば, その点では両液の全水頭には一定の関係式 (5) が成立していなければならないことが理解できる.

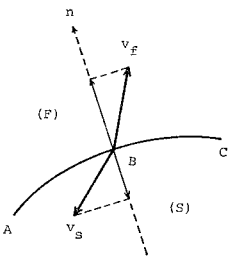


Fig. 2 Conservative relationship.

次に, 連続の条件 (ii) については, **Fig. 2** を参照して,

$$\frac{\partial v_f}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

の関係式が満足されなければならない.

ここに, n は境界面に垂直な方向の座標である.

3. 有限要素解析の手法

前章で述べたように, 問題は, 与えられた境界・初期条件のもとで, さらに条件 (i), (ii) を満足させながら (すなわち, 水頭変化に伴って位置が変動する境界を求めながら), 式 (4) を解くことに帰する.

式 (4) を有限要素解析する手法に関しては, 紙数の制約もあり, またすでに多くの文献⁽⁶⁾にも示されているので, 改めて本文で説明することは省略し, ここでは条件 (i), (ii) を満足させながら境界面の時間的変動を追跡する方法を中心に解説することにする.

境界 (特に時間とともに変動する境界面 ABC) を除く浸透領域内部は, 完全飽和の状態, 非圧縮性媒体な

らびに流体であると考え、式(4)の($S_0=0$)となつて、左辺は零であり、したがつてその領域内部では定常浸透流の定式化とその計算式の利用が可能となる。その場合には、境界面の時間的な変動をのみ差分的に追跡することにより、非定常境界面問題の解析を行うことができる。従来から、自由地下水面を有する飽和浸透流の解析にしばしば用いられている手法である¹⁷⁾。本文における境界面の追跡の手法の説明も、上記のような条件下における計算順序を示すことにする。

なお、領域内部で($S_0 \neq 0$)の条件での有限要素解析についても、式(4)の有限要素解析の定式化によって、後出の式(7)と同形の関係式を解くことになる¹⁸⁾ので、この場合の境界面問題の解法についても手順はまったく同様で、その理解は容易であろう。

三角形要素区分による定常浸透流の有限要素解析の定式化は、Fig. 3を参照して、変分法により次式のように示される¹⁹⁾。

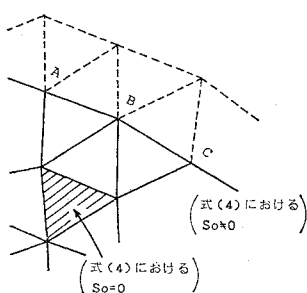


Fig. 3 Triangular finite elements.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n^f} P_{ij}^f h_j^f + Q_i^f + Q_i^{f*} &= 0 \quad (i=1 \sim n^f) \text{ in } F \\ \sum_{j=1}^{n^s} P_{ij}^s h_j^s + Q_i^s + Q_i^{s*} &= 0 \quad (i=1 \sim n^s) \text{ in } S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 P_{ij} : 浸透性行列、 Q_i : 式(3)の q によって決定される量、 Q_i^* : 水頭が既知の境界上における流出量(境界外への流出量が正、流入量が負となる)、 n^f 、 n^s はそれぞれ F 、 S 領域内の節点(nodes)の数である。なお、右肩上の添字はそれぞれの領域(F 、 S)を示している。

さて、Fig. 4の境界面上の各節点については、上記の条件(i)を満足するために式(5)が成立しなければならない。さらに、条件(ii)を満足するためには、式

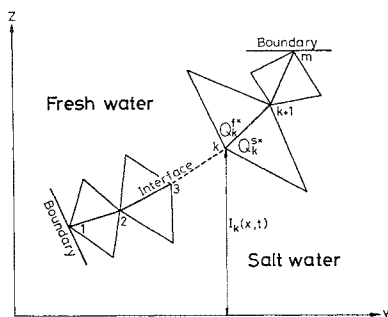


Fig. 4 Finite elements along interface.

(7)を適用するにあつて式(6)が成立しなければならない。この場合、式(6)が満足されるためには、境界面上の節点(k)について、

$$Q_k^{f*} + Q_k^{s*} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (8)$$

が成立することが必要かつ十分条件となる。ここに、 m は境界面上の節点数である。もちろん、 Q_k^{f*} の計算は領域 F 内のエレメントのみを対象とし、 Q_k^{s*} は領域 S 内について計算される。

以上の具体的な手順を以下に示そう。

(1) 初期条件(境界面ABCの位置と h^s 、 h^f の分布)を与える。当然境界面上でのそれらの値は式(5)を満足していなければならない。

(2) 境界面上の節点(k は与えられている)について、式(7)を用いて Q^{f*} 、 Q^{s*} を求め、

手順(1)、(2)において、 h^f 、 h^s が与えられない場合には、次の㉔~㉑の手順をとることになる。

㉔ まず、境界面を不透水層として、一方の S 領域内の h^s の分布を式(7)を用いて計算する。その場合には当然 $Q^{s*}=0$ となる。次に、㉕ こうして求めた境界面上の h^s を式(5)に代入して、境界面上の同一節点の h^f の値を求め、

㉖ F 領域内部のすべての節点について h^f を式(7)によって計算する。㉗ 境界面上の節点(1~ m)について、 Q^{f*} を計算する。このような手順で Q^{f*} 、 Q^{s*} 、 h^f 、 h^s を計算によって求め、次のステップ(3)へ移ることになる。

(3) 式(9)によって余剰値 R を計算する。

$$R = Q^{f*} + Q^{s*} \dots\dots\dots (9)$$

式(8)により本来、 $R=0$ でなければならず、 $|R| > \epsilon_0$ (ϵ_0 : 許容値)であれば、次のような修正が行われる。

(4) 前回の計算によって求めた Q^{f*} の代わりに($Q^{f*} - R/2$)を式(7)に代入して、境界面上の h^f を新たに求める。もちろん領域内の他の節点についても h^f を計算する。こうして求められた h^f を式(5)に代入して、新しい h^s を計算する。

(5) 上記の手順(2)~(4)の課程を繰り返し実行し、 R が十分小さくなったときの Q^* を決定する。

(6) このようにして求められた Q^* から Δt 時間後の境界面の位置、すなわち移動量を計算して求める。この境界面の移動の考え方、方法・手順については、自由地下水面の非定常解析における手法とまったく同じである。したがって文献18)等を参照されたい。

なお、筆者は文献18)にも示しているように、境界面の移動量(移動速度)の算定に際して、境界面上の仮想の水収支量 Q^* を計算し、それに基づいて、移動量を決定して、境界面を追跡する手法をとっている。一方、境界面を含む要素内の浸透流速を計算して、それが境界面の移動速度であると考えて境界面を追跡する手法も可能

である。

4. 細管網モデルによる実験的検証

上記の有限要素解析の精度等を概略的に確認するために、著者が開発した細管網モデル²⁰⁾を用いて2層浸透流を発生させ、特に境界面の移動を観察、計測した。一方、その実験モデルと同条件のもとに、前章で述べた有限要素解析を行い、両者の観測値と計算値を比較することにした。

(1) 実験装置および実験方法

本実験で用いた細管網モデルは、Fig. 5に示すように、細管を網目状に接続して、このネット内に粘性流を生じさせ、浸透流を模擬させるものである。

この細管網実験モデルは製作が容易であるばかりでなく、次のような長所を有している。

- (1) 細管の径や網目の間隔を変えることにより、不均質性地盤を作ることが可能である。
- (2) 境界条件の設定が比較的簡単である。
- (3) 流体を着色することにより、境界面の変動の観察が容易である。
- (4) なお、実験モデルの相似率等については、文献20)に詳しく述べられているので、ここでは省略する。

本研究で用いられた実験装置を Fig. 5 に示す。内径 3 mm のビニールパイプを細管に用い、接点のアクリル樹脂に四方から孔を開け、これにビニールパイプを差し込みシリコンで接着している。網目の間隔は 10 cm の正方形とし、高さ 40 cm、長さ 180 cm の鉛直 2 次元被圧滞水層モデルである。

使用した粘性流体は、 F として淡水を想定し、CMC 5 g/l 溶液 ($r^f=1.00$ g/cm³, $\mu^f=27.71$ centipoise), S として塩水を想定して、CMC 5 g/l 溶液に砂糖 7 g/l を加え過マンガン酸カリウムで着色した液体 ($r^s=1.029$ g/cm³, $\mu^s=22.86$ centipoise) を用いた。ただし、 r および μ は液温 15°C の値である。ここに、 $r^s/r^f=1.029$, $r^s/\mu^s/r^f/\mu^f=1.29$ となり、実際の淡水と塩水をほぼ満足するものと考えられる。実験条件としては、Table 1 に示すように、 $t=0$ における境界面の位置、淡水ならびに塩水の境界条件を変えることにより 6 ケースについて実験を行った。Fig. 5 の × 印の位置で大型

クリップを用いてパイプを栓塞し、左側に淡水 (CMC 5 g/l 溶液) を、右側に塩水 (CMC+砂糖+過マンガン酸カリウム) を満たした。 $t=0$ において、大型クリップを取り除き境界面の経時的变化を $z=0$ (下部境界)、10, 20, 30, 40 cm (上部境界) のそれぞれのパイプにつ

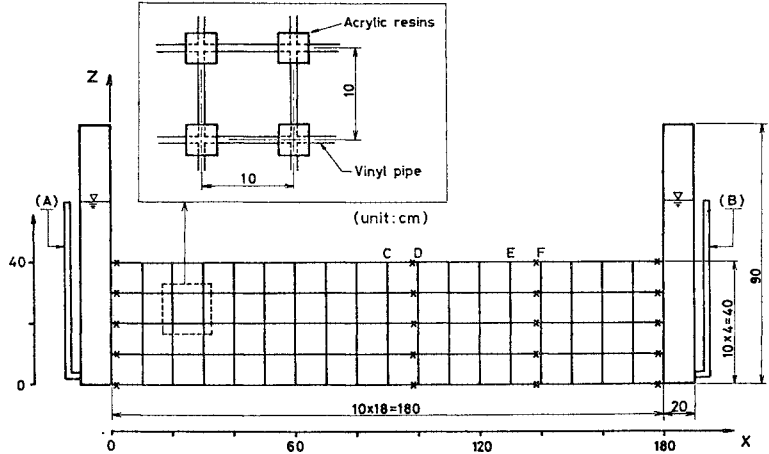


Fig. 5 Schematic diagram of the experimental equipment and the dimension of small tube net model.

Table 1 Flow chart of calculation.

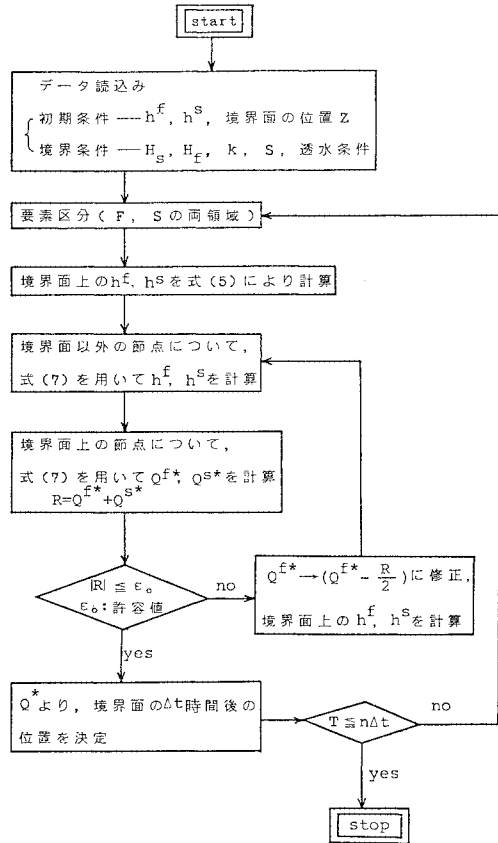


Table 2 The conditions of experiments.

Case	Position of initial interface x (cm)	Left side boundary condition of fresh water		Right side boundary condition of salt water		Permeability		Viscosity	
		Head (cm)	Inpervious	Head (cm)	Inpervious	K^f ($\times 10^{-2}$ cm/s)	K^s ($\times 10^{-2}$ cm/s)	μ^f (c.p.)	μ^s (c.p.)
A	100	60		60		9.03	10.4	28.64	23.39
B	100		○		○	8.64	9.32	31.71	24.59
C	100	60			○	8.04	9.86	32.14	24.74
D	100	60		60		9.03	11.5	28.64	21.23
E	100	60		60		8.33	10.1	31.00	23.17
F	140	60		60		9.26	10.7	27.91	22.79

いて肉眼により直接観測した。各実験とも境界面が左右の境界に達するまで測定を継続した。

(2) 実験結果と数値解析結果の比較

実験は Table 2 に示すように A~F の 6 種について行ったが本文中ではそれらの一部 (A と B) を示すことにする。

Fig. 6 に Case-A (淡水領域の左側の境界と塩水領域の右側の境界のそれぞれの水頭が一定で、初期境界面の位置が $x=100$ cm である場合)、また Fig. 7 に

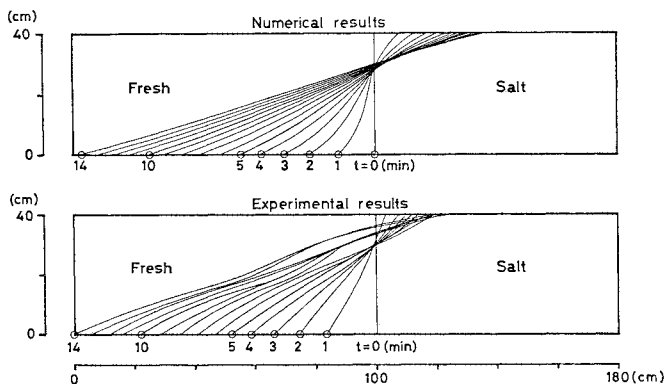


Fig. 6 Comparison between the numerical and the experimental results of the interface shapes (Case-A).

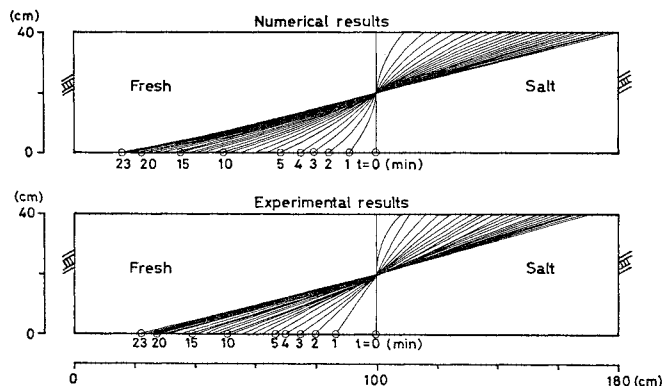


Fig. 7 Comparison between the numerical and the experimental results of the interface shapes (Case-B).

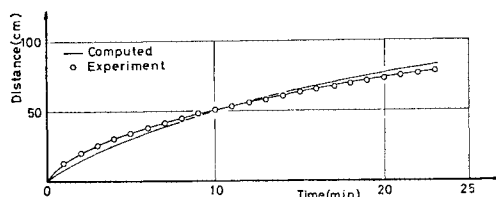


Fig. 8 Motion of the interface toe (Case-B).

Case-B (淡水領域の左側と塩水領域の右側の両境界が不透水層で、初期境界面の位置が $x=100$ cm である場合)の境界面の経時的变化を示している。それぞれの図において、横軸に淡水領域の左端の境界からの水平変化 x (cm) をとり、縦軸に下部境界からの鉛直変化 z (cm) をとっている。Case-A (Fig. 6) において、実験開始後 7 分と 12 分に $z=20$ cm のパイプに浸入した塩水が縦方向のパイプを通り $z=30$ cm のパイプに浸入したため、 $z=30$ cm のパイプにおいて急に 10 cm の変位が生じている。Case-B (Fig. 7) では、 $z=20$ cm のところで淡水が塩水側に、塩水が淡水側に浸入する範囲に分かれて対称形になっている。

また、Fig. 8 に Case-B の境界面の先端 (toe) の動きを示している。同図において、横軸に時間 (min) を、縦軸に初期境界面の位置からの変位 (cm) をとった。先端の動きは約 12 分までは実験値が数値解析値を上回っているが、その後は逆になっている。しかし、全体として比較的良好に一致しているといえよう。

以上、細管網モデルを用いて境界面の経時的变化の実験を行い、その実験結果を有限要素法による数値解析結果と比較を行ったが、その結果、精度等について、有限要素解析の信頼性を実証することができたと考えている。

5. 海岸地下水における Upcone 現象の解析例

(1) 境界条件と初期条件

解析例として、Fig. 9 に示すように原点 (0, 0) に止水壁があり、左側に淡水 (水深 $H^f=10\text{m}$)、右側に塩水 (水深 $H^s=5\text{m}$) の地表水があり、止水壁の下を回って淡水が塩水部へ流出する境界条件を考える。また $x=-800\text{m}$ は不透水壁とする。さらに、 $z \leq -300\text{m}$ は、不透水層とする場合 (Case-I) と不透水層が相当深いところに存在し、 $z \leq -300\text{m}$ では塩水水頭が一定であるものと仮定し得る場合 (Case-II) の 2 通りについて考える。

滞水層の諸性質は、透水係数： $K_x^f=K_z^f=K_x^s=K_z^s=2.4\text{m/day} \div 3 \times 10^{-2}\text{cm/s}$ 、有効間隙率： $\beta=0.2$ 、単位体積重量は $r^f=1.00\text{gr/cm}^3$ 、 $r^s=1.03\text{gr/cm}^3$ とする。

初期境界面の位置は、河野 (1974) によって淡水と塩水の 2 層浸透流の定常解析により求められた結果²¹⁾ (Fig. 9 中に示す) を用いる。さらに Fig. 9 に示す P 点 (-450 m, -50 m) より揚水および注水を行った場合を想定する。以上の境界・初期条件のもとに、2., 3. で示した有限要素解析の手法を用いて 塩水-淡水の 2 層浸透流の非定常解析を行う。

(2) 解析結果

P 点より $Q=100\text{m}^3/\text{day/m}$ の揚水および同量の注水を行った場合の、淡水と塩水境界面の時間的変動の解析結果を、Case-I と Case-II についてそれぞれ Fig. 10, 11 に示す。

Case-I では、 $x=-800\text{m}$ の不透水壁のところで、揚水の場合は下方に移動し、注水の場合は上方に移動しているのに対して、Case-II は、ほとんど変化がない。また、注水を行った場合の境界面の降下量より、同量の揚水を行った場合の上昇量の方が大きいことが、両者の場合について示されている。この事実は定性的には理解できる現象である。

P 点より、 $Q=50, 100, 150, 200\text{m}^3/\text{day/m}$ の揚水および同量の注水を行った場合に、Fig. 9 に示す A 点の時間的変動の解析結果を Fig. 12, 13 に示す。

時間の経過とともに、境界面上昇速度ならびに下降速度は遅くなっていることがわかる。

また、Fig. 14 は $Q=100\text{m}^3/\text{day/m}$ の揚水、あるいは注水による境界面の最終の形を示したものである。

同図において、理論解に対して、数値解の境界面がわずかに上方に位置している。理論解では、解析対象領域の境界が「無限遠」であるのに対し、数値解では現実

「有限な遠方」にとらざるを得ない、ことによるものと考えられる。

この理論解は Strack²²⁾ によって次のように求められている。塩水は静止していると仮定し、淡水と塩水の境界面上で両流体間の圧力は等しいという条件のもとに、ホドグラフ法を用いた複素ポテンシャル理論により、淡水と塩水の境界面を複素平面 Z 上で次式で与えている。

$$Z = -2 \frac{k^f H}{\pi k^*} \ln \left[\frac{\xi^{1/2} + 1}{2} \right] + \frac{Q}{\pi k^*} i \ln \left[\frac{\xi^{1/2} + \rho^{1/2}}{\xi^{1/2} + \bar{\rho}^{1/2}} \right] + \frac{2Q}{\pi k^*} \arg(1 + \rho^{1/2}) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\xi = \lambda e^{i\theta}$ 、 $\rho = r e^{i\theta}$ ：複素関数、 k^f ：淡水透水係数、 $k^* = [(r^s - r^f)/r^f] \cdot k^f$ 、 r^f ：淡水の単位体積重量、 r^s ：塩水の単位体積重量、 $H = H^f - H^s$ 、 H^f ：淡水貯水池の水位、 H^s ：塩水の水位、 Q ：揚水量 (注水の場合は負) である。

式 (10) を実数部と虚数部に分けて表わすと、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x = & -\frac{k^f H}{\pi k^*} \ln \left[\frac{\lambda + 2\lambda^{1/2} \cos \frac{1}{2}\theta + 1}{4} \right] - \frac{Q}{\pi k^*} \\ & \cdot \arctan \left[\frac{2r^{1/2} \sin \frac{1}{2}\alpha \left(\lambda^{1/2} \cos \frac{1}{2}\theta + r^{1/2} \cos \frac{1}{2}\alpha \right)}{\lambda + 2(\lambda r)^{1/2} \cos \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\alpha + r \cos \alpha} \right] \\ & + \frac{2Q}{\pi k^*} \arctan \left[\frac{r^{1/2} \sin \frac{1}{2}\alpha}{1 + r^{1/2} \cos \frac{1}{2}\alpha} \right] \\ z = & -\frac{2k^f H}{\pi k^*} \arctan \left[\frac{\lambda^{1/2} \sin \frac{1}{2}\theta}{1 + \lambda^{1/2} \cos \frac{1}{2}\theta} \right] + \frac{Q}{2\pi k^*} \\ & \cdot \ln \left[\frac{\lambda + 2(\lambda r)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\alpha - \theta) + r}{\lambda + 2(\lambda r)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \theta) + r} \right] \dots\dots\dots (11) \end{aligned} \right\}$$

Z 平面上での揚水井の位置 ($Z_R = x_R + iz_R$) は、 $\lambda = r$ 、 $Q = \alpha$ とおくことによって ξ 平面上での位置 ($\rho = r e^{i\theta}$) が与えられる。したがって、揚水井の位置 ($Z_R = x_R + iz_R$) は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x_R = & -\frac{k^f H}{\pi k^*} \ln \left[\frac{r + 2r^{1/2} \cos \frac{1}{2}\alpha + 1}{4} \right] \\ & - \frac{Q}{\pi k^*} \frac{1}{2}\alpha + \frac{2Q}{\pi k^*} \arctan \left[\frac{r^{1/2} \sin \frac{1}{2}\alpha}{1 + r^{1/2} \cos \frac{1}{2}\alpha} \right] \\ z_R = & -\frac{2k^f H}{\pi k^*} \arctan \left[\frac{r^{1/2} \sin \frac{1}{2}\alpha}{1 + r^{1/2} \cos \frac{1}{2}\alpha} \right] \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

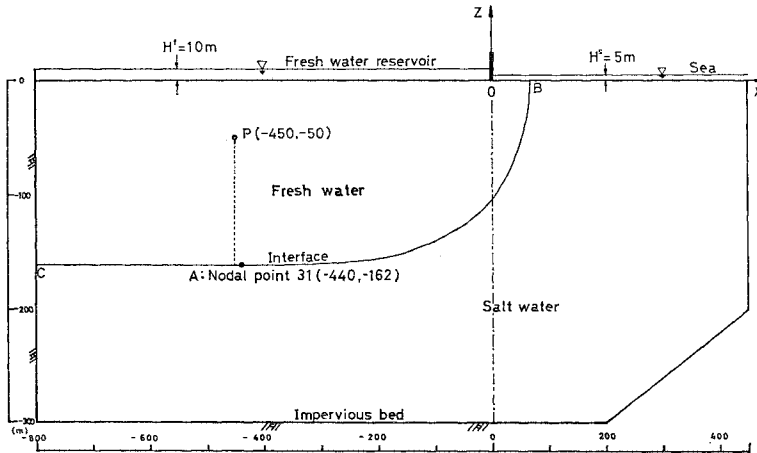


Fig. 9 Initial and boundary conditions of analytical model.

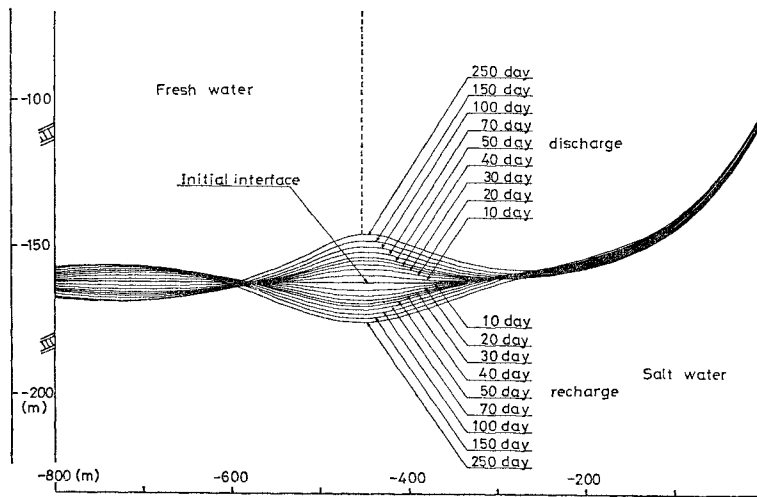


Fig. 10 Shapes of interface (Case-I : $Q=100\text{ m}^3/\text{day}/\text{m}$).

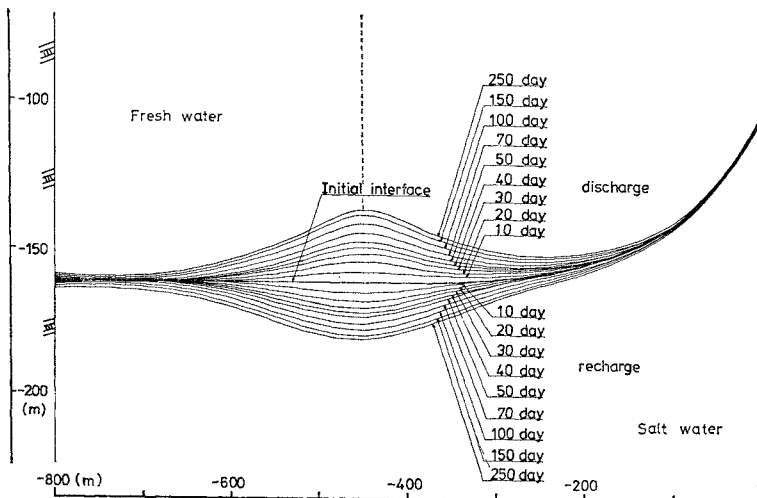


Fig. 11 Shapes of interface (Case-II).

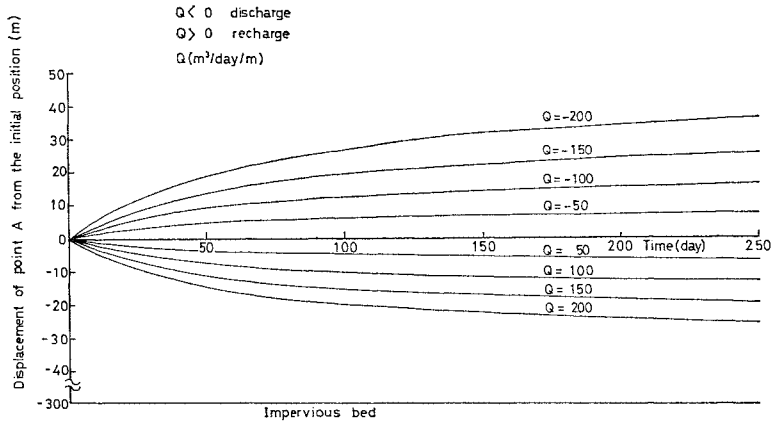


Fig. 12 Motion of the point A (Case-I).

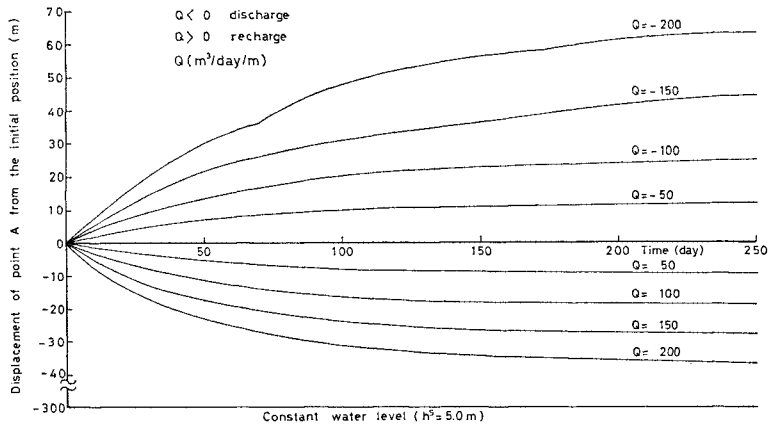


Fig. 13 Motion of the point A (Case-II).

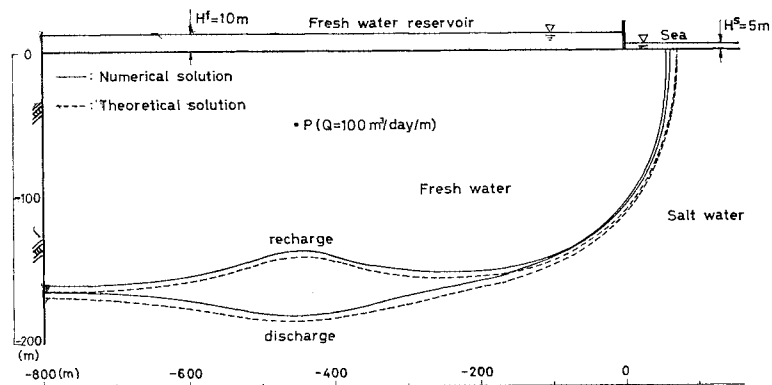


Fig. 14 Comparison between the numerical and the theoretical solutions of steady state of interface.

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{Q}{\pi k^*} \ln \left(\cos \frac{1}{2} \alpha \right) \\ & \dots\dots\dots (12) \end{aligned} \right\}$$

ここで、揚水井の位置 (x_R, z_R) が与えられると、式 (12) より r, α が決定される。

境界面は、 ξ 平面上において $\theta = \pi$ となるので、境界面の位置 $(Z = x + iz)$ は、

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{k^f H}{\pi k^*} \ln \left[\frac{\lambda + 1}{4} \right] - \frac{Q}{\pi k^*} \arctan \left[\frac{r \sin \alpha}{\lambda + r \cos \alpha} \right] \\ & + \frac{2Q}{\pi k^*} \arctan \left[\frac{r^{1/2} \sin \frac{1}{2} \alpha}{1 + r^{1/2} \cos \frac{1}{2} \alpha} \right] \\ z &= -\frac{2k^f H}{\pi k^*} \arctan(\lambda^{1/2}) + \frac{Q}{2\pi k^*} \\ & \cdot \ln \left[\frac{\lambda + 2(\lambda r)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \alpha + r}{\lambda - 2(\lambda r)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \alpha + r} \right] \\ & \dots\dots\dots (13) \end{aligned} \right\}$$

となる。

式 (12) より得られた α, r を式 (13) に代入することによって、 λ をパラメーターとして淡水と塩水の境界面の位置が求まる。

6. あとがき

2つの異なった液体が1つの境界面で接しながら非定常状態で土中を浸透する問題、すなわち非定常浸透における境界面問題の有限要素解析の手法を述べた。

また、その手法の精度を概略的に確認することを目的として、細管網モデルによる実験を実施し、実験による観測結果と有限要素解析の結果と対比させた。それらの結果から、ここで示された有限要素解析の手法がこの種の問題の解析に十分適用し得ると判断され、海岸地下水における淡水-塩水の境界面問題の解析に適用し、地下水揚水（あるいは注水）による境界面上昇（あるいは下降）のいわゆる Upcone 現象を求めることができた。

有限要素解析にしても、このような数値解法は本来、ローカルな実際問題に適用すべきことが多く、そうした意味では3次元解析の必要性も高いといわねばならない。本文中で述べた考え方や、その手法は、容易に（計算時間が増えるということを除いて）3次元問題の解析に拡大、適用し得るものである。

本研究を遂行するにあたって、私どもの研究室の西垣誠助手、大学院生の河田孝志君、田中慎一君の協力を受けました。ここに謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Kohno, I. : Finite Element Analysis of Interface Problem in Groundwater Flow, Proc. of JSCE, No. 228, pp. 109~116, 1974.
- 2) 水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象（第4編 地下密度流），土木学会論文報告集，No. 243, p. 110, 1975.
Herzburg, A. : Die Wasserversorgung eiriger Nordebäcker, Gas Wasserbach 44, pp. 815~819, 1901.
Ghyben, W. : Notes on the probable results of well drilling near Amsterdam, Kl. Inst. Ing., pp. 21~27, 1888.
- 3) Pulubarinova Kochina, P.Y. : Theory of Ground Water Movement, Princeton University Press, pp. 355~356, 1962.
- 4) Strack, O.D. : Some Cases of Interface Flow towards Drains, Technische Hogeschool Delft, pp. 1~13, 1974.
- 5) たとえば，上田年比古・崎山正常：海水飽和地盤における淡水注水溝の浸透，土木学会論文集，No. 135, pp. 1~7, 1966.
- 6) たとえば，上田年比古・杉尾 哲：暗きよからの淡水注入による淡塩境界面の解析，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 43~52, 1974.
- 7) Bear, J. : Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier Publishing Company, p. 527, 1972.
- 8) Tamai, N. and S. Sima : Salt-Water Wedge in Unconfined Coastal Aquifers, 土木学会論文集，No. 139, pp. 31~38, 1967.
- 9) Shamir V. and G. Dagan : Motion of the Seawater Interface in Coastal Aquifers, Water Resources Research, Vol. 7, No. 3, pp. 644~657, 1971.
- 10) 河野伊一郎：浸透流における Interface 問題の有限要素解析，第9回土質工学研究発表会講演集，pp. 653~656, 1974.
- 11) 河野伊一郎・西垣 誠：非定常2層浸透流の有限要素解析，第14回土質工学研究発表会講演集，pp. 1157~1160, 1979.
- 12) 前出の文献 1)，pp. 109~116.
- 13) たとえば，赤井浩一・大西有三・西垣 誠：有限要素法による不飽和浸透流の解析，土木学会論文報告集，第264号，pp. 87~96, 1977.
- 14) たとえば，Segol, G., G. Pinder and W. Gray : A Galerkin-finite element technique for Calculating the transient position of the seawater front, Water Resource Research 11-2, pp. 343~347, 1975.
- 15) 松尾新一郎・河野伊一郎：地下水位低下工法，鹿島出版会，pp. 219~222, 1979.
- 16) たとえば，Kohno, I. : Finite Element Analysis of a Nonsteady Seepage Problem, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, pp. 75~85, 1974.
- 17) 前出の文献 15)，pp. 212~213.
- 18) 前出の文献 16)，pp. 75~85.
- 19) 前出の文献 15)，pp. 210~213.
- 20) 松尾新一郎・河野伊一郎：地下止水壁による地下水規制の実験的研究，土木学会論文報告集，第178号，pp. 53~61, 1970.
- 21) 前出の文献 1)，pp. 109~116.
- 22) 前出の文献 4)。