

## 開水路に発生する縦渦の構造の研究

## STRUCTURES OF LONGITUDINAL VORTICIES IN WIDE OPEN CHANNELS

黒木 幹 男\*・岸 力\*\*

By Mikio KUROKI and Tsutomu KISHI

## 1. 序 論

幅の広い開水路流れの中に、流れ方向に軸をもつセル構造をした二次流が、水深程度の間隔で流れに並行していくつも存在することは比較的早くから知られていたようである<sup>1)</sup>。このような二次流はらせん流、並列らせん流などもよばれているが、本論文では縦渦とよぶことにする。

流れの中に縦渦が存在する場合には、主流方向の流速は横断方向にかなり規則的な波状分布を呈することが知られている。二次流に比べれば、主流方向の流速の測定は、はるかに容易であり、歴史的にはむしろ主流速分布の波状性から縦渦の存在が推定されたというほうが正確であるかもしれない。

縦渦流れの測定を系統的に行ったのは、おそらく木下<sup>2),3)</sup>が最初であろう。木下は縦渦が水面に作り出す流紋を航空写真撮影し立体視することで、表面流速分布を広い範囲にわたって、ほとんど同時に測定する技術を開発・確立した。この測定で実際河川の表面流速に速い部分とおそい部分が交互に規則的に現われることを見い出し、縦渦の存在を推定している。さらに木下は実験水路で水路床の幾何学的形状と縦渦の関係を調べ、三次元的な Dune 河床上で縦渦が最も安定に、強く発達することを見い出している。この実験自体は固定床の状態で行われているが、移動床の河床形状と流れの関係を考えるうえで興味深い指摘である。

一方、森および著者ら<sup>4)</sup>は滑面平坦床上でも縦渦が生じることを実験的に確かめている。この実験では、断面を格子状に区切り各格子点で主流速の測定を行って縦渦流れの構造を推定する方法をとっている。縦渦の空間的な位置は固定されにくく、流速の長周期変動の原因となっていることを指摘している。

最近、室田ら<sup>5)</sup>および宇民ら<sup>6)</sup>は水素気泡法によって主流速の断面内分布を測定している。この方法は上述の点計測の欠点がある程度補い、測線上の分布を同時に計測でき、流れの構造を可視化できる点でも優れている。

しかし、これまでの実験的研究では、測定は主流速に限られており、直接断面内の二次流速成分を測定した例は見あたらない。縦渦流れの構造を明らかにするためには、3軸方向の流速とレイノルズ応力の分布を知ることが不可欠である。本論文ではホット・フィルム流速計を用いてこれらの量を測定し、縦渦流れの構造の定量的な把握を試みた。

縦渦流れに直接・間接に関係する実験的研究は上述のほかにもかなりの例があるが、理論的研究はごくわずかの例があるにすぎない。著者らの知る限りでは、開水路縦渦流れの理論的な取扱いを最初に試みたのは Einstein and Li<sup>7)</sup>である。彼らは主流方向の渦度とレイノルズ応力間の関係を表わす基礎方程式の誘導を行い、縦渦発生の原因がレイノルズ応力の断面内での非一様分布によることを指摘している。彼らの示した基礎方程式は、最近行われた林ら<sup>8)</sup>および池田ら<sup>9)</sup>の研究でも用いられている。

林らおよび池田らは、平坦床上に定常的に縦渦が存在する場合について、断面内の二次流の構造を解析的に求めている。しかしながらこれらの研究では、Einsteinらと同様に主流方向の渦度式のみを基礎式として用いているために、縦渦流れの大きな特徴である主流速の波状性を説明する解を得ることができない。また、縦渦がどのような水理条件のもとで、どのようなスケールのものが卓越するかという基本的な問題にも、林らの研究を除けばほとんど理論的な検討がなされていないのが現状である。

本論文では、直線開水路平坦床流れに発生する縦渦の基礎方程式の吟味を改めて行い、得られた基礎式に不安定解析の手法を適用して、縦渦の卓越スケールの理論的解明を試みた。また、定常的に存在する縦渦の構造を、

\* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

これまでのような断面内二次流の説明に留まらず、主流速およびレイノルズ応力の分布形状も含めて総合的に解明しようと試みた。

## 2. 縦渦流れの基礎方程式

### (1) 基礎方程式の誘導

直線・広矩形・平坦床の開水路流れに存在する縦渦の解析に用いる基礎方程式の誘導を行う。対象とする流れは十分に発達した乱流であるから、運動方程式は次式のようにレイノルズ方程式を用いて表わされる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_j} \{ \tau_{ij} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j - \rho \overline{u_i' u_j'} \} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $\bar{u}_i \cdot u_i'$  は  $i$  軸方向の流速成分の時間平均値および乱流瞬間値、 $F_i$  は外力、 $\tau_{ij}$  は粘性応力。

また、流れの連続式は次式のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i'}{\partial X_i} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

式(1)を縦渦流れの解析に適するように変形する。まず縦渦流れの流速を、基本流としての二次元等流と二次流としての縦渦の成分に分け次式のように表わす。

$$\bar{u}_i = \bar{U}_i + \varepsilon \bar{u}_i \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\bar{U}_i$  は基本流の時間平均流速、 $\bar{u}_i$  は縦渦の時間平均流速を表わす。次に粘性応力とレイノルズ応力とからなる応力項も基本流に基因する成分と、縦渦に基因する成分に分けて次式のように表わす。

$$\tau_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'} = \bar{T}_{ij} + \varepsilon \bar{\tau}_{ij} \dots\dots\dots (4)$$

式(3),(4)を式(1)に代入して  $\varepsilon$  のべきごとに整理する。 $\varepsilon^0$  は基本流、 $\varepsilon'$  は線形化された縦渦の運動方程式でそれぞれ次式のように与えられる。

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial X_j} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial X_j} \dots\dots\dots (6)$$

Fig. 1 のように座標系をとり、基本流として二次元等流を考えると各流速は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{U}(X_3) \\ \bar{U}_2 &= \bar{U}_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式(7)の関係を式(5)に代入、整理すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= gS + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial X_3} \\ 0 &= 0 \\ 0 &= -g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{T}_{33}}{\partial X_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)が二次元等流の運動方程式であり、第1式が流速分布、第3式が圧力分布を与えることになる。次に式(7)の関係を式(6)に代入して整理すると、縦渦の運動

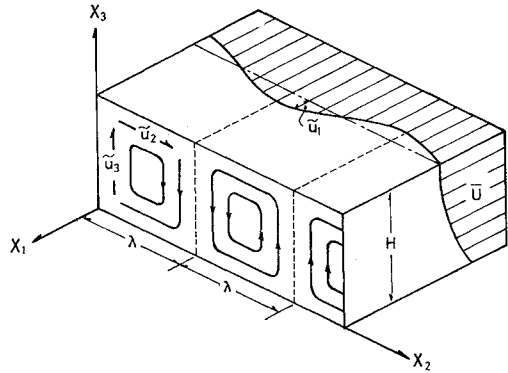


Fig. 1 Schematic representation of flow.

方程式は次式のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \bar{u}_3 \frac{d\bar{U}}{dX_3} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \bar{\tau}_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_{13}}{\partial X_3} \right\} \dots\dots\dots (9.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \bar{\tau}_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_{23}}{\partial X_3} \right\} \dots\dots\dots (9.2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_3} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \bar{\tau}_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_{33}}{\partial X_3} \right\} \dots\dots\dots (9.3)$$

流速を式(3)のように表わすと、渦度も基本流と縦渦の渦度の和として表わされる。 $X_1$  方向の渦度は次式で与えられる。

$$\omega_1 = \omega_1 + \varepsilon \bar{\omega}_1 = 0 + \varepsilon \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_2} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_3} \right) \dots\dots\dots (10)$$

式(9.2),(9.3)を組合せて、 $X_1$  方向の渦度に関する運動式一つにまとめることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial t} - \frac{d\bar{U}}{dX_3} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} + \bar{U} \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial X_1} \\ = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \bar{\tau}_{31}}{\partial X_2} - \frac{\partial \bar{\tau}_{21}}{\partial X_3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} \right. \\ \left. \cdot (\bar{\tau}_{33} - \bar{\tau}_{22}) + \left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \bar{\tau}_{23} \right\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式(9.1),(11)および次に示す流れの連続式によって、縦渦の運動が記述される。

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_3} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

ここで、流れは  $X_1$  方向には一様であると仮定すると、次式のように簡略化できる。

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{d\bar{U}}{dX_3} \cdot \bar{u}_3 = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \bar{\tau}_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_{13}}{\partial X_3} \right\} \dots\dots\dots (13.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} (\bar{\tau}_{33} - \bar{\tau}_{22}) \right. \\ \left. \left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \bar{\tau}_{23} \right\} \dots\dots\dots (13.2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_3} = 0 \dots\dots\dots (13.3)$$

式(13)を解くためには右辺の応力項を適当な関係を用いて与えなくてはならない。Perkins<sup>10)</sup> は隅角部に生

ずる二次流の測定結果を整理して、次式のような関係を導いている。

$$\bar{\tau}_{33} - \bar{\tau}_{22} = \alpha \bar{\tau}_{13} \quad \alpha \doteq 1.0 \dots \dots \dots (14)$$

その他の応力項については、次式の間係を仮定する。

$$\bar{\tau}_{ij} = \rho(\nu + \epsilon_m) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial X_i} \right) \dots \dots \dots (15)$$

ただし、 $\epsilon_m = \kappa \bar{u}_* H / 6 = \text{const.}$  は渦動粘性係数の平均値、 $\kappa$  はカルマン定数、 $\bar{u}_*$  は平均摩擦速度、 $H$  は水深。

さらに流れ関数  $\tilde{\psi}$  を導入して、 $\tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\omega}_1$  を次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_2 &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X_3}, \quad \tilde{u}_3 = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X_2} \\ \tilde{\omega}_1 &= -\left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \tilde{\psi} \equiv -\nabla^2 \tilde{\psi} \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

式(14), (15) および式(16)を式(13)に代入して整理すると、縦渦の運動は次式のように、 $\tilde{u}_1$  と  $\tilde{\psi}$  の連立方程式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - (\nu + \epsilon_m) \nabla^2 \tilde{\psi} &= \frac{dU}{dX_3} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X_2} \dots \dots \dots (17) \\ -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \tilde{\psi} + (\nu + \epsilon_m) \left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \tilde{\psi} \\ &= \alpha (\nu + \epsilon_m) \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial X_2 \partial X_3^2} \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

上の2式が以下の解析に用いる基礎方程式である。

(2) 基礎方程式の検討

既述のとおり Einstein and Li は  $X_1$  方向の渦度方程式を変形して次の基礎方程式を誘導している。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} (\bar{u}_2' \bar{u}_3' - \bar{u}_3' \bar{u}_2') \\ &+ \left( \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \bar{u}_2' \bar{u}_3' \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

本論文では応力項を式(4)のように基本流と縦渦に分けて取扱っているのに対して、Einstein らは特に分離をしていない。しかしながら本論文では基本流として二次元等流を考えているから、 $\bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}$  および  $\bar{T}_{23}$  中のレイノルズ応力は無視しても差し支えない。よって式(19)中レイノルズ応力は式(13.2)の応力項に含まれているレイノルズ応力と同じで縦渦に基因するものと考えられる。したがって、式(13.2)と式(19)は粘性応力の取扱いが異なるが、十分に発達した乱流状態の流れを考える限りこの違いは無視することができる。

Einstein らは具体的な解を示していないのに対して、林らおよび池田は、定常的に縦渦が存在する場合の流速成分のうちの  $\tilde{u}_2, \tilde{u}_3$  を具体的に求めている。彼らの用いた基礎式は式(19)をさらに変形し次式のようなものである。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \tilde{\psi} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{\tau}_{13}}{\partial X_2 \partial X_3} \dots \dots \dots (20)$$

すなわち、式(19)の右辺第1項には式(14)の関係を、また第2項には式(15), (16)の関係をを用いて変形し

ている。

式(20)では右辺の応力  $\bar{\tau}_{13}$  の分布形を適当に与えれば、流れ関数  $\tilde{\psi}$  を求めることができる。彼らは  $\bar{\tau}_{13}$  の分布形を次式で与えている。

$$\frac{\bar{\tau}_{13}}{\rho \bar{u}_*^2} = \delta \left( 1 - \frac{x_3}{H} \right) \cos k X_2 \dots \dots \dots (21)$$

ただし、 $\delta$  は水路床での応力の無次元振幅、 $k$  は水路の横断方向 ( $X_2$ ) の波数である。

これに対して本論文では、式(20)右辺の応力項にも式(15)の関係をを用いて、基礎式の一つ式(18)を導いている。式(21)で仮定した分布形の適否は別にしても、式(20)を解くだけでは縦渦の大きな特徴である  $X_1$  方向の流速の波状性、すなわち  $\tilde{u}_1$  を求めることはできない。したがって、縦渦流れ構造を説明するためには、基礎式(17), (18)を連立して解くくふうが必要である。

3. 縦渦の発生領域と卓越波長

(1) 不安定解析

セル構造をした縦渦を考えるとき、 $x_3$  方向の最大スケールは水路床と水面によって規定されるのに対して、 $x_2$  方向にはごく小さいものから最大は水路幅まで大きな自由度を有している。これまで実験水路および実際河川で行われた観測結果では、 $X_2$  方向にも水深程度のスケールのものが卓越することが知られている。本節では不安定解析の手法を用いて、縦渦の発生領域と卓越スケールの理論的な検討を行う。

本節で用いる基礎方程式は、式(17), (18)を  $\bar{u}_*$ ,  $H$  で無次元化して次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t_*} - \frac{1}{R_*} \nabla^2 \hat{u} &= \frac{dU}{dz} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \dots \dots \dots (22) \\ -\frac{\partial}{\partial t_*} \nabla^2 \hat{\psi} + \frac{1}{R_*} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{\psi} \\ &= \frac{\alpha}{R_*} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y \partial z^2} \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} y &= x_2 / H, \quad z = x_3 / H, \quad \hat{u} = \tilde{u}_1 / \bar{u}_*, \quad \hat{\psi} = \tilde{\psi} / \bar{u}_* H, \\ U &= \bar{U} / \bar{u}_*, \quad t_* = t \bar{u}_* / H, \quad R_* = \bar{u}_* H / \nu, \\ \nabla^2 &= \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 \end{aligned}$$

また、基本流の速度勾配  $dU/dz$  は、式(8)の第1式より次のように与えられる。

$$\frac{dU}{dz} = R_* (1 - z) \dots \dots \dots (24)$$

基礎式(22), (23)の解の形は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} &= u_0(z) \cos ky \cdot \exp(\sigma \tau) \\ \hat{\psi} &= \psi_0(z) \sin ky \cdot \exp(\sigma \tau) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

ただし、 $k=\pi H/\lambda$  は無次元波数、 $\lambda$  は1個の縦渦セルのy方向のスケール、 $\sigma$  は無次元増幅率であり実数、 $u_0(z)$  および  $\psi_0(z)$  は  $\hat{u}$ 、 $\hat{\psi}$  の振幅の鉛直分布を与える実関数。

式(25)の形から明らかなように、縦渦の流速は $\sigma > 0$ であれば時間とともに速くなり、 $\sigma < 0$ であれば時間とともに減衰してやがて0になる。また $\sigma=0$ では初期状態がいつまでも維持される。したがって縦渦が発生し発達するためには、 $\sigma \geq 0$ でなくてはならない。

式(24),(25)を式(22),(23)に代入して整理すると次式のようになる。ただし、 $D$ は微分オペレータ。

$$\begin{aligned} \{D^2 - (k^2 + \sigma R_*)\} u_0 &= -k R_*^2 (1-z) \psi_0 \dots (26) \\ \{D^4 + (2k^2 - \sigma R_*) D^2 + k^4 + k^2 \sigma R_*\} \psi_0 \\ &= -k D^2 u_0 \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

本節の解析は上記の基本式を適当な境界条件のもとに解き、 $\sigma \geq 0$ となる条件を求めることに帰結する。

次に境界条件について考察する。水路床は平坦であり、水面も平坦であるとする。水路床と水面でこれをつきぬける流れはないから、

$$\hat{w} = \frac{\hat{u}_z}{\hat{u}_*} = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = 0 ; z=0, 1$$

また、水面ではせん断力は0であるから

$$\hat{\tau}_{xz} = \frac{\hat{\tau}_{13}}{\rho \hat{u}_*^2} = \frac{1}{R_*} \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = 0$$

および

$$\hat{\tau}_{yz} = \frac{\hat{\tau}_{23}}{\rho \hat{u}_*^2} = \frac{1}{R_*} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right) = \frac{1}{R_*} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} = 0$$

ところで、水面ではいたるところで $\hat{w}=0$ であるから、 $\partial \hat{w} / \partial y = 0$ である。以上で $\psi_0$ に関して3、 $u_0$ に関して1つの境界条件が求まったが、さらに各1個の条件が必要である。

本節の解析では縦渦の発生初期を考えているから、水路床には基本流によるせん断力のみ作用し、縦渦の存在に基因するせん断力 $\hat{\tau}_{xz}$ 、 $\hat{\tau}_{yz}$ は作用しないと考えられる。したがって水面と同様な境界条件が水路床にも与えられる。以上をまとめると $u_0$ および $\psi_0$ に関する境界条件は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} D u_0(0) = D u_0(1) = 0 \\ \psi_0(0) = \psi_0(1) = D^2 \psi_0(0) = D^2 \psi_0(1) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

次に式(28)の境界条件のもとで、基本式(26),(27)の連立解を求める。ここでは $\psi_0(z)$ を次式のような正弦級数に展開する。

$$\psi_0(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin m\pi z \dots \dots \dots (29)$$

式(29)は明らかに式(28)の $\psi_0$ に関する境界条件をすべて満たしている。式(29)を式(26)に代入して $u_0(z)$ を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} u_0(z) &= k R_*^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{a^2 + (m\pi)^2} \left\{ A_1^{(m)} \sinh a z \right. \\ &\quad \left. + A_2^{(m)} \cosh a z + (1-z) \sin m\pi z \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m\pi}{a^2 + (m\pi)^2} \cos m\pi z \right\} \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

ただし、 $a = \sqrt{k^2 + \sigma R_*}$ 、 $A_1^{(m)}$ 、 $A_2^{(m)}$ は積分定数である。

式(28)の $u_0$ に関する境界条件を満たすように積分定数を決定すると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(m)} &= -\frac{m\pi}{a} \\ A_2^{(m)} &= \frac{m\pi}{a} \frac{\cosh a}{\sinh a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

このようにして求めた $u_0$ と $\psi_0$ が、基本式の解であるためには、式(27)を満たすように係数 $C_m$ を決めてやらなくてはならない。式(29),(30)を式(27)に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \{ (n\pi)^4 - (3k^2 - a^2)(n\pi)^2 + k^2 a^2 \} \sin n\pi z \\ = -a^2 k^2 R_*^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{a^2 + (m\pi)^2} \left\{ A_1^{(m)} \sinh a z \right. \\ \left. + A_2^{(m)} \cosh a z - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 (1-z) \sin m\pi z \right. \\ \left. - \frac{2m\pi}{a^2 + (m\pi)^2} \cos m\pi z \right\} \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

上式の両辺に $\sin n\pi z$ をかけて、 $z$ の変域(0,1)にわたって積分すると、係数 $C_m / \{a^2 + (m\pi)^2\}$ に関する連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} a_{n,m} \cdot \left\{ \frac{C_m}{a^2 + (m\pi)^2} \right\} = 0 \dots \dots \dots (33) \\ n \leq m, (m, n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_{n,m} &= \frac{n\pi}{a^2 + (n\pi)^2} \{ A_1^{(m)} (-1)^{n+1} \sinh a \\ &\quad + A_2^{(m)} [1 + \cosh a] \} + \frac{1}{2} \frac{a^2 + (m\pi)^2}{(akR_*)^2} \\ &\quad \cdot \{ (n\pi)^4 - (3k^2 - a^2)(n\pi)^2 + k^2 a^2 \} \delta_{nm} \\ &\quad + X_{n,m} \\ X_{n,m} &= \begin{cases} 0 & m \neq n, m+n \text{ が偶数} \\ -\frac{1}{4} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 & m=n \\ \frac{4mn}{m^2 - n^2} \left\{ \frac{1}{a^2 + (m\pi)^2} - \frac{m^2}{a^2(m^2 - n^2)} \right\} & m+n \text{ が奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

$\delta_{n,m}$ はクロネッカーのデルタ。

$u_0$ 、 $\psi_0$ に0以外の有意な解が存在するためには、係数 $C_m$ がすべて0であってはならない。そのためには式(33)のディターミナントが恒等的に0であればよいか

ら、次の条件式を得る.

$$\|a_{n,m}\|=0 \dots\dots\dots (34)$$

具体的な計算は次項に譲るが、式 (34) を満たすように波数  $k$  と増幅率  $\sigma$  の関係を求めれば、縦渦の発生・非発生を論ずることができる.

(2) 発生領域と卓越波長の近似計算

前項で求めた有意な解の存在条件式 (34) は、無限の項数を有する行列式で与えられている. したがって式 (34) を満足する  $k$  と  $\sigma$  の関係を具体的に求めるためには、 $m, n$  の最大値  $m_{max}$  を指定してやる必要がある.  $m_{max}$  を指定することは、解の形を次式のように近似したことと等価である.

$$\psi_0(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin m\pi z \doteq \sum_{m=1}^{m_{max}} C_m \sin m\pi z \dots\dots (35)$$

$m_{max}=1$  を第1次近似、 $m_{max}=2$  を第2次近似とよぶこととして、各近似度ごとに式 (34) を満足する  $k, \sigma$  の関係を求めると Fig. 2 のようになる. ただし図では  $\sigma \geq 0$  の範囲のみを示してある.

第1次近似の解は上に凸な1本の曲線で与えられる. これに対して、第2次近似以上では解は2本の曲線で与えられる. 解の1つは第1次近似解の内側にあり、近似度を変えてもほとんど変化しない. これに対して、第1次近似解の外側にある解は近似度を変えると顕著に変化する. すなわち、近似度を増すと  $k$  の大きな側に、それ以前の解よりも  $\sigma$  が大きなピークを有する解が新たにつけ加わるような形で、解の存在する  $k$  の範囲は  $k$  の大きな側に広がってゆく.

不安定解析では、発生初期に増幅率  $\sigma$  を最大にする波

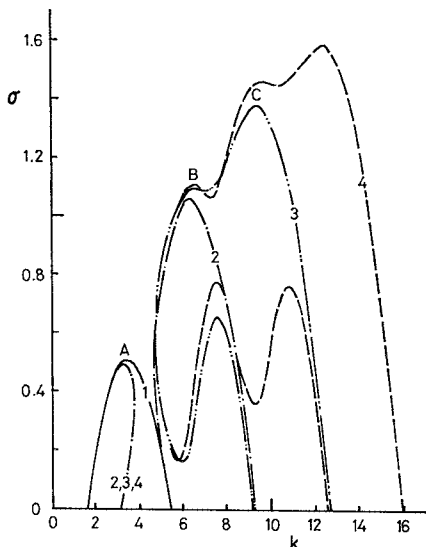


Fig. 2 Relationship between  $\sigma$  and  $k$ . Numbers in figure are the order of approximation.

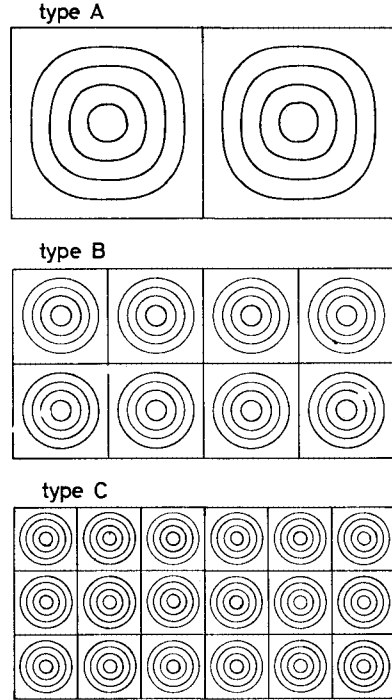


Fig. 3 Cross sectional views of stream lines.

数と十分に発達した状態の卓越波数が一致するという仮定をしばしば用いる. これによれば、Fig. 2 からは最大増幅率を与える波数  $k$  は近似度を上げるに従って大きくなってゆくことが推定され、物理的に有意な結論を得ることはできない.

しかし、Fig. 2 中の A, B, C の符号を付した極大点における断面内の流線を計算すると Fig. 3 のようになる. これによれば、A点以外の極大点では近似度に対応して、水深方向にも横断方向にも循環セルの数が増加している. 縦渦として着目しているのは、B・C 型のような流れの構造を有するものではなく、水深を鉛直方向のスケールとするA型の流速分布を持つ流れである. 以後はA型の流速分布を持つものに限って、その存在領域と卓越波長の検討を行う.

流速分布の形を決定するのは係数  $C_m$  である. 式 (34) の解として与えられる  $k$  と  $\sigma$  との関係曲線のうへでは、係数  $c_m$  は次式で与えられる.

$$a_{n,m} \cdot \left\{ \frac{a^2 + \pi^2}{a^2 + (m\pi)^2} \cdot \frac{C_m}{C_1} \right\} = -a_{n,1} \dots\dots (36)$$

$$m = 2, 3, \dots, m_{max}$$

$$n = 1, 2, \dots, m_{max}$$

またA型の流速分布となるためには、 $\psi_0(z)$  が  $z$  の変域 (0, 1) で変曲点を1つだけ持っていればよい. この条件を係数  $C_m/C_1$  に課せられる条件式として表現することが必要である.

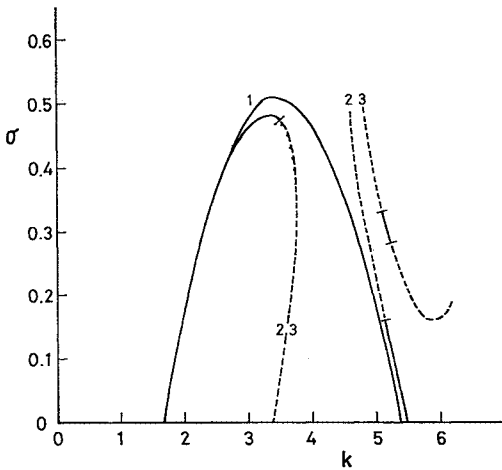


Fig. 4 Relationship between  $\sigma$  and  $k$  by which stream line type A are obtained theoretically. Numbers in figurer are the order of approximation.

第1次近似では、 $\psi_0^{(1)}(z) = C_1 \sin(\pi z)$  である。したがって  $C_1$  の値にかかわらず上の条件を満たすことは明らかである。第2次近似では流れ関数は次式で与えられる。

$$\psi_0^{(2)}(z) = C_1 \left\{ \sin(\pi z) + \frac{C_2}{C_1} \sin(2\pi z) \right\} \dots (37)$$

明らかに  $C_1 \neq 0$  であり、A型流速分布となる条件は次のように表わされる。

$$\left| \frac{C_2}{C_1} \right| < \frac{1}{2} \dots (38)$$

第3近似の流れ関数は、

$$\psi_0^{(3)}(z) = C_1 \left\{ \sin(\pi z) + \frac{C_2}{C_1} \sin(2\pi z) + \frac{C_3}{C_1} \sin(3\pi z) \right\}$$

のように書けるが、係数  $C_2/C_1$ 、 $C_3/C_1$  の相互の関係を解析的に求めるのは容易でない。したがって本解析では数値計算によって、一定の精度の範囲内で上述の条件を満たしているか否かの判定を行った。

このような係数に課せられる条件を考慮して、A型の流速分布となるような  $k$  と  $\sigma$  の組合せを求めると、Fig. 4の実線のようになる。Fig. 2と比較して明らかかなように第1次近似解の外側にある高次近似の解の大部分は除外されている。この結果、A型の流速分布をもつ縦渦が発生可能な領域は、波数またはセルの水平スケールで次のような範囲に限定される。

$$1.63 \leq k \leq 5.45$$

$$0.58 \leq \lambda/H \leq 1.93$$

上の範囲内で、増幅率が最大になる波数  $k_{max}$  を求めると  $k_{max} \doteq \pi$  となる。したがって縦渦の水平方向の卓越スケールは

$$\lambda = \frac{\pi H}{k_{max}} \doteq H$$

となり、従来実際河川や水路実験でしられていた値とよく一致する。

本節の解析では、A型の流速分布をもつ変動が、その他のB・C型流速分布をもつ変動よりも卓越することを理論的に示すことはできなかった。しかしA型の流速分布をもつ、いわゆる縦渦の中では水平方向の卓越スケールが水深程度になることを理論的に示し得た。

また本節の解析では縦渦の発生初期を想定して、河床せん断力の横断方向の変動を0とする境界条件を使用した。この境界条件によっても卓越波長および断面内の流速分布を説明することが可能であった。したがって十分に発達した縦渦に認められる河床せん断力の横断方向の分布は、縦渦発生の原因としてではなく、縦渦発生の結果として生ずるものと理解することができる。

#### 4. 発達した縦渦流れの構造

本節では縦渦が十分に発達し、安定に存在する場合の流れの構造を解析する。解析の基礎式は前節の式(22)、(23)から時間に関する微分項を除いて、次式のようになる。

$$r^2 \hat{u} = -R_*^2 (1-z) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \dots (39.1)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{\psi} = \alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y \partial z^2} \dots (39.2)$$

解の形では次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} &= u_0(z) \cos ky \\ \hat{\psi} &= \psi_0(z) \sin ky \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

ところで本節で取扱うような発達した縦渦流れでは水路床で主流速  $u$  および河床せん断力は明瞭な波状分布をすることが知られている。この事実を考慮して、水路床での  $u_0$  に関する境界条件を次式のように与える。

$$u_0(0) = U_B \text{ または } Du_0(0) = \delta R_* \dots (41)$$

ただし、 $U_B$ 、 $\delta$  は  $u$  およびせん断力の変動の河床における無次元振幅である。

結局、本節の問題は式(40)を式(39)に代入整理して得られる式(42)を、式(43)の境界条件のもとに解いて  $u$ 、 $\psi$  を求めることになる。

$$(D^2 - k^2) u_0 = -k R_*^2 (1-z) \psi_0 \dots (42.1)$$

$$(D^2 + k^2)^2 \psi_0 = -\alpha k D^2 u_0 \dots (42.2)$$

$$u_0(0) = U_B \text{ (または } Du_0(0) = \delta R_*)$$

$$\text{および } Du_0(1) = 0 \dots (43.1)$$

$$\psi_0(0) = \psi_0(1) = D^2 \psi_0(0) = D^2 \psi_0(1) = 0$$

$$\dots (43.2)$$

ここで、前節と同様に  $\psi_0(z)$  を正弦級数で与える。

$$\psi_0(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin m\pi z \dots (29) \text{再}$$

式(29)を式(42.1)に代入し、ラプラス変換すると次

式のようなになる。

$$(s^2 - k^2) \mathcal{L}\{u_0\} - s \cdot u_0(0) - Du_0(0) = -kR_*^2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left\{ \frac{m\pi}{s^2 + (m\pi)^2} \frac{2m\pi \cdot s}{[s^2 + (m\pi)^2]^2} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

式 (43.1) の境界条件を入れて、逆ラプラス変換を行うと  $u_0(z)$  が次式のように与えられる。

$$u_0(z) = U_B \cosh kz + \frac{\delta R_*}{k} \sinh kz - kR_*^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k^2 + (m\pi)^2} \left\{ \frac{m\pi}{k} \sinh kz - \frac{2m\pi}{k^2 + (m\pi)^2} \cosh kz + \frac{2m\pi}{k^2 + (m\pi)^2} \cdot \cos m\pi z - (1-z) \sin m\pi z \right\} \dots \dots \dots (45)$$

式 (43.1) の条件式の1つ、 $Du_0(1) = 0$  を上式に適用すると、 $U_B$  と  $\delta$  との関係を求めることができる。

$$\delta R_* = -kU_B \tanh k + kR_*^2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k^2 + (m\pi)^2} \left\{ m\pi \frac{2m\pi k}{k^2 + (m\pi)^2} \tanh k \right\} \dots \dots \dots (46)$$

式 (29), (45) を基礎方程式式 (42.2) に代入し、前節と同様に直交化して整理すると、係数  $C_m / \{k^2 + (m\pi)^2\}$  に関する連立方程式を得る。

$$a_{n,m} \cdot \left\{ \frac{C_m}{k^2 + (m\pi)^2} \right\} = b_n \dots \dots \dots (47)$$

ただし、

$$a_{n,m} = \frac{2m\pi}{k^2 + (m\pi)^2} \cdot \frac{n\pi}{k^2 + (n\pi)^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1} + \cosh k}{\cosh k} + \frac{k^2 + (m\pi)^2}{2(k^2 R_*^2)^2} \{ (n\pi)^2 - k^2 \} \delta_{nm} + X_{nm}$$

$$b_n = -\frac{\alpha U_B}{k R_*^2} \cdot \frac{n\pi}{k^2 + (n\pi)^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1} + \cosh k}{\cosh k}$$

式 (49) を解いて係数  $C_m$  を決定すれば、 $u_0$  および  $\psi_0$  は確定する。式 (47) は波数  $k$  のみの関数であり、以下の解析では前節で求めた卓越波数を用いて  $k = k_{\max} \approx \pi$  とする。

$m, n = 1, 2, \dots$  と順次大きくして解の近似度を上げて求めた係数の値を **Table 1** に示す。係数の値は近似度を上げてほとんど変化していない。また  $C_1$  と比較して  $C_2$  は1桁程度小さくなっており、収束は非常に早い。

このように係数  $C_m$  が確定したから、流速および河床

**Table 1** Variation of constants by order of approximation.

order of approximation	$\frac{C_1}{U_B}$	$\frac{C_2}{U_B}$	$\frac{C_3}{U_B}$	$\frac{C_4}{U_B}$	$\frac{C_5}{U_B}$
1	0.025499	--	--	--	--
2	0.026456	-0.002122	--	--	--
3	0.026908	-0.002512	0.001461	--	--
4	0.026903	-0.002510	0.001457	0.000072	--
5	0.026906	-0.002513	0.001457	0.000070	0

せん断力の縦渦による変動成分は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} &= u_0(z) \cos ky \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} &= \hat{v} = v_0(z) \sin ky \\ -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} &= \hat{w} = w_0(z) \cos ky \\ \frac{1}{R_*} \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} &= \hat{\tau}_{xz} = T_0(z) \cos ky \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

ただし、

$$u_0(z) = U_B \left[ \frac{\cosh k(1-z)}{\cosh k} + kR_*^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m / U_B}{k^2 + (m\pi)^2} \cdot \left\{ \frac{2m\pi}{k^2 + (m\pi)^2} \cdot \frac{\cosh k(1-z)}{\cosh k} + (1-z) \sin m\pi z - \frac{2m\pi}{k^2 + (m\pi)^2} \cos m\pi z \right\} \right]$$

$$\psi_0(z) = U_B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{U_B} \cdot \sin m\pi z, \quad v_0(z) = \frac{d\psi_0(z)}{dz}$$

$$w_0(z) = -k\psi_0(z), \quad T_0(z) = \frac{1}{R_*} \frac{du_0(z)}{dz}$$

### 5. 実験および理論解析の検討

前節の理論解析の結果の検討には、流速  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  およびレイノルズ応力  $\hat{\tau}_{xz}$  の実測資料が必要である。しかし従来の実験例では  $\hat{u}$  以外にはほとんど測定例が報告されていない。このためX型ホット・フィルム流速計を用いてこれらの量を測定した。

#### (1) 実験の概要

実験は長さ 8 m, 幅 0.8 m, 深さ 0.3 m の鋼製可変勾配水路を用いて行われた。水路床には平均径 3 mm の石英碎石を敷き粗面としてある。

ホット・フィルム流速計のような点計測の積重ねで断面内の微小な二次流成分の平均的な分布形状を測定しようとする場合には、流れ自体が空間的・時間的に安定していなくてはうまくゆかない。平坦床上では計測に必要な程度に安定した縦渦流れを得ることはできず、木下<sup>2)</sup>の実験を参考にして水路床に斜格子状に細い溝を掘り流れを安定させた。**Fig. 5** には水路床に施した溝のパターンと、可視化から求めた縦筋の位置およびこれから推定される縦渦との関係を模式的に示した。

本実験では水路床に施した斜格子溝の対角線長を 20 cm とし、A-A' 断面で横断方向に 21 点、鉛直方向に水深の 20, 50, 80% の 3 測線、合計 63 点で各点 30 秒ずつの測定を行った。

使用したX型ホット・フィルム・プローブは、 $\hat{u}-\hat{w}$  の計測には DISA 55 R 63 および TSI 1246-20 W を、 $\hat{u}-\hat{v}$  の計測には TSI 1240-20 W をそれぞれ使用した。

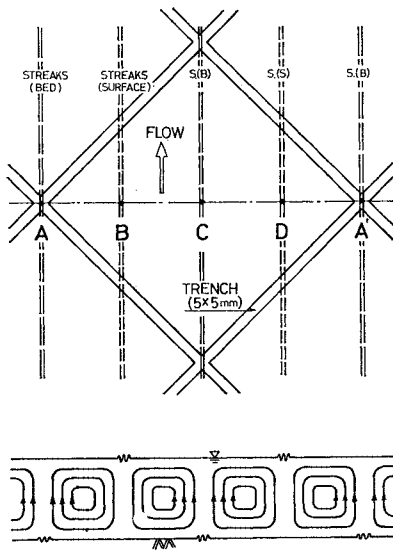


Fig. 5 Plane view of bed configurations on which measurements were performed and estimated stream lines.

Table 2 Experimental conditions.

RUN	1	2	3
$Q$ (l/s)	13.77	15.35	15.00
$H$ (cm)	4.70	4.60	4.97
$S$	1/360	1/270	1/315
$U$ (cm/s)	36.6	42.3	38.2
$F_r$	0.57	0.63	0.55
$U_B$	1.20	1.05	0.90

計測結果は 1/100 秒ごとに A/D 変換を行った後に、大型計算機によって統計処理を行った。

実験は測定の実験性を確認するために、ほとんど同一の水理条件で3回行われた。Table 2 に実験の水理条件を示す。

(2) 実験結果と解析結果の比較

a) 横断方向の分布特性

流速  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  およびせん断力  $\hat{\tau}_{xz}$  の  $y$  方向分布の測定例を Fig. 6 に示す。測点の  $y$  方向の位置は Fig. 5 の模式図と対応して示してある。また  $z$  方向の位置は  $\hat{u}$ ,  $\hat{w}$ ,  $\hat{\tau}_{xz}$  については  $z=0.5$ ,  $\hat{v}$  については  $z=0.5$  の理論値が0となるため  $z=0.8$  の例を示した。図中には前節式 (48) で与えられる理論解析の結果を実線で示してある。図は河床での  $\hat{u}$  の無次元振幅  $U_B$  で規準化して示してある。  $U_B$  は  $z$  方向に3点得られる  $\hat{u}$  の振幅を外挿して推定し、Table 2 のように与えた。

測定値のばらつきは大きく、振幅も  $\hat{u}$ ,  $\hat{\tau}_{xz}$  は理論値と比較的よく一致しているが  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  は理論値よりも大きめである。しかし各変量相互間の位相については理論で予測されるのとはほぼ同様な傾向を見出すことができ

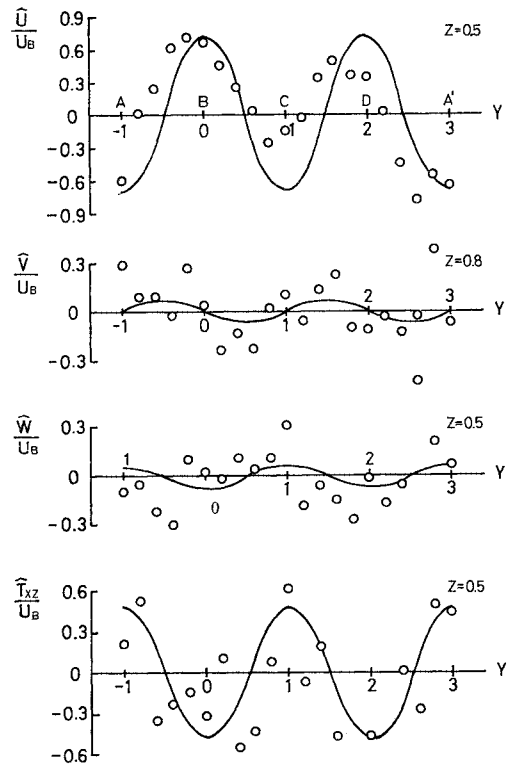


Fig. 6 Examples of transverse distributions of velocity and shear stress (Run 3).

る。すなわち、 $\hat{u}$  の振幅が正の極大値をとる B, D 付近と  $\hat{u}$  が負の極大値をとる A, C, A' の付近を比較すると、 $\hat{w}$  は  $\hat{u}$  と負の相関が認められる。さらに  $\hat{v}$  についてはこれらの地点の間で符号が逆転する傾向が認められる。したがって前節で得られた縦渦の構造は、たとえば縦渦の上昇部では、 $\hat{u}$  の振幅は負の最大値を示している。これは上昇部では、下方から平均流速  $U$  のおそい流体塊が上方に輸送されるために、周囲の部分より平均流速  $U$  が遅くなるとする従来の縦渦のモデルの構造を支持しているように考えられる。

b) 鉛直方向の分布特性

$\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  および  $\hat{\tau}_{xz}$  の振幅の鉛直方向の分布の測定値を Fig. 7~10 に示す。式 (48) で与えられる理論値は実線で示してある。

Fig. 7 は  $\hat{u}$  の振幅分布を示す。図には著者らの実験のほか、室田らの実測値を論文<sup>5)</sup> から読み取って示した。測定値と理論値の傾向は良く一致している。水面での  $\hat{u}$  の振幅は0ではなく、水路床の振幅の35%程度にも達する。ところで木下は航空写真による河川の表面流速の観測で流速の速い部分とおそい部分が交互に規則的に、縦筋となって生じる事実を報告している。前節の理論解析はこの事実を合理的に説明することができる。

Fig. 8, 9 は  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  の振幅の分布を示す。  $\hat{v}$  の振幅の



符号が変化する位置は、測定値では理論値よりもいくぶん水面に近いところに生じているように見える。また絶対値も理論で予測されるよりも大きくなっている。 $\hat{w}$ については全体の傾向は似ているが、やはり絶対値は理論の予測値よりも大きくなっている。

したがって、断面内の平均的な流動パターンは、理論では $z=0.5$ を中心に水深方向に対称であるのに対して、測定値は非対称な分布を示している。また断面内の二次

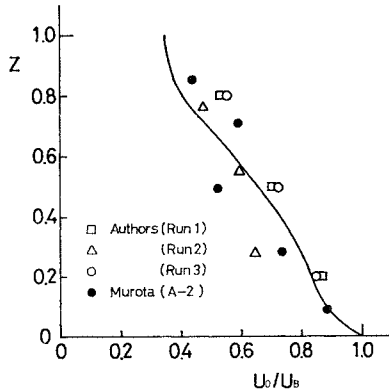


Fig. 7 Vertical distribution of amplitude  $U_0/U_B$ .

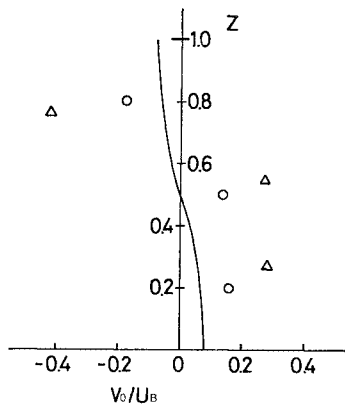


Fig. 8 Vertical distribution of amplitude  $V_0/U_B$ .

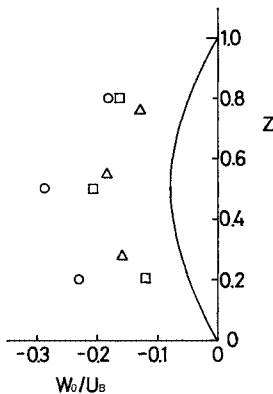


Fig. 9 Vertical distribution of amplitude  $W_0/U_B$ .

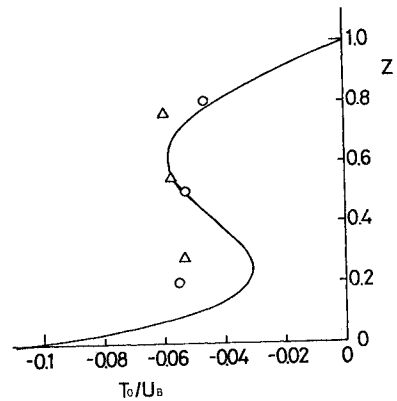


Fig. 10 Vertical distribution of amplitude  $T_0/U_B$ .

流の強度も理論では小さく評価されている。これらの原因の究明と理論の改良は今後の課題である。

Fig. 10 は  $\hat{e}_{xz}$  の振幅分布を示す。理論値は、符号の違いを別にすれば林らおよび池田の理論で用いられた三角形分布(式(21))と全体的な傾向は似ているが、それよりも複雑な形をしている。これに対して測定値は水深方向にあまり顕著な変化を示していないが、少なくとも符号は理論値と一致している。この符号の違いについては次項で述べる。

c) 縦渦の回転方向

次に縦渦の回転方向とせん断力  $\hat{e}_{xz}$  の分布形との関係について考察する。林らおよび池田の理論では、 $\hat{w}$  と  $\hat{e}_{xz}$  の位相は逆になっているのに対し、本解析の結果では同位相になっている。

具体的には、縦渦の上昇部で林、池田の理論ではせん断力  $\hat{e}_{xz}$  が平均値より減少することになるが、本解析の結果では反対に増加することになる。これは見方を変えて、せん断力  $\hat{e}_{xz}$  の横断方向分布を一致させると、縦渦の回転方向が反対になることを意味する。

Fig. 6 の測定例は、本解析の結果と傾向は一致している。直接理論値と比較できる測定例はこのほかに見あたらないが次のいくつかの事実は、著者らの解析および実験の妥当性を支持している。

まず、本節 a) でも触れたように、縦渦の上昇部での  $x$  方向の流速は  $U - |u_0|$  のように平均値よりも遅くなる。さらに、Fig. 7 から明らかのようにその遅くなる程度は水路床に近いほど大きい。したがって、上昇部での鉛直方向の速度勾配  $d(U - |u_0|)/dz$  は平均値  $dU/dz$  よりも大きくなり、平均流的な概念でせん断力の増加を説明することができる。

また乱れの生成量は水路床に近いほうが大きいことは明らかである。したがって縦渦の上昇部では下方からの乱れた流体塊が上方に輸送され、乱流強度およびレイノルズ応力は大きくなるのが容易に推定される。

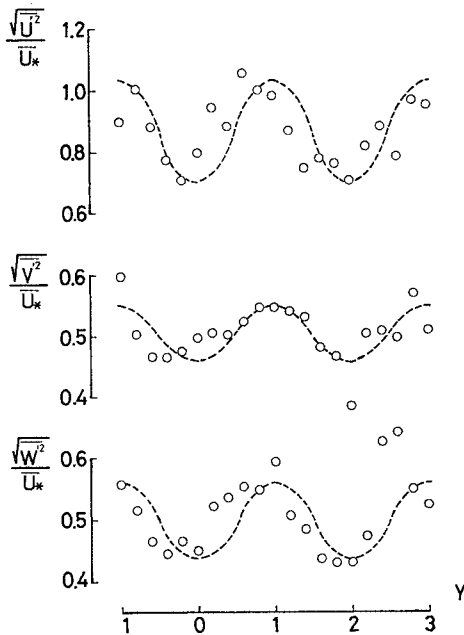


Fig. 11 Examples of transverse distributions of observed turbulent intensity (Run 3).

古屋ら<sup>11)</sup>および室田ら<sup>5)</sup>は  $x$  方向の速度が横断方向に変化するような流れの場において、変動速度と乱流強度が負の相関を有することを実験的に確かめている。Fig. 11 は実験 Run 3 の乱流強度の測定例である。Fig. 6 の  $\hat{u}$  の分布と比較すると、位相が逆になっておりこれまでの実験結果に加えて  $y, z$  方向の乱流強度も主流速の変動速度と負の相関を有することが確かめられた。

この事実から、縦渦の上昇部で下方から上方に向けて輸送される平均流速の小さな流体塊中の乱れは周囲の流体よりも大きなことは明らかであり、この流体塊中ではレイノルズ応力も大きくなるが推定される。

このように平均流的にも、乱流的にも縦渦の上昇部でのせん断力が局所的に増加する理由を説明することができる。したがって、Fig. 6 に示される測定値および理論値の傾向はほぼ妥当であり従来の理論から得られるせん断力と縦渦の回転方向との関係は修正が必要である。

## 6. 結 論

幅の広い開水路乱流中に発生する縦渦の構造について理論的な検討を行うとともに、流れを実測して次の結論を得た。

(1) 理論解析の基礎となる運動方程式の吟味を行い、従来用いられている主流方向の渦度方程式のみによる取扱いは不十分であり、主流方向の変動速度の運動方程式を加えて連立解を求めることが必要であることを明らか

にした。

(2) 縦渦の水路横断方向の卓越スケールを線形不安定解析の手法を用いて、理論的に求めた。卓越スケールはほぼ水深程度であり、従来から経験的に知られている値とよく一致する。

(3) 縦渦の発生に河床せん断力の水路横断方向の変動は無関係であることが、不安定解析の結果から明らかになった。発達した縦渦に認められる河床せん断力の水路横断方向の波状分布は、縦渦の発生原因ではなく発達に伴って生じると推定できる。

(4) 定常的に縦渦が存在している流れの構造を理論的に求めた。従来の縦渦理論では求め得なかった水路横断方向の流速の変動成分を求めるとともに、その他の流速成分およびせん断力の分布とあわせて総合的な説明が可能になった。

(5) X型ホットフィルム流速計を用いて、流速・レイノルズ応力の断面内の分布を測定した。理論解析の結果は測定結果を合理的に説明できる。

(6) 縦渦の上昇部でせん断力  $\hat{\tau}_{xz}$  は正、下降部で負になることが理論・実験的に確かめられた。したがって縦渦の回転方向とせん断力  $\hat{\tau}_{xz}$  の分布の関係は、従来の理論結果とは逆になり、重大な修正が加えられた。

## 参 考 文 献

- 1) Nemenyi, P.F.: Discussion on paper by Vanoni, Transportation of suspended sediment by water, Trans. ASCE, paper 2267, pp. 116~124, 1946.
- 2) 木下良作: 航空写真による洪水時の流況測定, 水工学に関する夏期研修会講義集, B河川コース, pp. 12-1~12-40, 1968.
- 3) 木下良作: 洪水と流路形態の現地観測, 水工学に関する夏期研修会講義集, Aコース, pp. A-7-1~A-7-17, 1978.
- 4) 森 明巨・黒木幹男・岸 力: 開水路で見いだされた二次流に関する研究, 第26回年次学術講演会講演概要集, pp. 305~308, 1971.
- 5) 室田 明・中辻啓二・福原輝幸: 開水路分散実験にみられる fingering 現象と二次渦の相関について, 第23回水理講演会論文集, pp. 393~398, 1979.
- 6) 宇民 正・上野鉄男・日紫喜剛啓: 開水路2次流の安定性について, 第34回年次学術講演会講演概要集, pp. 293~294, 1979.
- 7) Einstein, H.A. and Huon Li: Secondary currents in straight channels, Trans. American Geophysical Union, Vol. 39, No. 6, pp. 1085~1088, 1958.
- 8) 林 泰造・山田 正: 開水路における縦渦の形成に関する研究, 第21回水理講演会論文集, pp. 245~253, 1977.
- 9) Ikeda, S. and H. Kikkawa: Secondary circulation in straight channels, 埼玉大学工学部建設基礎工学研究報告, 第6巻, pp. 1~13, 1976.
- 10) Perkins, H.J.: The formation of stream wise vorticity in turbulent flow, J. Fluid Mech., Vol. 44, Part 4, pp. 721~740, 1970.
- 11) 古屋善正・中村育雄・大坂英雄: 二次元的乱流境界層内の定常な縦渦の構造, 第5回乱流シンポジウム論文集, pp. 11~17, 1973.