

土木学会論文報告集  
第311号・1981年7月

【論 文】

## 2次モーメント法による信頼性設計法 に関する二、三の考察

SOME CONSIDERATIONS ON STRUCTURAL DESIGN  
BASED ON SECOND-MOMENT THEORY

白石 成人\*・古田 均\*\*・中野 正則\*\*\*

By Naruhito SHIRAIKI, Hitoshi FURUTA and Masanori NAKANO

### 1. はじめに

土木構造物をとりまく複雑な自然・社会的環境を考えると、その設計はさまざまな不確定性の影響を合理的に評価したものでなければならない。この不確定性の要因としては、荷重・抵抗のばらつき、施工・解析上の誤差などが挙げられる。これらはおのおの異なる性質をもち、確率的な評価が可能なものから非常に困難なもの、あるいは人為的にコントロールが可能なもの不可能なものと多種多様である。従来の許容応力度設計法では、このような不確定要因の影響は安全率あるいは設計荷重に含める形で考慮されてきた。その根底には確率・統計的な考え方方が存在し、安全率の値の決定にも実験・実測データあるいは過去の設計等から得られた多くの情報が反映されているものの、この方法は本質的には確定論の立場に立つものであり、各値の決定がまったく独立になされ全体として統一のとれたものとはなっていない。合理性あるいは設計思想の明解さという点からは、確率・統計的立場に立ち、種々の不確定要因の導入過程が明らかである方法が必要であると思われる。

ところが、一般に土木構造物は大規模であり、多くの要素から構成されている。また、大量生産的ではなく、個々の構造物自体に数々の特殊性をもつことから、その設計過程は非常に複雑なものとなる。このように多くの不確定要因に加え、複雑多岐にわたる設計過程を考えると、構造物の安全性を純数理的に取り扱うのは困難であると思われ、ある程度の工学的判断・経験等が生かせる準確率的取り扱いが現在のところ最も適した方法であると思われる。このような考え方として、C.A. Cornell<sup>1)</sup>

により提唱されている2次モーメント法がある。2次モーメント法は確率変数の2次までのモーメントである平均値・分散を使用して構造物の安全性を評価しようというものである。この方法については、今まで多くの研究<sup>2)</sup>がなされており、その定式化の容易さが認識され、許容応力度設計法とのキャリブレーション<sup>3)</sup>を行うことにより、実用性についても研究が進み、示方書策定へのいくつかの提案もなされている<sup>4)</sup>。ところが、従来の方法<sup>2), 3)</sup>では基礎式の誘導過程に数学的近似が用いられることが多く、物理的な意味が失われている場合がある。確かに式の簡明さ、計算の容易さは必要であるが、信頼性理論に基づく設計の本来の目的が、多くの不確定要因の設計への影響を明確にし、その導入を無理なく行うことであるとすると、物理的意味を不明確にすることは好ましくない。これに対して、R. Rackwitz<sup>5)</sup>は従来の方法を Mean-Value First-Order Method (MVFOM) と Advanced First-Order Method (AFOM) に分類し、両者の数学的意味を明らかとしている。

本論文では、2次モーメント法に基づく設計法に対して基礎的な考察を加え、そこで用いられる安全性指標の性質および定式化の過程を検討することにより、従来の設計法の比較検討を行うことを目的としている。まず、Advanced First-Order Second-Moment Method を用い、Cornell の安全性指標<sup>1)</sup>と Rosenblueth・Esteva の安全性指標<sup>6)</sup>との関係を明らかにする。次に、Hasofer・Lind<sup>7)</sup>の提案した標準化空間の中で最も原点に近い点に注目した設計法を示し、2次モーメント法と荷重係数設計法との関連についての考察を加え、部分荷重係数の誘導過程を明らかにする。最後に、数値計算を行うことにより、従来の三角形近似法<sup>2)</sup>、Ang の方法<sup>8)</sup>、Shah の方法<sup>9)</sup>の比較検討を行い、Cornell の安全性指標と Rosenblueth・Esteva の安全性指標の信頼性設計への適用性について考究する。

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 工修 建設省(元・京都大学院生)

## 2. 安全性指標の計算手法

R. Rackwitz<sup>5)</sup>によると、従来の2次モーメント法はMean-Value First-Order Method (MVFOM)とAdvanced First-Order Method (AFOM)に分類される(もちろん、AFOMはMVFOMのもつinvarianceの問題を改善するために提案された手法であり、また最近では2次近似を用いた研究<sup>10)</sup>もある)。数学的には両者の違いは、線形化するためのテラー展開を行う点の違いにある。

いま、破壊条件式が式(1)で与えられたとすると、その一次近似式はテラー展開を行い式(2)のようになる。

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \dots \quad (1)$$

$$Z \approx g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X_i^*} (X_i - X_i^*) \quad \dots \quad (2)$$

ここで、 $Z$ は安全性の余裕(Safety Margin)、 $X_i$ は基本変数、 $X_i^*$ はテラー展開を行う点を表わす。

MVFOMは $X_i^*$ として平均値 $\mu_{X_i}$ をとる。このとき、 $Z$ の平均値 $\mu_Z$ 、標準偏差 $\sigma_Z$ は以下のように表わせる。

$$\mu_Z = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad \dots \quad (3)$$

$$\sigma_Z = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu_{X_i}} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right]^{1/2} \quad \dots \quad (4)$$

ここで、 $\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu_{X_i}}$ は平均値 $\mu_{X_i}$ に関する偏微分を表わす。よって、安全性指標 $\beta$ は次式で計算される。

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})}{\sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial X_1} \Big|_{\mu_{X_1}} \right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \dots + \left( \frac{\partial g}{\partial X_n} \Big|_{\mu_{X_n}} \right)^2 \sigma_{X_n}^2}} \quad \dots \quad (5)$$

これに対し、AFOMではある代表点 $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ についてテラー展開することにより、 $\mu_Z$ 、 $\sigma_Z$ 、 $\beta$ は以下になる。

$$\mu_Z = g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X_i^*} (\mu_{X_i} - X_i^*) \quad \dots \quad (6)$$

$$\sigma_Z = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X_i^*} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right]^{1/2} \quad \dots \quad (7)$$

$$\beta = \frac{g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X_i^*} (\mu_{X_i} - X_i^*)}{\sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial X_1} \Big|_{X_1^*} \right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \dots + \left( \frac{\partial g}{\partial X_n} \Big|_{X_n^*} \right)^2 \sigma_{X_n}^2}} \quad \dots \quad (8)$$

本論文では、Hasofer・Lind<sup>7), 11)</sup>に従い $X_i^*$ として標準化空間内で最も原点に近い点の座標値をとる。

## 3. Cornell の安全性指標と Rosenblueth・Esteva の安全性指標の関係

Rosenblueth・Estevaは破壊条件式として対数関数を用い、安全性指標を以下のように定義した。

$$Z = \ln R - \ln S \quad \dots \quad (9)$$

$$\beta = \frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}} \quad \dots \quad (10)$$

ここで、 $R \cdot S$ は抵抗および荷重効果を表わし、 $\delta$ は変動係数を表わす。このとき、式(9)の一次近似式は、

$$Z = \ln R^*/S^* + \frac{(R - R^*)}{R^*} - \frac{(S - S^*)}{S^*} \quad \dots \quad (11)$$

となる。このとき、 $r = (R - \mu_R)/\sigma_R$ 、 $s = (S - \mu_S)/\sigma_S$ の変換を行い、 $R^* = \mu_R$ ( $r^* = 0$ )、 $S^* = \mu_S$ ( $s^* = 0$ )とする

$$Z = \ln \mu_R/\mu_S + \delta_R r - \delta_S s \quad \dots \quad (12)$$

安全性指標 $\beta$ は標準化空間で原点と式(12)の直線の最短距離として表わされるので、式(10)で与えられる。これに対し、 $R^*$ 、 $S^*$ を破壊面上で原点に最も近い点(Lindはこの点をdesign pointとよんでいるが<sup>11)</sup>、本論文では破壊点とよぶことにする<sup>12)</sup>)になると、 $R^* = S^* = (\sigma_S^2 \mu_R + \sigma_R^2 \mu_S) / (\sigma_R^2 + \sigma_S^2)$ となり、 $Z$ は式(13)で表わされ、 $\beta$ は式(14)で計算される。

$$Z = \sigma_R r + \sigma_S s + \mu_R - \mu_S \quad \dots \quad (13)$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad \dots \quad (14)$$

$\mu_R = 2100 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\mu_S = 1400 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\delta_R = 0.1$ 、 $\delta_S = 0.2$ とした場合の式(10)と式(14)の関係を図-1に示す。

次に、対数型の標準化変換 $(\ln X - \ln \mu_X) / \delta_X$ を用いて破壊条件式が $Z = R - S$ で表わされる場合を考える。このとき、 $R = \mu_R \exp(\delta_R r)$ 、 $S = \mu_S \exp(\delta_S s)$ と表わされるので $Z$ は次のようになる。

$$Z = \mu_R \exp(\delta_R r) - \mu_S \exp(\delta_S s) \quad \dots \quad (15)$$

式(15)を $(r^*, s^*)$ でテラー展開すると、

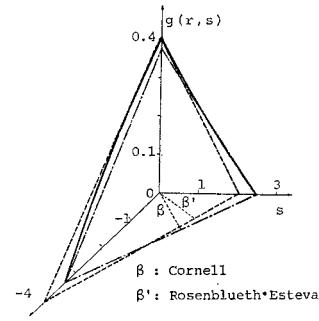


図-1 Cornell の安全性指標と Rosenblueth・Esteva の安全性指標の関係

$$\begin{aligned} Z &= \mu_R \exp(\delta_R r^*) - \mu_S \exp(\delta_S s^*) \\ &\quad + \mu_R \delta_R \exp(\delta_R r^*) (r - r^*) \\ &\quad - \mu_S \delta_S \exp(\delta_S s^*) (s - s^*) \end{aligned} \quad \dots \quad (16)$$

となり、 $\beta$  は

$$\beta = \frac{\mu_R \exp(\delta_R r^*) (1 - \delta_R r^*) - \mu_S \exp(\delta_S s^*) (1 - \delta_S s^*)}{\sqrt{\mu_R^2 \delta_R^2 \exp(2 \delta_R r^*) + \mu_S^2 \delta_S^2 \exp(2 \delta_S s^*)}} \quad \dots \quad (17)$$

となる。ここで、 $(r^*, s^*) = (0, 0)$  (つまり  $R^* = \mu_R, S^* = \mu_S$ ) をとると式 (14) に一致し、 $r^*, s^*$  として破壊点の座標値をとると、式 (10) に一致することになる。

以上のように、一次近似および Hasofer・Lind の安全性指標の定義を用いることにより、Cornell, Rosenblueth・Esteva の安全性指標の関係が明らかになる。すなわち、両者ともに破壊条件式の相違に関わらず、不变性を有する指標となり、 $(X - \mu_X)/\sigma_X$  の変換を用いると、 $Z = \ln R - \ln S$  に対し Cornell の安全性指標が AFOM に対応し、 $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  の変換を用いると Rosenblueth・Esteva の安全性指標が AFOM に対応することになる。よって、両者の優劣は数学的には評価できず、対象とする問題の特性あるいは計算上の利点により判断されねばならない。

#### 4. 破壊点に注目した設計法

一般に構造物は破壊条件式  $Z$  が  $Z \geq 0$  の条件を満足すれば安全であると考えられる。しかし、荷重・抵抗のばらつきあるいはその他の不確定要因により、この条件が完全に満たされることはない。よって確率論的には、ある許容し得る値  $\epsilon_d$  を用いて、 $P_r(Z \geq 0) \geq \epsilon_d$  が満足されれば安全性が確保されたと考えるわけである。本論文で用いている2次モーメント法では、この関係は  $\beta \geq \beta_d$  ( $\beta_d$ : ある許容値) で与えられるわけであるが、ここでは、Hasofer・Lind の定義に従い構造物の安全性は標準化空間での原点と破壊面との最短距離で評価される。このことは、設計が破壊点において  $Z \geq 0$  が満足されるよう行われることを示している。設計を必要な抵抗の平均値を求めることとすると、 $Z = F(R, S)$  の一番簡単な場合に対して以下のように最適化問題として定式化できる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{設計変数: } r, s \\ \text{目的関数: } \mu_R = \mu_R(r, s) \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件: } \sqrt{r^2 + s^2} = \beta_d \\ F(r, s, \mu_R) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (18)$$

実際上は、 $F(r, s, \mu_R) = 0$  の関係は目的関数を求めるのに用いられるので、制約条件式は1つとなる。

このとき、ラグランジュの未定乗数法を用いると、式 (18) は次のようになる。

$$\phi(r, s, \lambda) = \mu_R(r, s) - \lambda(\sqrt{r^2 + s^2} - \beta_d) \quad \dots \quad (19)$$

ここで、 $\phi$  はラグランジュ関数、 $\lambda$  はラグランジュの未定乗数である。

いま、標準化変換として  $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  をとり、 $Z$  が  $Z = R - S$  と表わされる場合を考えると、

$$\phi(r, s, \lambda) = \mu_S \exp(\delta_S s - \delta_R r) - \lambda(\sqrt{r^2 + s^2} - \beta_d) \quad \dots \quad (20)$$

となり、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\delta_R \mu_S \exp(\delta_S s - \delta_R r) - \frac{\lambda r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} = \delta_S \mu_S \exp(\delta_S s - \delta_R r) - \frac{\lambda s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \sqrt{r^2 + s^2} - \beta_d = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (21)$$

から、破壊点の座標  $(r^*, s^*)$  は  $(-\delta_R \beta_d / \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}, \delta_S \beta_d / \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2})$  となり、 $\mu_R$  は

$$\mu_R = \exp\left(\frac{-\delta_R^2 \beta_d}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}}\right) \exp\left(\frac{\delta_S^2 \beta_d}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}}\right) \mu_S \quad \dots \quad (22)$$

と求まる。

$Z$  が非線形の場合は、式 (22) のように  $\mu_R$  は解析的な形では求まらず、反復法を併用することが必要である。以下にその手順を示す。

Step 1:  $F(r, s, \mu_R) = 0$  から  $\mu_R(r, s)$  を求める。

Step 2:  $r = \{(\partial \mu_R / \partial r) / (\partial \mu_R / \partial s)\} s$  の関係式を求める。

Step 3: 与えられた  $\beta_d$  と仮定した  $r$  を用い、 $s = \sqrt{\beta_d^2 - r^2}$  から  $s$  を計算する。

Step 4: Step 2 にもどり、新しい  $r$  を求める。収束するまで Step 3, Step 4 を繰り返す。

Step 5: 設計値  $\mu_R$  は  $r, s$  の最終的な値を用いて、Step 1 より計算される。

表-1 に、 $Z = R - S^2/20000$  に対して  $(X - \mu_X)/\sigma_X$  の標準化を行った結果を示す。ただし、 $\beta_d = 3.090$ ,  $\delta_R = 0.1$ ,  $\sigma_S = 280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu_S = 1400 \text{ kg/cm}^2$  と仮定している。5回の反復計算により、破壊点の座標  $(r^*, s^*)$  は  $(-1.262, 2.821)$  と求まり、 $\mu_R$  は  $2744 \text{ kg/cm}^2$  となる。このように、変数が2個の場合には簡単に解が求まるが、3個以上の場合はもう少し複雑な反復計算か数理

表-1 反復法による計算結果

	$r$	$s$
Initial Value	-1.000	2.924
Step 1	-1.287	2.809
Step 2	-1.259	2.822
Step 3	-1.263	2.820
Step 4	-1.262	2.821
Step 5	-1.262	2.821
Final Solution	-1.262	2.821

計画法を用いなくてはならない。

## 5. 荷重係数の決定法

実際の設計においては、抵抗・荷重等の諸量に関するデータは独立に得られることが多く、それぞれの不確定性の影響を明確に把握するには、抵抗  $R$ ・荷重  $S$  を別々に取り扱う方が望ましいと考えられる。そこで、本節では荷重係数設計法に注目をし、強度係数・荷重係数が2次モーメント理論を用いてどのように決定されるかを検討する。

抵抗・荷重の公称値を平均値と仮定すると、一般に荷重係数設計法は次式で表わされる<sup>13)</sup>。

$$\phi\mu_R \geq r\mu_S \quad \dots \quad (23)$$

ここで、 $\phi \cdot r$  は強度係数・荷重係数である。

ここで問題となるのは、設定された安全性のレベル  $\beta_d$  を満足するように、いかに  $\phi$  あるいは  $r$  を決定するかということである。本論文では、式(10), (14)で定義される安全性指標が標準化空間で不变性を有するということから、両方の定義に基づき  $\phi$  と  $r$  の決定法について考察を加える。破壊点に注目すると、構造物の安全性は  $Z=F(r^*, s^*) \geq 0$  で表わされるから、この条件式と式(23)を関連づけることにより  $\phi$  と  $r$  が求められることなる。

いま、破壊条件式  $Z$  が  $Z=R-S$  で与えられる場合を考える。このとき、 $(X-\mu_X)/\sigma_X$  の変換による標準化空間での破壊点  $(r^*, s^*)$  は、 $(-\sigma_R\beta_d/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}, \sigma_S\beta_d/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2})$  と求まるから、破壊条件式は、

$$\begin{aligned} Z &= (\mu_R + \sigma_R r^*) - (\mu_S + \sigma_S s^*) \\ &= \mu_R - \frac{\sigma_R^2 \beta_d}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \left( \mu_S + \frac{\sigma_S^2 \beta_d}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) \geq 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (24)$$

となる。式(23), (24)から、強度係数  $\phi$  と荷重係数  $r$  は

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \left( 1 - \frac{\sigma_R \delta_R \beta_d}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) \\ r &= \left( 1 + \frac{\sigma_S \delta_S \beta_d}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (25)$$

と求まる。この  $(X-\mu_X)/\sigma_X$  の変換を用いて得られた結果(式(25))は、Rackwitz<sup>5)</sup>の示したAFOMの特殊な場合にあたり、特に、この場合は破壊条件式が線形であるため Ravindra ら<sup>14)</sup>の誘導した結果にも一致する。

$(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  の変換を用いた場合の強度係数・荷重係数は、前節の式(22)から次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \exp \left( - \frac{\delta_R^2 \beta_d}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}} \right) \\ r &= \exp \left( \frac{\delta_S^2 \beta_d}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (26)$$

いままでは公称値として平均値を考えてきたが、一般には荷重係数法では平均値以外の値が公称値に用いられることが多い。以下で平均値以外の値に対する強度係数  $\phi_0$ 、荷重係数  $r_0$  の決定法について検討する。いま、抵抗の公称値を  $R_0$ 、荷重の公称値を  $S_0$  とすると、設計条件式は以下の形で表わされる。

$$\phi_0 R_0 \geq r_0 S_0 \quad \dots \quad (27)$$

もちろん、式(23), (27)において  $\phi_0 = \phi \cdot (\mu_R/R_0)$ ,  $r_0 = r \cdot (\mu_S/S_0)$  の関係が成り立ち、また、 $R_0$ ,  $S_0$  として  $R^*$ ,  $S^*$  をとると  $\phi_0 = r_0 = 1$  となり、すべての式は等価となるわけであるが、ここでは AFOM を用いて  $\phi_0$ ,  $r_0$  の値を直接的に  $\beta$  の定義から誘導することを試みる。

式(26)の結果は、 $Z = \ln R - \ln S$  の破壊条件式をもつ場合の MVFOM の結果とも考えることができる。すなわち、公称値として平均値をとり、その平均値に注目して一次近似を行ったと解釈できる。これに対して、ここではある抵抗・荷重の公称値の組に対応する標準化空間内の点  $(r_0, s_0)$  に注目して一次近似を行う。このとき、破壊条件式は式(16)の  $r^*$  を  $r_0$ ,  $s^*$  を  $s_0$  に変えたものとなり、また、 $R_0 = \mu_R \exp(\delta_R r_0)$ ,  $S_0 = \mu_S \exp(\delta_S s_0)$  であるから、 $\phi_0$ ,  $r_0$  は以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= 1 - \delta_R r_0 - \frac{\sigma_R \delta_R \exp(\delta_R r_0) \beta_d}{\sqrt{\sigma_R^2 \exp(2 \delta_R r_0) + \sigma_S^2 \exp(2 \delta_S s_0)}} \\ r_0 &= 1 - \delta_S s_0 + \frac{\sigma_S \delta_S \exp(\delta_S s_0) \beta_d}{\sqrt{\sigma_R^2 \exp(2 \delta_R r_0) + \sigma_S^2 \exp(2 \delta_S s_0)}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (28)$$

式(26)と式(28)の関係を例題を用いて検討する。いま、 $\mu_R = 2100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu_S = 1400 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\delta_R = 0.1$ ,  $\delta_S = 0.2$ ,  $R_0 = 1995 \text{ kg/cm}^2$ ,  $S_0 = 1680 \text{ kg/cm}^2$  とすると、 $\phi = 0.922$ ,  $r = 1.383$  となる。よって、 $\phi_0$ ,  $r_0$  は式(26)からは

$$\phi_0 = 0.922 \times \frac{2100}{1995} = 0.971$$

$$r_0 = 1.383 \times \frac{1400}{1680} = 1.152$$

式(28)からは、

$$\phi_0 = 0.957, r_0 = 1.136$$

となる。このとき、 $r'_0 (= r_0/\phi_0)$  は 1.186, 1.187 とほとんど変わらず、両者とも同じ設計値を与える。また、このことは式(25)を用いてもいえ、どのような安全性指標あるいは公称値を用いても同じ設計が得られることになるが、強度係数・荷重係数の値はおのおの異なったものになる。

## 6. 部分荷重係数の求め方

前節ではすべての荷重を1つの確率変数  $S$  の中に含めて考えていたが、一般に土木構造物では同時に複数の



## • 式(37)の結果……

$$\phi = 0.832 \quad r_D = 1.099 \quad r_L = 1.445$$

$$\beta = 2.772 \quad r_{D'} = 1.321 \quad r_{L'} = 1.737$$

## • 式(40)の結果……

$$\phi = 0.821 \quad r_D = 1.190 \quad r_L = 1.290$$

$$\beta = 2.824 \quad r_{D'} = 1.449 \quad r_{L'} = 1.571$$

この例題では、 $r_L$  の値は式(37)を用いると最も大きく、式(40)を用いると最も小さくなる。しかし、前節の例題の結果と同じように、どの方法を用いても設計(必要な抵抗の平均値の値)は同じものとなる。

## 7. 種々の近似計算法の比較

式(33)を用いると、設計条件式は次のように表わされる。

$$\mu_R \geq (\mu_D + \mu_L) + \beta_d \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_D^2 + \sigma_L^2} \dots \dots \dots (43)$$

この式を、部分荷重係数を用いた荷重係数法の表式

$$\phi \mu_R \geq r_D \mu_D + r_L \mu_L \dots \dots \dots (44)$$

と対応させるには式(43)の右辺を線形化する必要がある。この線形化に対して、従来からいくつかの方法が提案されてきたが、一般には以下のような形をとる。

$$\mu_R \geq (\mu_D + \mu_L) + \beta_d \alpha_{RS} \{ \sigma_R + \alpha_{DL} (\sigma_D + \sigma_L) \} \dots \dots \dots (45)$$

ここで、 $\alpha_{RS}$  は  $R$  と  $S$  に関する線形化係数、 $\alpha_{DL}$  は  $D$  と  $L$  に関する線形化係数。この  $\alpha_{RS}$ 、 $\alpha_{DL}$  の決定に対して、今までに提案してきた考え方のうち、主な3つの方法を以下簡単に説明する。

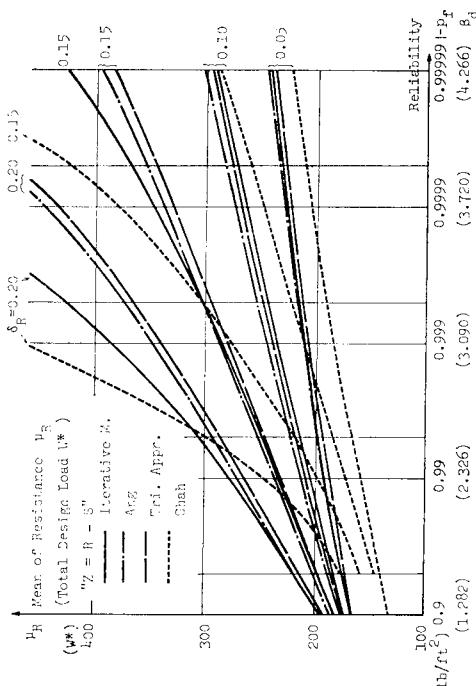
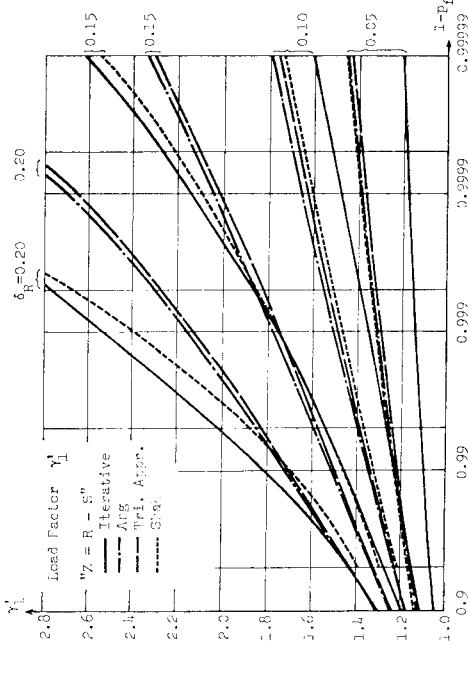
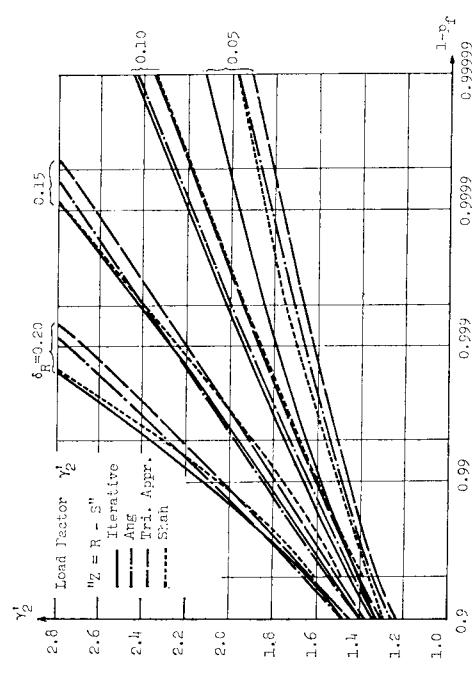
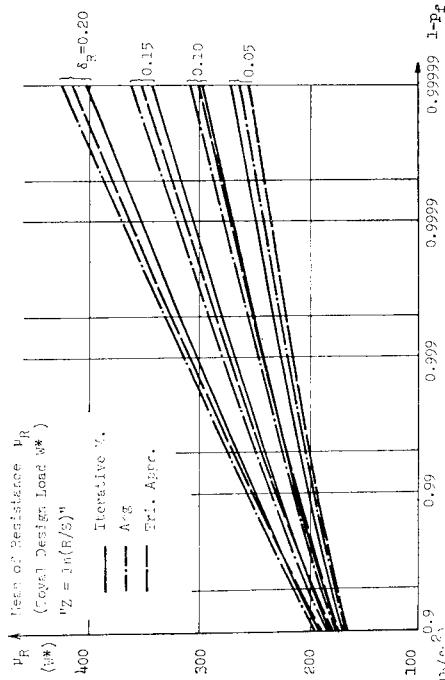
① 三角形近似法<sup>3)</sup>…… $\alpha_{RS}$ 、 $\alpha_{DL}$  の値を近似的に 0.75 (必ずしも 0.75 だけでなく他の値も状況に応じて設定されるが、一般には 0.75 が多い) と置く方法で、計算は最も容易である。

② H.C. Shah の方法<sup>9)</sup>…… $\alpha_{RS}$ 、 $\alpha_{DL}$  は次のように  $\sigma_R$ 、 $\sigma_D$ 、 $\sigma_L$  と関連づけられる。

$$\alpha_{RS} = \frac{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}{\sigma_R + \sigma_S}, \quad \alpha_{DL} = \frac{\sqrt{\sigma_D^2 + \sigma_L^2}}{\sigma_D + \sigma_L}$$

表-2 近似手法の比較

	三角形近似法	A. H-S. Ang の方法	本方 法
設 計 式	$\begin{aligned} & \exp(-0.75 \beta_d \delta_R) \mu_R \\ &= \exp(0.75 \beta_d \delta_D) \mu_D \\ &+ \exp(0.75 \beta_d \delta_L) \mu_L \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \exp(-0.75 \beta_d \delta_R) \mu_R \\ &= \exp(0.75 \beta_d \delta_S) \mu_S \\ &+ \exp(0.75 \alpha \beta_d \delta_D) \mu_D \\ &+ \exp(0.75 \alpha \beta_d \delta_L) \mu_L \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{\beta_d \delta_R^2}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}}\right) \mu_R = \exp\left(\frac{\beta_d \delta_S^2}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}}\right) \mu_S \\ &= \exp\left\{\frac{\beta_d (\delta_D^2 + \delta_L^2)}{(1+\rho)^2 V}\right\} (\mu_D + \mu_L) \\ &= \alpha' \left[ \exp\left\{\frac{\beta_d \delta_D^2}{(1+\rho)^2 V}\right\} \mu_D + \exp\left\{\frac{\beta_d \delta_L^2}{(1+\rho)^2 V}\right\} \mu_L \right] \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">ただし</p> $V = \sqrt{\delta_R^2 + \frac{\delta_D^2 + \rho^2 \delta_L^2}{(1+\rho)^2}}$
$\alpha$ および $\alpha'$ の決定方法		$\begin{aligned} & (1+\rho) \exp\left(\frac{0.75 \beta_d}{1+\rho} \sqrt{\delta_D^2 + \rho^2 \delta_L^2}\right) \\ & - \exp(0.75 \alpha \beta_d \delta_D) \\ &+ \rho \exp(0.75 \alpha \beta_d \delta_L) \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">より試行錯誤法で <math>\alpha</math> を決定</p>	$\begin{aligned} & (1+\rho) \exp\left\{\frac{\beta_d (\delta_D^2 + \rho^2 \delta_L^2)}{(1+\rho)^2 V}\right\} \\ & \alpha' = \frac{\exp\left\{\frac{\beta_d \delta_D^2}{(1+\rho)^2 V}\right\} + \rho \exp\left\{\frac{\beta_d \delta_L^2}{(1+\rho)^2 V}\right\}}{\exp\left\{\frac{\beta_d \delta_D^2}{(1+\rho)^2 V}\right\}} \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">より <math>\alpha'</math> を決定</p>

図-2 抵抗の平均値  $((X - \mu_X)/\sigma_X)$  変換図-3 荷重係数  $r_1'$   $((X - \mu_X)/\sigma_X)$  変換図-4 荷重係数  $r_2'$   $((X - \mu_X)/\sigma_X)$  変換図-5 抵抗の平均値  $((\ln X - \ln \mu_X)/\sigma_X)$  変換

に対し、Shah の方法は、 $\delta_R$  が小さい場合には最も小さな  $\mu_R$  を与えるが、 $\delta_R$  が大きくなると大きな  $\mu_R$  を与える（正確には  $\beta_d$  の値によるが）。しかし、この方法は  $\delta_R$  の値に非常に鋭敏であり、精度はあまりよくなない。このとき、死荷重に対する荷重俢数  $r_1'$  は、各手法とも  $\delta_R$  が 0.10 以下の場合には式 (34) の結果よりも大きな値となるが、 $\delta_R$  が 0.15 以上のときは小さくなる（図-3 参照）。また、 $r_2'$  は  $\delta_R$  の値に関わらず式 (34) の結果が最も大きな値を示す（図-4 参照）。

図-5 をみると、式 (38) の対数型の安全性指標を用いると、各近似法とも  $\mu_R$  に対してほとんど同じ傾向を示していることがわかる。これは横軸に對数目盛をとった影響もあるが、対数型の安全性指標を用いた方が近似度が上がることを示している。さらに、Ang の方法、三角形近似法とも、 $\delta_R$  が 0.05 の場合を除いて常に安全側の値を与えており、この場合も、図-2 の結果と同様に Ang の方法の方が三角形近似法よりも大きな  $\mu_R$  を

与えているが、今度は三角形近似法の方が良い精度を与えることになる。図-6, 7 に  $r_1'$ ,  $r_2'$  の計算結果を示す。今回は、実線で示された  $r_1'$ ,  $r_2'$  は近似法により求められているので、各値の精度の比較はできない。傾向的には、 $r_1'$  は各手法によりそれほど違はない。しかし、 $r_2'$  は  $r_1'$  に比べるとその差は大きくなり、 $\delta_R=0.05$  の場合を除いて、Ang の方法が一番大きな  $r_2'$  を与える。

以上のことから、計算労力の軽減を重視すると以下の結論が得られる。式 (33) の安全性指標を用いるならば、Ang の方法が精度という点では最もすぐれている。しかし、 $\delta_R$  の値によっては危険側の値を示すこともあります。式 (34) に比べて計算労力も飛躍的に少ないというわけではないので、式 (34) を用いる方がよいと思われる。これに対し、式 (38) を用いるならば、三角形近似法が精度・計算労力という点から最も良いと思われる。

## 8. 鋼道路橋の荷重俢数

4. で示した方法を用いて、道路橋の安全性について検討する。さらに、そこで求められた安全性指標の値を用いて、スパン長に応じた荷重俢数を 6. で示した方法を用いて求めることにより、スパン長  $\bar{l}$  の変化による影響を考察する。また、同時に安全性指標の定義が荷重俢数決定に及ぼす影響をも検討する。

まず、安全性の評価に用いる破壊条件式としては、荷重効果に対して誤差の影響を考え、次式を仮定する。

$$Z = R - (D + L)E \geq 0 \quad \dots\dots\dots(46)$$

ここでは、 $E$  は荷重解析に伴う誤差を表わす。

このとき、 $(X - \mu_X)/\sigma_X$ ,  $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  の 2 つの標準化変換を行うと、

- $(X - \mu_X)/\sigma_X$  に対して

$$Z = (1 + \rho)\theta(1 + \delta_R r) - (1 + \delta_D d + \rho + \rho \delta_L l)(\mu_E + \sigma_E e) \quad \dots\dots\dots(47)$$

- $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  に対して

$$Z = (1 + \rho)\theta \exp(\delta_R r) - \{\exp(\delta_D d) + \rho \exp(\delta_L l)\} \cdot \mu_E \exp(\delta_E e) \quad \dots\dots\dots(48)$$

ここで、 $\rho$  は荷重比で  $\mu_L/\mu_D$  で与えられ、 $\theta$  は中央安全率で、スパン長が 20 m 以上の鋼橋に活荷重として L-20 荷重を考えた場合、以下のように表わされる。

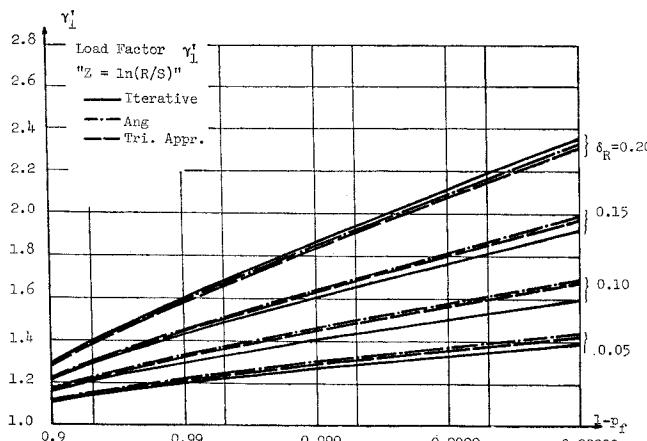


図-6 荷重俢数  $r_1'$  (( $\ln X - \ln \mu_X$ )/ $\delta_X$  変換)

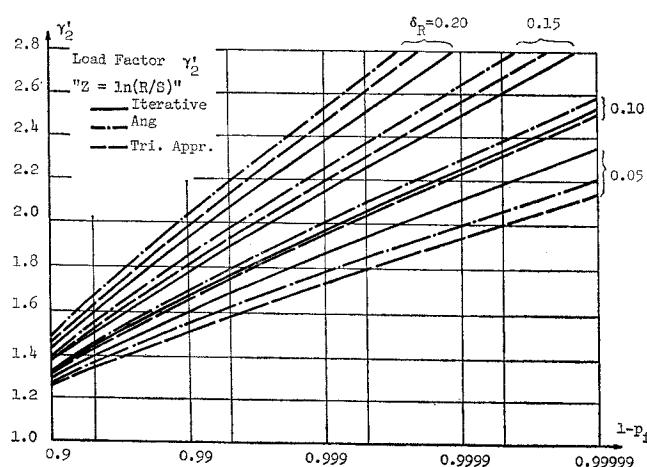


図-7 荷重俢数  $r_2'$  (( $\ln X - \ln \mu_X$ )/ $\delta_X$  変換)



$\tilde{l}=40\text{ m}$  に対して、 $\beta$  は式(54)からは 3.549、式(55)からは 4.568 となる。また、 $\tilde{l}=60\text{ m}$  のときは、 $\beta=3.523$ (式(54))、 $\beta=4.621$ (式(55))となり、式(54)を用いると  $\beta$  は  $\tilde{l}=40\text{ m}$  の方が  $\tilde{l}=60\text{ m}$  より大きくなり、式(55)を用いると反対に  $\tilde{l}=60\text{ m}$  の方が大きくなる。ところが、4.の荷重係数を求める例題で示したように、安全性指標の定義は異なっても、同じ統計データを用いるならば、必要となる抵抗の平均値は同じとなる。以上のことから、どの安全性指標の定義を用いても、断面積等の決定という実際的な設計には問題は生じないが、安全性指標を相対的な評価尺度として用いる場合には、問題の性質あるいは得られるデータ等によりどの定義を用いるかを検討する必要がある。ここで問題となるのはどの定義が最も良いかということであるが、この問題は本論文で示した簡単な例題の結果からは判断できず、不確定要因の影響を正確に評価し、分布形が推定できる変数については、それに最も適した標準化変換を用い、分布形の推定が困難な変数に対しては、使用上の便利さあるいはデータの形・精度等を考慮することが必要であろう。

この例題でいえることは、 $(X-\mu_X)/\sigma_X$  の変換を用いた安全性指標の方が、図-9に示した中央安全率  $\theta$  のスパン長による変化によく似た傾向を示すということである。この  $\theta$  を確定論に基づく 1 つの評価尺度と考えるならば、 $(X-\mu_X)/\sigma_X$  の変換を用いた安全性指標の方が従来の考え方方に近い傾向を示すと思われる。

次に、図-10、11 に  $\phi_0=0.90$  とした場合の荷重係数  $r_{D_0}$ 、 $r_{L_0}$  とスパン長との関連を示す。図中、実線で示した case 1、case 2 が本論文で示した方法による結果、破線で示した case 3、case 4 が比較のために計算した三角形近似法による結果である。図-10より、case 1、case 2 は case 3、case 4 に比べて、スパン長の変化により  $r_{D_0}$  の値が大きく変動していることがわかる。これは、本手法が近似を用いないことにより、抵抗・荷重に関する統計データの影響を荷重係数の決定に正確に

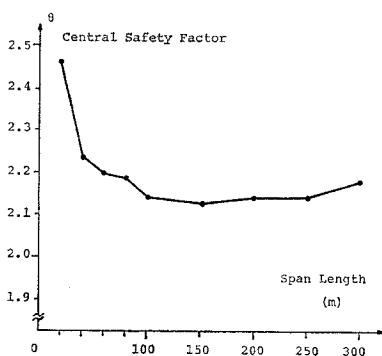


図-9 中央安全率  $\theta$  とスパン長との関係

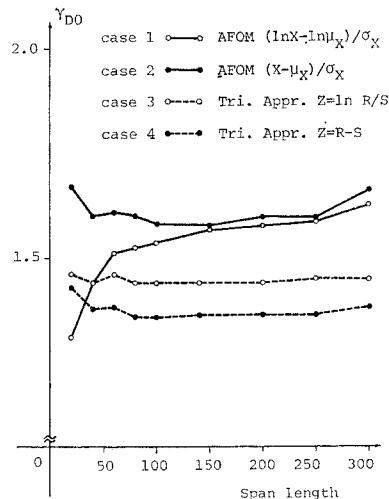


図-10  $r_{D_0}$  とスパン長との関係

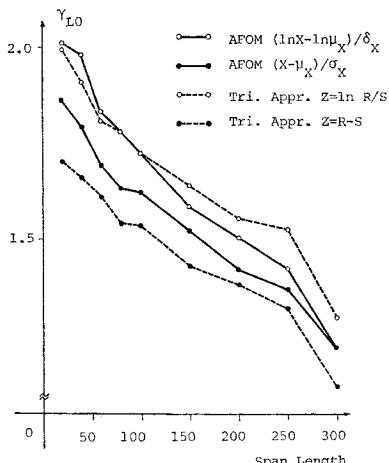


図-11  $r_{L_0}$  とスパン長との関係

反映させていることによる。しかし、case 1 と case 2 は若干異なる傾向を示している。case 1 では  $r_{D_0}$  は単調に増加するのに対し、case 2 では  $r_{D_0}$  は始めは減少し、後に増加している。この原因としては、図-8 で示した安全性指標の変化の違いが考えられる。 $r_{D_0}$  とは異なり、 $r_{L_0}$  はどの手法も同じ傾向を示し、スパン長が大きくなるにつれ減少している。これは、 $\nu_L$ 、 $\rho^*$  がスパン長の増加に伴い小さくなることによる。

本方法を用いることにより、安全性指標  $\beta$  を媒介として、それぞれのスパン長に対して目標とする安全性レベルを達成する荷重係数設計法が得られることになり、また、荷重係数の決定過程も明らかとなる。しかしながら、このことは荷重係数がスパン長の関数として与えられることを示しており、本方法をこのままの形で設計規準の策定に用いるには、計算過程の複雑さ、設計手順の

煩雑さという問題が生じる。安全性設計という観点からは、各荷重係数の値自身ではなく、その組合せにより得られる設計値（抵抗の平均値から得られる断面積等）がいかに所期の目的としていた安全性レベルを合理的に達成しているかが問題であるから、荷重係数としては多少の近似が入っても、ある程度のスパン長にわたり一定とした方が実際的であると思われる。

いま簡単のために、全スパン（20～300 m）にわたって  $r_{D_0}$ ,  $r_{L_0}$  を一定とすると、現行の設計より大きな安全性をすべてのスパン長に確保するためには、各荷重係数の最大値をとり、 $(X - \mu_X)/\sigma_X$  変換に対して、 $r_{D_0} = 1.67$ ,  $r_{L_0} = 1.86$ ,  $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  変換に対して、 $r_{D_0} = 1.63$ ,  $r_{L_0} = 2.14$  が得られる。また、設計値の差を全体として最小とするために次式によって  $r_{D_0}$ ,  $r_{L_0}$  を求めることが可能である。

$$\sum_i \{(r_{D_0} - r_{D_0i})^2 + \rho_i^* (r_{L_0} - r_{L_0i})^2\} \rightarrow \text{最小} \quad \dots \dots \dots (56)$$

ここで、 $i$  は各スパン長を示し、 $r_{D_0i}$ ,  $r_{L_0i}$ ,  $\rho_i^*$  は各スパンに対して求められた荷重係数、荷重比を表わす。このとき、 $r_{D_0}$ ,  $r_{L_0}$  を 0.05 きざみで計算すると、 $(X - \mu_X)/\sigma_X$  変換に対して、 $r_{D_0} = 1.60$ ,  $r_{L_0} = 1.75$ ,  $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  変換に対して、 $r_{D_0} = 1.50$ ,  $r_{L_0} = 1.95$  となる。ただし、より正確に経済性あるいは構造物の重要度等を考慮して荷重係数を求めるには、参考文献 15), 16) などの方法をとる必要がある。

## 9. あとがき

Hasofer・Lind の提案した標準化変換と Advanced First-Order Method を用いることにより、Cornell の安全性指標と Rosenblueth・Esteva の安全性指標の関係を明らかとした。また、破壊点に注目した設計法を示し、2次モーメント法と荷重係数設計法との関連について考察を加えた。さらに、数値計算を行うことにより、従来の部分荷重係数を求める近似手法の比較検討を行った。本論文で得られた結論を以下にまとめて示す。

(1) Cornell の安全性指標および Rosenblueth・Esteva の安全性指標は、それぞれ  $(X - \mu_X)/\sigma_X$ ,  $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  の変換により得られる標準化空間上で定義される安全性指標の特殊な場合に対応する。特に破壊条件式が  $R$ ,  $S$  の 2 变数で表わされる場合、破壊条件式の形に関わらず、 $(X - \mu_X)/\sigma_X$  の変換に対して Cornell の定義が、 $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  の変換に対して Rosenblueth・Esteva の定義が安全性指標として得られる。

(2) 破壊条件式が非線形の場合、正確な荷重係数を決定するには、一次近似法に反復法あるいは数理計画法を併用する必要がある。本論文で示した破壊点に注目し

た手法は、多少の煩雑さはあるが、現行設計と荷重係数設計との正確なキャリブレーションを与える。

(3) 計算労力の簡便さから近似法を用いるならば、Cornell 型の安全性指標に基づく場合は、Ang の方法が最も良い精度を与える。Rosenblueth・Esteva 型の安全性指標に基づく場合は、三角形近似法が精度・計算労力という点から最も良いと思われる。

(4)  $(X - \mu_X)/\sigma_X$ ,  $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  の標準化空間内で原点と破壊面との最短距離で与えられる Hasofer・Lind の安全性指標の定義は、ともに破壊条件式の相違に関する invariance の問題を解決し、数学的に両者の間に優劣はなく正確な設計が可能となる。しかし、相対的な安全性の尺度として両者を用いる場合、計算される安全性指標の値だけではなく、統計データの違いにより異なる傾向を示すことがある。 $(X - \mu_X)/\sigma_X$  の標準化変換により得られる安全性指標は、中央安全率と同じ傾向を示すが、 $(\ln X - \ln \mu_X)/\delta_X$  の変換により得られる安全性指標は異なる傾向を示すことがある。安全性指標を実際設計に応用する場合には、両者の違いに注意する必要がある。

最後に本論文作成にあたり、貴重なご助言をいただいた中部工業大学 小西一郎教授に感謝の意を表します。また図面作成にあたりご助力賜った京大大学院生 池島賢治氏に感謝致します。

## 参考文献

- Cornell, C.A. : Structural Safety Specifications Based on Second-Moment Reliability Analysis, IABSE Symposium on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design, Final Report, London, England, pp. 235～245, 1969.
- たとえば、Lind, N.C. : Consistent Partial Safety Factors, Proc. ASCE, Vol. 97, ST 6, pp. 1651～1669, June, 1971.
- Ravindra, M., N. Lind and W. Siu : Illustrations of Reliability-Based Design, Proc. ASCE, ST 9, pp. 1789～1811, Sept., 1974.
- Ravindra, M. and T. Galambos : Load and Resistance Factor Design for Steel, Proc. ASCE, ST 9, pp. 1337～1353, Sept., 1978.
- Rackwitz, R. : Practical Probabilistic Approach to Design, CEB Conf., Paris, pp. 13～70, 1976.
- Rosenblueth, E. and L. Esteva : Reliability Basis for Some Mexican Codes, ACI, Publication SP 31, pp. 1～41, Mar., 1971.
- Hasofer, A. and N. Lind : Exact and Invariant Second Moment Code Format, Proc. ASCE, EM 1, pp. 111～121, Feb., 1974.
- Ang, A. : Series of Lectures on Structural Reliability and Probability-Based Design, Lecture Note, Apr., 1976.
- Shah, H. : Statistical Evaluation of Load Factors in Structural Design, Study No. 3, Solid Mechanics Division, Univ. of Waterloo, pp. 129～153, 1970.
- Fiessler, B., H. Neumann and R. Rackwitz : Quadra-

- tic Limit States in Structural Reliability, Proc. ASCE, EM 4, pp. 661~676, Aug., 1979.
- 11) Lind, N. : Formulation of Probabilistic Design, Proc. ASCE, EM 2, pp. 273~284, Apr., 1977.
- 12) 白石・古田・中野：安全性指標の信頼性解析への適用に関する 2, 3 の考察, 土木学会論文報告集, No. 301, pp. 13~22, 昭和 55 年 9 月.
- 13) 伊藤 学：構造設計における安全性の規範, 土木学会誌, 第 60 卷 8 号, pp. 35~43, 昭和 50 年 8 月.
- 14) Ravindra, M., A. Heaney and N. Lind : Probabilistic Evaluation of Safety Factors, IABSE Symposium on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design, Final Report, London, England, pp. 35~46, 1969.
- 15) 木下・伊藤・藤野：信頼性アプローチによる鋼道路橋の荷重係数の評価, 第 33 回土木学会年次学術講演会講演概要集, I-150, pp. 286~287, 昭和 53 年 10 月.
- 16) Siu, W., S. Parimi and N. Lind : Practical Approach to Code Calibration, Proc. ASCE, ST 7, pp. 1469~1480, July, 1975.

(1979.8.6・受付)