

開水路流れにおける沈降性粒子の 平均移流速度と縦分散係数

MEAN VELOCITY AND LONGITUDINAL DISPERSION COEFFICIENT
OF HEAVY PARTICLES IN OPEN CHANNEL FLOW

粟 谷 陽 一*・藤 崎 一 裕**

By Yōichi AWAYA and Kazuhiro FUJISAKI

1. まえがき

流速分布をもつ流れの中に投入された物質は、乱流混合以外に速度差に基づく伸長効果を受ける。この伸長効果と乱流拡散とがバランスした状態で物質は拡散する。この現象は、縦分散または移流分散ともよばれ、通常の乱流拡散に比べてその分散効果は著しく大きい。

流水中の物質濃度は、物質の保存式を厳密に解くことにより求められるが、これは非常に繁雑である。一方、分散理論によれば、横断面内の平均濃度分布を比較的容易に求めることができる。

物質の縦分散に関する研究は、Taylor¹⁾ の円管内での分散現象の解析に始まり、Elder²⁾ の開水路流れに対する応用、Fischer³⁾ の一般断面形水路に関する検討などが広く知られている。また、河川における分散係数の実測例を始め、屈曲部や死水域を含む流れ、海浜流域、湾内、往復流などにおける分散係数、さらにはこの分散理論の適用の限界や相似則に対する検討など、移流分散に関しては、基礎的、応用的見地からすでに多くの報告がなされている。

しかし、これらの検討はその大部分が、沈降性のない中立性粒子（物質）の分散に関するもので、沈降性を有する物質の分散に関する報告は非常に少ない。粒子の沈降性を考慮することにより、現象の解析はより複雑なものとなる。近年、Sumer⁴⁾ は水路系内で、粒子に対する物質保存則が成立する場合について、沈降性粒子に対する移流分散現象を考察した。

この種の問題を取り扱う場合には、水路底部における粒子の挙動を細かく把握し、解析に取り入れることが必要であるが、本報では、現象のもう一方の極端な場合を

押さえる意味で、水路底部に沈積した粒子の再浮上を考えない場合について、類似の現象を検討した。具体的には、移流、乱流拡散と沈降とが作用する現象に対して、流下方向の濃度勾配が小さい場合を解析の対象として考察した。そして、まず流下方向の濃度勾配がない場合の解を基本解とし、ついで濃度勾配の影響を微小項として摂動的に取り扱い、線形化された補正項を基本解に加えるという手法を用いた。その結果、得られた濃度分布を用いて粒子が再浮上しない場合に対して、浮遊粒子の平均移流速度あるいは分散現象などに検討を加えた。

2. 沈降性粒子の移流速度と縦分散係数

(1) 粒子の保存則と濃度分布の普遍形

2次元開水路流れについて考え、事柄が紙面に垂直な方向には変化しないものとする（図-1）。このとき、粒子の保存則および底面からの粒子の再浮上を考えないとときの境界条件は、それぞれ式(1)、(2)で表わされる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uC) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C\right) \quad (1)$$

$$D \cdot \partial C / \partial y + w_0 C = 0; \quad x > 0, \quad y = h, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$\partial C / \partial y = 0; \quad x > 0, \quad y = y_0, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

x ：流下方向距離座標、 y ：垂直方向距離座標、 t ：時間、

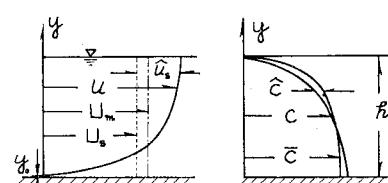


図-1 座標系

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

** 正会員 工博 九州工業大学助教授 工学部開発土木工学科

C : 粒子濃度, u : 流速, w_0 : 粒子沈降速度, h : 水深, D : 拡散係数である (y_0 は後記)。なお、初期条件の影響が無視できる箇所注¹⁾での現象を考察の対象としているから、ここでは、初期条件を特定する必要はない。ここで、等流状態を仮定し、流速分布は対数分布で表わされるものとする。さらに、物質の拡散係数と運動量のそれとを近似的に等しいとすると次式が得られる。

$$\frac{u}{u_*} = A + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3)$$

$$D = \kappa u_* y (1 - y/h) \quad (4)$$

u_* : 摩擦速度, ν : 動粘性係数, A : 定数, κ : カルマンの定数 ($\kappa=0.4$ とした), y_0 : 式 (3) で $u=0$ となる y の値である。

式 (1) の右辺第 1 項は他の項に比べて無視できるものとし、式 (1), (2) を無次元化すると次式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + ZC \right) \quad (5)$$

$$\bar{D} \cdot \partial C / \partial \bar{y} + ZC = 0; \bar{x} > 0, \bar{y} = 1, \bar{t} > 0 \quad (6.1)$$

$$\partial C / \partial \bar{y} = 0; \bar{x} > 0, \bar{y} = \bar{y}_0, \bar{t} > 0 \quad (6.2)$$

ここで、

$$\bar{x} = x/h, \bar{y} = y/h, \bar{t} = t/\{h/(\kappa u_*)\}, \bar{y}_0 = y_0/h \quad (7)$$

$$\bar{D} = \bar{y}(1 - \bar{y}) \quad (8)$$

$$Z = w_0/(\kappa u_*) \quad (9)$$

$$\bar{u} = u/(\kappa u_*) = \frac{1}{\kappa^2} \ln \frac{y}{y_0} \quad (10)$$

である。

現象の基本解として、まず、分散効果を考慮しないときの現象を考える。この基本解として流下方向に濃度勾配がない場合の解 \tilde{C} を求める。このとき、式 (5) から、

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{D} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{y}} + Z\tilde{C} \right) \quad (11)$$

が得られる。変数分離法により解を求めるごとにすると式 (12) を用いて、式 (13) が導かれる。

$$\tilde{C}(\bar{y}, \bar{t}) = \tilde{C}_0(\bar{y}) \cdot T(\bar{t}) \quad (12)$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\tilde{C}_0} \{ \bar{y}(1 - \bar{y}) \tilde{C}_0'' + (1 - 2\bar{y} + Z) \tilde{C}_0' \} = -\lambda \quad (13)$$

' はそれぞれの変数に関する微分を意味する。 λ は与えられた条件を満たす固有値である。

ここで、式 (14) を用いると、式 (13) から式 (15) が得られる。

$$\lambda = a^2 - 1/4, \alpha = a + 1/2, \beta = -a + 1/2, \gamma = 1 + Z \quad (14)$$

$$\bar{y}(1 - \bar{y}) \cdot \tilde{C}_0'' + \{ \gamma - (\alpha + \beta + 1) \} \tilde{C}_0' - \alpha \beta \tilde{C}_0 = 0 \quad (15)$$

注 1) このことが成立する範囲に関しては後の 3. 考察の項で検討する。

式 (15) は Gauss の超幾何微分方程式の標準形である。

したがって、式 (15) の一般解は、超幾何関数 F により

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= A \cdot F[1/2 - \alpha, 1/2 + \alpha, 1 + Z, \bar{y}] \\ &\quad + B(-\bar{y})^{-1/2 - \alpha - Z} (1 - \bar{y})^Z \\ &\quad \cdot F[1/2 + \alpha, 1/2 + \alpha + Z, 1 + 2\alpha, \bar{y}^{-1}] \end{aligned} \quad (16)$$

と表わされる⁵⁾。

ただし、

$$\left. \begin{aligned} F[\alpha, \beta, r, \bar{y}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(r)_n} \frac{\bar{y}^n}{n!} \\ &= (1 - \bar{y})^{r - \alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r - \alpha)_n (r - \beta)_n}{(r)_n} \frac{\bar{y}^n}{n!} \\ (\alpha)_n &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) \\ &= \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha), (\alpha)_0 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

であり、 A, B は境界条件から決まる定数、 Γ は Gamma 関数である。

ここで、水路底部の境界条件から、式 (16) の第 2 項は省略して、 $B=0$ としても実際上問題となるほどの誤差は生じないことがわかる。このことは、 $\bar{y}=\bar{y}_0$ 近傍での式 (16) の右辺第 1 項と第 2 項の微係数の比のオーダーが \bar{y}_0^{+1+z} となり、したがって、係数の比 B/A もこの程度となること、しかも、ここで対象としている現象は、レイノルズ数が、数万あるいはそれ以上の場合は、 \bar{y}_0 の値はほぼ 10^{-4} 以下であることなどの理由による。

また、このとき固有値は境界条件式 (6.1) から

$$F[1/2 - \alpha, 1/2 + \alpha, 1 + Z, 1] = 0 \quad (18)$$

の解として求められる。式 (16) で、 $B=0$ とし式 (17), (14) を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} F[1/2 - \alpha, 1/2 + \alpha, 1 + Z, \bar{y}] &= (1 - \bar{y})^Z \left\{ 1 + \frac{1}{1 + Z} \left(\frac{1}{2} + Z - \alpha \right) \left(\frac{1}{2} + Z - \alpha \right) \bar{y} \right. \\ &\quad + \frac{1}{Z + 1} \left(\frac{1}{2} + Z - \alpha \right) \left(\frac{3}{2} + Z - \alpha \right) \left(\frac{1}{2} + Z + \alpha \right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{2} + Z - \alpha \right) \frac{y^2}{2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

となり、式 (18) が成立するためには、上式から、

$$(Z + 1/2 + n - \alpha)(Z + 1/2 + n + \alpha) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

が成り立つことがわかる。このとき式 (14) から

$$\lambda_n = (Z + n)(Z + n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

として、固有値 λ_n が順次求められる。

したがって、境界条件を満たす、式 (11) の解は、

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\bar{y}, \bar{t}) &= A \sum_{n=0}^{\infty} a_n F[-(n + Z), n + Z + 1, 1 + Z, \bar{y}] \\ &\quad \cdot \exp\{-(n + Z)(n + Z + 1)\bar{t}\} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。 a_n は初期条件を展開したときの係数である。

本報では、流水中の物質濃度の変化を、水深方向に平

均した濃度の流下方向の変化として近似的に評価しようとしている。したがって、流下方向にも十分に流れが発達し、沈降時間も十分に経過して、初期条件が水深方向の濃度分布形に及ぼす影響などが無視できる場合について考える。この場合、式(22)は時間についての高次の指數を有する項が省略されて、以下のように表わされる。

$$\tilde{C}(\bar{y}, \bar{t}) = Aa_0 F[-Z, 1+Z, 1+Z, \bar{y}] \cdot \exp\{-Z(Z+1)\bar{t}\} \quad (23)$$

また、このとき固有値は、最低次のもののみを考慮すればよいから、

$$\lambda = \lambda_0 = Z(Z+1) \quad (24)$$

とすると、式(23)の F を式(19)のように展開したときの { } 内の第2項以下は 0 となる。便宜上、

$$\int_0^1 \tilde{C}_0 d\bar{y} = 1 \quad (25)$$

とすると、 \tilde{C}_0 は次式となり、

$$\tilde{C}_0 = (1+Z)(1-\bar{y})^Z \quad (26)$$

結局、式(11)の解は、この場合次の式(27)で表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \tilde{C}_0 \exp(-\lambda_0 \bar{t}) \\ &= (1+Z)(1-\bar{y})^Z \exp\{-Z(Z+1)\bar{t}\} \end{aligned} \quad (27)$$

つまり、本報で対象としている現象の基本解は、式(26)で表わされる分布が時間に関して指数関数的に減少するということになる。これは、流下方向に濃度勾配がない場合の解で、分散効果を考慮しないときの解に相当する。

図-2 中の実線は \tilde{C}_0 と \bar{y} との関係を示したものである。 \tilde{C}_0 は沈降時間、流下距離が大きくなつた場合の濃度分布の普遍形に相当するが、図-2 によると、パラメーター Z の値が小さいほど乱流拡散の影響が強く出ていて、水深方向の濃度変化が少なく、 Z の値の増大とともに、沈降の影響が大きくなり、底部での \tilde{C}_0 の値が大きくなる（なお、図-2 中の破線は、水路底部での粒子 flux=0 の場合で、これについては、後にまとめて考察する。図-3, 5 についても同様である）。

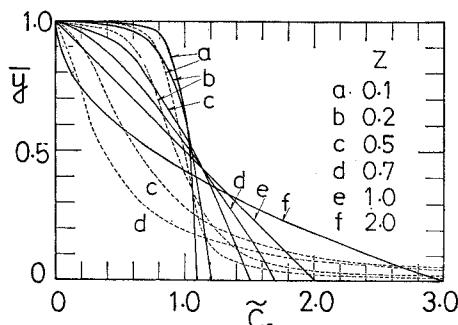


図-2 濃度分布の普遍形

(2) 浮遊粒子の平均移流速度と縦分散係数

粒子濃度分布が式(26)で表わされるときの、浮遊粒子の平均移流速度 \bar{U}_s は式(28)となる。

$$\begin{aligned} \bar{U}_s &= \frac{\int \bar{u} \tilde{C}_0 d\bar{y}}{\int \tilde{C}_0 d\bar{y}} = \int_{\bar{y}_0}^1 (1+Z)(1-\bar{y})^Z \bar{u} d\bar{y} \\ &\doteq \frac{1}{\kappa^2} \left[\ln \frac{1}{\bar{y}_0} - E - \psi(2+Z) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、

$$E = 0.57721 \cdots \text{(Euler の定数)}$$

$$\psi(Z) = \frac{d}{dZ} (\ln \Gamma(Z)) = \Gamma'(Z)/\Gamma(Z)$$

である。したがって、流体の平均流速 \bar{U}_m と \bar{U}_s の差は

$$\begin{aligned} \bar{U}_m - \bar{U}_s &= \frac{1}{\kappa^2} \{ E + \psi(Z+2) - 1 \} \\ \bar{U}_m &= (\ln(1/\bar{y}_0) - 1)/\kappa^2 \end{aligned} \quad (29)$$

となる。図-3 中の実線は $\bar{U}_m - \bar{U}_s$ と Z の関係を示す。 Z の増大とともに、水路底部近傍での粒子濃度が増すため、両者の平均流速の差が大きくなる様子が出ていている。

以上の結果を用いて、粒子の縦分散係数を求める。

濃度 C の x 方向（流下方向）の変化が小さい場合を考えているので、 C を移動座標 \bar{x}_1 で展開して、1次の項までとり、補正項を付加して次式で近似する。

$$C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{C}(\bar{y}, \bar{t}) \cdot (1 + K\bar{x}_1) + \hat{C}(\bar{y}, \bar{t}) \quad (30)$$

K は、 \bar{y} には独立な一定の微小量であり、第0近似では次式で定義される。

$$K = \frac{1}{\langle C \rangle} \cdot \left\langle \frac{\partial C}{\partial \bar{x}_1} \right\rangle = \frac{1}{\langle C \rangle} \cdot \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \bar{x}_1} \quad (31)$$

上式中 $\langle \rangle$ の記号は、全水深に関する積分または平均を意味する。また、 \hat{C} も K に比例する微小量である。

さらに、前項で検討した結果を用いて、流下方向に濃度勾配がある場合にも、 \tilde{C}_0 と類似の沈降による濃度減少を想定する。

$$C = \{\tilde{C}_0(\bar{y})(1+K\bar{x}_1) + \hat{C}_0(\bar{y})\} \exp(-\lambda \bar{t}) \quad (32)$$

ここで、 \bar{x}_1 を前述の浮遊粒子の平均流速 \bar{U}_s を用いて、

開水路流れにおける沈降性粒子の平均移流速度と縦分散係数

と、 Z の増大とともに分散係数の値がしだいに小さくなることがわかる。そして、この傾向はレイノルズ数の影響を、ほとんど受けない。このことは、対数速度分布則が、レイノルズ数によって、その分布形をあまり変えないためと考えられる。また、 $Z=0$ の縦軸の値は、中立

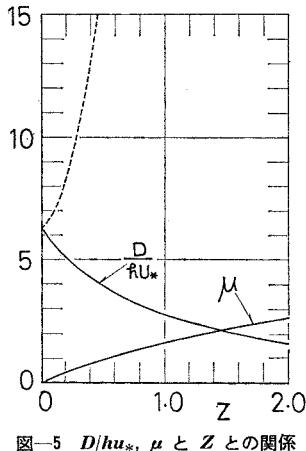


図-5 D/hu_* , μ と Z との関係

性物質の分散係数²⁾に相当する。なお、 Z の値の増大とともに、現象に及ぼす粘性底層の影響が著しくなる。このことに関しては、別に検討を要するが、ここでは、 $\bar{y}=\bar{y}_0$ まで対数分布が成立するものとして一応の計算を行った。また、式(49)の数値積分には、台形公式を用いた。 \bar{y} の分割数は、 $\bar{y}_0 \leq \bar{y} < 0.005$, $0.005 \leq \bar{y} < 0.95$, $0.95 \leq \bar{y} < 1$ の区間でそれぞれ 400, 100, 400 とした。

(3) モーメント法による解析

前項では、Taylor¹⁾, Elder²⁾ らが分散係数の解析に用いた手法と類似の考え方により、式(30)の仮定を用いて現象を検討した。この種の現象はモーメント法によって検討されることも多い^{4)~7)}。モーメント法では、各水深における、流下方向の粒子濃度の積率を求めて、必要とする値を求めるものである。

前項と同様に、沈降による粒子濃度の減少が、指数関数的であると仮定すれば、モーメント法によっても、先に検討したのと同様の結果が得られることを以下に記す。

基礎方程式(5), (6)の各項に \bar{x}_1 のべき乗をかけて、 \bar{x}_1 方向に積分することにより、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} - \hat{u}_s p C_{p-1} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \bar{D} \frac{\partial C_p}{\partial \bar{y}} + Z C_p \right\} \quad (50)$$

$$\bar{D} \partial C_p / \partial \bar{y} + Z C_p = 0, \bar{y} = 1 \quad (51.1)$$

$$\partial C_p / \partial \bar{y} = 0, \bar{y} = \bar{y}_0 \text{注 } 3) \quad (51.2)$$

ただし、

$$C_p = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}_1^p C d \bar{x}_1 \quad (52)$$

であり、初期条件には、入口で水深方向に一様の濃度を想定する。

$$C_p(\bar{y}, 0) = 1, p = 0; C_p(\bar{y}, 0) = 0, p > 0 \quad (53)$$

注 3) このとき $\bar{y}_0 \rightarrow 0$ でも解は存在する。

式(50)において $p=0$ とすると、0次のモーメント C_0 を求める式が得られる。

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \bar{D} \frac{\partial C_0}{\partial \bar{y}} + Z C_0 \right\} \quad (54)$$

上式は式(11)と同形である。境界条件についても同様であるから、式(54)の解 C_0 は式(11)の解 \tilde{C} と一致する。

ここで、 C_p を水深方向に積分した量 m_p を次式で定義すると、

$$m_p = \int_{\bar{y}_0}^1 C_p d\bar{y} \quad (55)$$

任意の時刻に水路内に浮遊する全粒子量 m_0 は、

$$m_0 = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{Z a_N}{(N+Z)(N+Z-1)} \cdot \exp\{- (Z+N)(Z+N-1)\bar{t}\} \quad (56)$$

となる⁵⁾。 a_N は濃度の初期条件を展開したときの係数である。なお、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_0}{m_0} = (1+Z)(1-\bar{y})^Z \quad (57)$$

となり、上式の右辺は式(26)と一致する。Sumer は、上式左辺の値を級数により求めている⁵⁾が、右辺の関数形については述べていない。以上のことから、 m_0 も時間が十分進めば沈降により $e^{-\lambda \bar{t}}$ で値が減少することになる。

式(50), (55), (53), (32) から

$$\frac{dm_p}{dt} - p \int_{\bar{y}_0}^1 \hat{u}_s C_{p-1} d\bar{y} = -\lambda_0 m_p \quad (58)$$

$$m_p(0) = 1, p = 0; m_p(0) = 0, p > 0 \quad (59)$$

が得られる。ここで、 C_p , m_p の絶対値の、粒子の沈降による減少を考慮して、

$$C_p = \tilde{C}_p \exp(-\lambda \bar{t}), m_p = \bar{m}_p \exp(-\lambda \bar{t}) \quad (60)$$

とする。このとき、浮遊粒子の平均移流速度に関しては式(58)で $p=1$ とし、式(60)を用いて、

$$\frac{d\bar{m}_1}{d\bar{t}} = \int_{\bar{y}_0}^1 \hat{u}_s \tilde{C}_1 d\bar{y} \quad (61)$$

となり、 $t \rightarrow \infty$ で式(61)の左辺=0となることから、式(28)と同じ結果が得られる。

縦分散係数は、この場合次式から求められる。

$$\frac{dL}{du_*} = \kappa \frac{1}{2} \frac{d\bar{m}_2}{d\bar{t}} \quad (62)$$

式(58), (62)から($p=2$ として)、

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{m}_2}{d\bar{t}} = \int_{\bar{y}_0}^1 \hat{u}_s \tilde{C}_1 d\bar{y} \quad (63)$$

となる。このときの \tilde{C}_1 は、式(50), (60)から、

$$-\lambda \tilde{C}_1 - Z \frac{d\tilde{C}_1}{d\bar{y}} - \frac{d}{d\bar{y}} \left(\bar{D} \frac{d\tilde{C}_1}{d\bar{y}} \right) = (\hat{u}_s + \mu) \tilde{C}_0 \quad (64)$$

の解ということになる。上式中の μ は、2.(2)と同様に、粒子の沈積除去のために生じる、粒子のみかけの移

動速度の増加のために導入される量である。式(64)は式(35)で K の高次の項を略した式に対応し、以後の具体的計算は、2.(2)と同じことになる。

以上、モーメント法によれば、式(30)の \tilde{C} に C_0 、 \hat{C} に C_1 がそれぞれ対応することを示した。これらの関数の物理的意味については、それぞれが当初から同一のものであることを要求してはいないが、演算の過程が対応することから、これらの量が、それぞれの次数の積率の性質を有しているとも考えられる。

3. 考 察

(1) 数値解による仮定および結果の検討

2. の検討で、浮遊粒子の平均移流速度として、式(28) (図-3)を、また粒子の分散係数については、式(30), (32)の近似が成り立つと仮定して、式(49) (図-5)を得た。用いた仮定や得られた結果の妥当性を調べるために、現象の基礎方程式である粒子保存の式(5)と境界条件を直接差分化して数値解を求めた。

差分計算には、類似の現象の解析^{8)~13)}に用いられている手法を参考にして、移流項に上流差分形を用いるほかは最も一般的な陽差分スキームを用いた。流下方向の座標きざみ $4\bar{x}=0.125$ 、水深方向の座標きざみ $4\bar{y}=0.1$ 、時間きざみ $4\bar{t}=0.0005$ とした。以下に示す計算結果はいずれもレイノルズ数 $R_e=20000$ ($\bar{y}_0=0.000326$) の場合の値であるが、他の R_e についても同様の傾向を示すものと思われる。

図-6 に、 $\bar{x}=0$ で、鉛直方向に一様な濃度の瞬間放

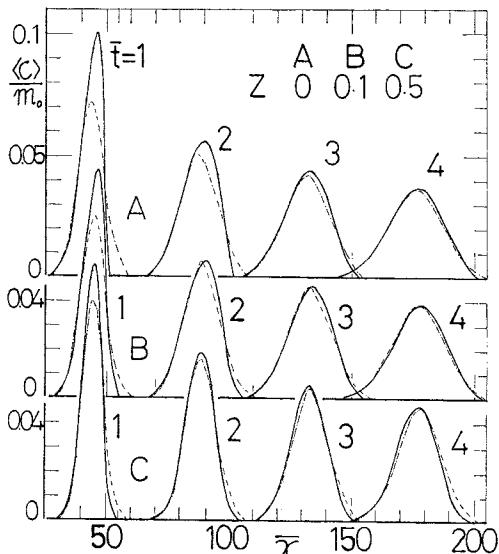


図-6 濃度分布の変化

流があった場合の、鉛直方向平均濃度（相対値）の時間的場所的变化を示す。図-6 の $Z=0.1, 0.5$ いずれの場合も初期段階では、初期条件の影響が残っていて、上流側で分布のそが少し尾を引き、下流側で短めに切れる傾向が認められる。また、両者とも時間の経過につれて正規分布に近づいているが、 Z の値の小さい方が、相対的に沈降の影響が少ないため、移流の影響を強く受けて分布の広がりが大きい。

なお、図-6 には、差分計算の精度の検討の意味で、 $Z=0$ の場合も付記した。実線がここで用いた差分スキームによるもので、一点鎖線は式(47)を積分した値で、次の式(65)で求めたものである。

$$\langle C \rangle = \frac{M/\rho}{2\sqrt{\pi D_L \bar{t}}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{4D_L \bar{t}} [x - (\bar{U}_s + \mu) \bar{t}]^2 - \lambda_0 \bar{t} \right] \quad \dots \dots \dots (65)$$

$$\bar{D}_L = D_L / (hu_* \kappa), \quad (M/\rho = 1 \times \Delta x = 0.125 \text{とした})$$

図-6 中の縦軸は、各時間における、それぞれの箇所での水深方向平均粒子濃度 $\langle C \rangle$ を、その時間に水路内に浮遊懸濁している全粒子量 m_0 で除した値である。図-7 中の太線は、この m_0 の時間的変化を示す。同図中の細線は、それぞれの Z に対する $-\lambda_0 \bar{t}$ ($\lambda_0 = Z(Z+1)$) の値を示しているが、 \bar{t} の比較的小さな値から、両者は近い値となることがわかる。

2. の論旨の展開では、沈降に関する要因はすべて、0次の固有値により取り扱い、 $-Z(Z+1)\bar{t}$ を指數として、指數関数的に濃度が時間とともに減少する場合

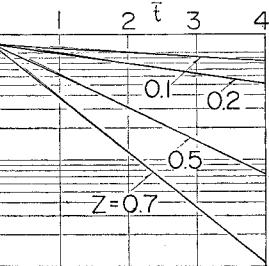


図-7 m_0 の減少過程

を基準にした。このことは、式(22)で第1項のみを用いたことに相当する。式(22)によると、最初の項と第2番目の項との比 r_{01} は、両者の係数が同じ程度の大きさだとすると、式(21)から

$$r_{01} = \exp(-\lambda_1 \bar{t}) / \exp(-\lambda_0 \bar{t}) \\ = \exp\{-(\lambda_1 - \lambda_0) \bar{t}\} = \exp\{-2(Z+1) \bar{t}\} \quad \dots \dots \dots (66)$$

となる。したがって、たとえば $Z=0.1$ のときに、1次以上の高次の項の影響は、 $\bar{t} > 2$ ならほぼ 1% 以下ということになる。また、一般に Z の値が大きいほど、比較的早い時間から高次の項が減衰することがわかる。

以上、図-7 にも示されているように、粒子沈降による濃度減少に関する本報での取扱いは、かなりの一般性

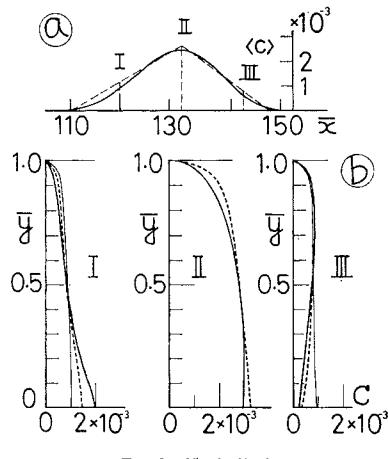


図-8 濃度分布

を有しているといえる。

図-8 は、式(30)の検討の意味で、濃度分布の様子をさらに詳しく調べた一例である。図-8 (a) 中の実線が、鉛直方向平均濃度 $\langle C \rangle$ の流下方向の分布で、I, II, III は代表的な 3 つの箇所の位置を示し、同図中の破線は $\partial \langle C \rangle / \partial \bar{x}$ を表わす。図-8 (b) 中の実線は、それぞれの箇所における水深方向濃度分布を示し、破線は式(30)により求めた濃度分布(細線は、 \hat{C} を加える以前の値)である。図は $Z=0.2$, $\bar{t}=3$ の場合で、 $K=0.054$ (I), -0.057 (III) の値を用いた。I, II, III のどの場合に対しても、破線は実線を比較的よく再現していて、時間の経過について両者はさらに近くなるものと考えられる。

式(30)のような取扱いは、中立系の物質の濃度分布の解析に用いられているが、本報で対象としているような現象に対しても、現象の第1近似として十分の精度を有しているようである。

浮遊粒子の平均移流速度については、差分計算から求めた値は式(65)で与えられる値に比べて、 $\bar{t}=4$ の段階で 1% 程度の差が出た。これは主として、差分計算時の誤差によるものと思われる。

図-9 は、図-6 に示すような分布の分散 σ^2 (variance) が時間の経過とともに増大する様子を Z をパラメーターにして記したものである。図-9 から、時間がある程度進むと σ^2 が \bar{t} に比例して増加しており、本報で検討した事項が利用できることがわかる。分散係数 D_L と分布の分散 σ^2 との間には、次の関係があ

る。

$$\lim_{\bar{t} \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{d\bar{t}} = \frac{1}{\kappa} \frac{D_L}{h u_*} \quad \dots \dots \dots (67)$$

図-9 中の細線は、 $D_L/h u_*$ として、式(49)により求めた値を用いたときの式(67)を表わす。 \bar{t} が大きくなると、実線と細線は非常に近づいていて、本報で考察した事項の妥当性が示されている。

(2) 分散係数の利用例および初期濃度分布の影響

得られた分散係数等を用いると、流下方向の濃度分布の変化を $\langle C \rangle$ を用いて概略的に求めることができる。入口 ($\bar{x}=0$) で瞬間投入がなされたときの、濃度分布の一例は先の図-6 にも示されていて、これらの図からも、本報で得た分散係数の利用の可能性を知ることができます。以下にもう少し検討を進める。

図-10 中の破線は、前述の差分計算により求めた、 $\bar{x}=(\bar{U}_s + \mu)\bar{t}$ の部分における $\langle C \rangle$ を、実線は式(65)により求めた値を示す。図によると、 $\log\{\langle C \rangle \sqrt{\bar{t}}\}$ と \bar{t} の間には、 \bar{t} が一定値より大きくなると、直線関係が成立しており、時間がある程度経過した後では、式(65)でも現象の推定が十分可能なことがわかる。

図-10 で、差分による計算結果が直線からはずれている部分は分散理論が適用できない箇所で、現象が十分に発達していないことを意味している。分散係数による濃度計算が適用可能となる時間(または流下距離)は、分散理論に関連して検討すべき大きな要因である。このことについて詳しく述べることとは、本報の目的外であるので、以下の計算例により一応の検討を行うにとどめる。

図-11 は、水面近傍(A)および中央部(B)に源がある場合の、水深方向の濃度分布形の流下

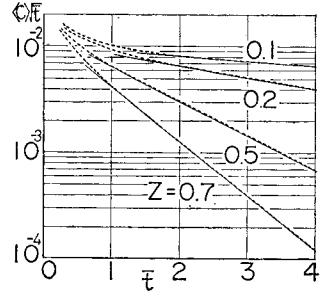
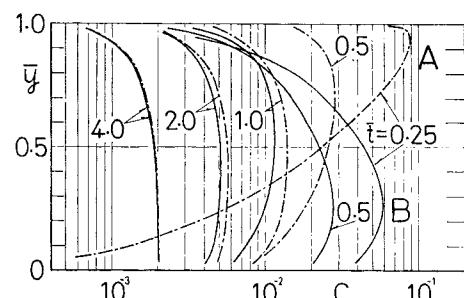
図-10 $\langle C \rangle$ と \bar{t} との関係

図-11 初期濃度分布の影響

に伴う変化を示す (Z の値は 0.2 の場合である). 図-11 によると, 中央部に源のある場合の方が, 初期段階から乱流拡散の影響を強く受け, また, 沈降による濃度の減少も若干進行が速い. しかし, 時間の経過とともに両者の分布形の差はしだいに小さくなり, 図の場合, t が 3 を超えると両者はほとんど一致してくる. この結果は, 図-8~10 中に記されている事項とも対応しており, これらの図から本報で検討した分散理論の適用可能範囲に関して, 一応の目安をつけることができる.

(3) 粒子の沈積がない場合との比較

図-2, 3, 5 中の破線は, いずれも底面での粒子の沈積を認めない場合 (または, 水路底部での粒子 flux=0 の場合) に関する値⁴⁾ である.

この場合には, 水路底部でも式(2.1)の境界条件が適用される. 図-2 中の破線は式(68)²⁾ で表わされ,

$$\bar{C}_0 = \frac{\sin(\pi Z)}{\pi Z} \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z \quad \dots \dots \dots \quad (68)$$

基準化された Rouse 分布とでもよばれるべきもので, 図-2 中の実線に比べて, 水路底部付近での濃度分布の値が大きい. またこの傾向は Z が大きくなるほど著しい.

このことは, 図-3 に示されている粒子の平均移流速度にも表われている. 流下方向の全粒子 flux 中に占める水路底部側の比率が大きいため, 実線に比べて破線の方が, 流体の平均流速に対する遅れが大きく出ることになる.

また, 式(49)で $\mu=0$ とし, \tilde{C}_0 に式(68)を用いると次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{D_L}{hu_*} &= -\kappa \frac{\sin(\pi Z)}{\pi Z} \int_0^1 \hat{u}_s \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z d\bar{y} \\ &\cdot \int_0^{\bar{y}} \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^{-Z} \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} d\bar{y} \\ &\cdot \int_0^{\bar{y}} \hat{u}_s \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z d\bar{y} \quad \dots \dots \dots \quad (69) \end{aligned}$$

上式は, モーメント法を用いて Sumer が求めた式⁴⁾ と一致する. このことは, 2.(3) で検討したことからも当然予想されることである.

式(46)で与えられる図-5 中の破線は, Z の増加とともに急激に増大する傾向がある. また, 破線の値は, 式(46), (47)で $\lambda=0$ として用いられて, 水路系内の全粒子量は保存される. これに対して, 本報で求めた実線の値を用いる場合では, $\lambda \neq 0$ であるため, 濃度分布形そのものは保持されつつも, 沈降により濃度の絶対値が低下していくことが大きな相違点である.

4. あとがき

開水路等流における沈降性粒子の移流分散現象に関し

て, 水路底部へ沈積した粒子の再浮上がない場合を検討した. 本報で考察した事項および得られた結果をまとめると次のとおりである.

(1) 現象の第1近似として, 流下方向に濃度勾配がない場合について調べ, この場合の水深方向の濃度分布が(一定時間経過後には), 普遍分布の式(26)と沈降による減少を表わす $\exp(-\lambda_0 t)$ との積で表わされることを示した.

(2) このときの指数 λ_0 は, 基礎方程式と境界条件から定められる0次の固有値で, 沈降のパラメータ Z の簡単な関数となる.

(3) (1)で得られた普遍分布を用いて, 流速分布が対数分布で表わされるときの, 浮遊粒子の平均移流速度を Z の関数として求めた.

(4) 粒子の沈積により系内の粒子が減少する場合には, 沈降の影響のために, 浮遊粒子のみかけの平均移流速度が, 実質速度より増大することを示した.

(5) (1)~(4)の結果を利用して, Taylor が円管内の分散解析に用いた手法と類似の手法により, 開水路流れにおける沈降性粒子の分散係数を求めた.

(6) 同様の事項をモーメント法によっても検討して, この方法によっても, (5)で得たものと同じ結果が得られることを示した.

(7) 現象の基礎方程式である粒子保存の式と境界条件を, 直接差分化して濃度分布の数値解を求めた. そして, 理論解析に用いた仮定, 得られた結果について検討してその妥当性を示した.

(8) 入口濃度分布が下流の濃度分布に及ぼす影響について, 同様に数値解により検討して, 本報で検討した分散理論の適用が可能となる範囲について考察した.

(9) 水路系内で粒子保存則が成立する場合の類似の現象についてはすでに報告がなされている. その内容と今回得られた結果とを比較して, 相互の関連を調べた.

以上のように, 本報では底部での粒子の再浮上がないという一つの極端な場合を検討した. もう一方の極端な場合は, 水路内で粒子保存則が成立する場合である. この場合が「粒子濃度は, 最高値でもこの値を超えない」という上限を示すものであるのに対して, 本報で得られた結果からは, 「少なくともこの値以下の濃度にはならない」という下限の値が示されることになる. 水路底部における粒子の沈積, 再浮上などの挙動は, 実際には, 種々の水理量の影響を受けて複雑に変化する. これらの事項を考慮に入れて, より現実に即した現象を予測することが今後の課題である. なお, 本報の一部は, 土木学会の年次学術講演会で発表したものである¹⁴⁾.

参考文献

- 1) Taylor, G.I.: The Dispersion of Matter in Turbulent

- Flow through a pipe, Proc. of the Royal Society of London, A, Vol. 223, No. 115, 1954.
- 2) Elder, J.W. : The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow, Jour. of Fluid Mech., Vol. 5, Part 4, 1959.
- 3) Fischer, H.B. : The Mechanics of Dispersion in Natural Streams, Jour. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 93, HY 6, 1967.
- 4) Sumer, B.M. : Mean Velocity and Longitudinal Dispersion of Heavy Particles in Turbulent Open-Channel Flow, Jour. of Fluid Mech., Vol. 65, Part 1, 1974.
- 5) Sumer, B.M. : Settlement of Solid Particles in Open-Channel Flow, Jour. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 103, HY 11, 1977.
- 6) Aris, R. : On the Dispersion of a Solute in a Fluid Flowing through a Tube, Proc. of the Royal Society of London, A, Vol. 235, 1956.
- 7) Sayre, W.W. : Dispersion of Silt Particles in Open Channel Flow, Jour. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 95, HY 3, 1969.
- 8) 田中雅史 : 開水路流れにおける溶質の分散過程, 農業土木学会論文集, 第 76 号, 1978.
- 9) Jobson, H.E. and W.W. Sayre : Predicting Concentration Profiles in Open Channels, Jour. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 96, HY 10, 1970.
- 10) Sarikaya, H.Z. : Numerical Model for Discrete Settling, Jour. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 103, HY 8, 1977.
- 11) 堀口孝男・富田 勇・堀江 級 : 三次元モデルによる流れと拡散の数値解析について, 第 24 回海岸工学講演会論文集, 1977.
- 12) 大西亮一 : 非定常拡散方程式の数値解法——沈降速度を考えた鉛直拡散——, 第 21 回海岸工学講演会論文集, 1974.
- 13) Kerssens, P.M.J., Ad. Prins and van L.C. Rijn : Model for Suspended Sediment Transport, Jour. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 105, HY 5, 1979.
- 14) 粟谷陽一・藤崎一裕 : 流水中における沈降性粒子の分散係数, 第 34 回年次学術講演会講演概要集, 1979.

(1980.2.8・受付)