

変断面任意形アーチの面内複合非線形性解析

GEOMETRICALLY AND MATERIALLY NONLINEAR ANALYSIS
OF NONPRISMATIC ARCHES OF ANY SHAPE

崎 山 毅*

By Takeshi SAKIYAMA

1. 序 言

アーチの面内複合非線形問題に関しては、リブアーチ橋などの面内耐荷性のより正確な把握を目的として、軸線形状の変化や非弾性域の広がりなどを考慮した面内非弾性座屈荷重や終局耐荷力などの解析が行われてきている。

対称構造を有し、対称荷重の作用を受けるアーチにおいては、軸圧縮状態を期待できない場合、曲げの影響の増大に伴って、面内非弾性分岐座屈の可能性が高くなることが知られている。このようなアーチの面内非弾性座屈に関して、Lawrence¹⁾らは、任意荷重の作用を受ける扁平な円弧アーチの解析法を提示し、水圧荷重作用下での扁平な固定アーチにおける対称座屈の可能性などを明らかにしている。Harries²⁾は、アーチの変形状態におけるつり合い方程式に数値積分法を適用し、反復収れんの方法に基づいて、アーチ軸線の変形および非弾性域の広がりを考慮のうえ、矩形断面および薄肉円管断面を有する2ヒンジアーチの非弾性分岐座屈荷重および終局耐荷力の解析を行っている。また、倉西³⁾らは、Harriesと同様の解析手法により、軸線変形および非弾性域の広がりとともに、残留応力やひずみ硬化の影響をも考慮して、矩形断面およびサンドイッチ断面を有する2ヒンジ放物線アーチの終局耐荷力を解析している。新家^{4),5)}らは、伝達マトリックス法に基づいて、軸線変形、非弾性域の広がり、ひずみ硬化、軸線初期不整、残留応力などの影響を考慮した、面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析法を提示し、箱型断面を有する放物線アーチに関する数値解析結果から、上記の諸要因がアーチの面内耐荷性に及ぼす影響を論ずるとともに、模型実験により、解析理論の妥当性の検証を行っている。さらに、小松⁶⁾らは、文献5)の解析手法を用いて、箱型断面を有する放

物線形の2ヒンジアーチ、および固定アーチの面内耐荷力解析を行い、多くの数値解析結果に基づいて、アーチの安定照査式の提案を行っている。また、倉西⁷⁾らは、側方荷重の影響を考慮して、立体構造物としての2ヒンジ鋼アーチの面内極限強度解析を行っている。これらの複合非線形問題に関する研究のほかに、山崎⁸⁾らは、微小変形の前提のもとに非弾性域の広がりを考慮した円弧アーチの弾塑性解析を行っており、また、前田⁹⁾らは、軸線変形の影響を考慮した、任意形2ヒンジアーチの塑性崩壊荷重の算定法を提示している。

実橋においては、合理的設計の観点から、応力分布に対応して、部材軸方向に断面や鋼種を変化させることが多い。このような広義の変断面アーチに関しては、断面や鋼種が段階的に変化する場合の面内耐荷力を解析した岡部¹⁰⁾らの研究がある。また、小松¹¹⁾らは変断面アーチを平均断面および平均材料強度を有する仮想一様断面アーチに置換することを前提とした耐荷力近似算定法を提示し、実際の設計で用いられる断面変化や鋼種変化の程度であれば、この方法により実用上十分の精度で耐荷力を求めることができることを示した。

アーチの複合非線形解析問題は、荷重の漸増に伴う、アーチ軸線の曲率変化および部材断面の塑性域の生成、拡大による剛性変化のために、結局、任意形変断面アーチの解析問題に帰着される。塑性域の拡大に伴う剛性変化は、荷重の増加とともにその程度が増大し、特に、曲げの影響を強く受けるアーチにおいては、非弾性分岐座屈点や、非弾性安定限界点付近などの極限状態において、いわゆる、極端な変断面をもつ場合の解析が必要になる。このような極端な変断面アーチの均質一様断面をもつ等価置換系へのモデル化に際しては、経験的な裏付けのある技術的な判断が必要であると考えられる。したがって、極端な剛性変化や曲率変化などをもつ場合をも含めた任意形変断面アーチの複合非線形解析を平易にするための一方法として、等価置換系へのモデル化なし

* 正会員 工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科

に、任意変断面部材を解析上そのまま直接的に取り扱
うことができる解法が望まれるが、今までのところその
ような解法は提示されていないようである。

本文は、軸圧縮状態を期待できない任意の軸線形、お
よび変断面を有するアーチの任意荷重に対する複合非線
形性の一解析法を提示し、2ヒンジパイプアーチの面内
耐荷性、変断面アーチおよび非対称形アーチの複合非線
形性などについて論じたものである。

なお、本論文においては、リブアーチ橋におけるアー
チ部材などのように、十分細長いアーチの面内挙動に対
象として、解析上、次の仮定を設けることとする。

- ① 直応力に比してせん断応力は無視し得る程度に小
さく、せん断変形は無視できる（せん断応力、せん
断変形無視）。
- ② 軸ひずみは1に比して十分小さい（小ひずみ）。
- ③ 非弾性域が生じた後も断面は平面を保持する（平
面保持）。

2. 基礎方程式

アーチリブ自重や床版、床組などの死荷重などのごと
く、アーチ軸の変形後も荷重方向が変化しない、重力に
基づく荷重を受ける変断面任意形アーチの変形状態で
の力のつり合い条件に基づいて、アーチの幾何学的およ
び材料的非線形性解析における増分形平衡方程式が求め
られる。

第 n 荷重増分段階にあるアーチに関して、部材軸座標
を s とし、曲率を $1/R$ 、アーチ軸接線傾斜角を ϕ 、法
線および接線方向荷重強度を p および q 、分布モー
メント荷重強度を m とする。また、アーチ部材任意断面
のせん断力、軸力および曲げモーメントを、 Q 、 N およ
び M とすれば、荷重増分 Δp 、 Δq 、 Δm が付加された、
第 $(n+1)$ 荷重増分段階における曲率、アーチ軸接線
傾斜角、荷重強度および断面力は、それぞれ、 $(1/R +$
 $d\Delta\theta/ds)/(1 + \Delta\epsilon_0)$ 、 $\phi - \Delta\theta$ 、 $p + \Delta p$ 、 $q + \Delta q$ 、 $m + \Delta m$ 、 $Q +$
 ΔQ 、 $N + \Delta N$ 、 $M + \Delta M$ となる。このとき、第 n 段階を
基準とした変位増分、すなわち、たわみ角増分、接線方
向変位増分、法線方向変位増分を、 $\Delta\theta$ 、 Δw 、 Δu とす
れば、荷重増分 Δp 、 Δq 、 Δm に対する断面力増分 ΔQ 、
 ΔN 、 ΔM を規定する増分形平衡方程式¹⁾は次の各式に
て与えられる。

$$\frac{d\Delta Q}{ds} + \frac{\Delta N}{R} + N \frac{d\Delta\theta}{ds} - q\Delta\theta + (\Delta p + \Delta p_c) = 0 \dots\dots\dots(1 \cdot a)$$

$$\frac{d\Delta N}{ds} - \frac{\Delta Q}{R} - Q \frac{d\Delta\theta}{ds} + p\Delta\theta + (\Delta q + \Delta q_c) = 0 \dots\dots\dots(1 \cdot b)$$

$$\frac{d\Delta M}{ds} - \Delta Q - Q\Delta\epsilon_0 - (\Delta m + \Delta m_c) = 0 \dots\dots\dots(1 \cdot c)$$

ここに、 $\Delta\epsilon_0$ は図心の軸ひずみ増分であり、 Δp_c 、 Δq_c お
よび Δm_c は各荷重増分段階における不平衡力である。
これらは次の各式にて与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta p_c &= \Delta N \frac{d\Delta\theta}{ds} - \Delta q\Delta\theta + (p + \Delta p)(\cos \Delta\theta - 1) \\ &\quad - (q + \Delta q)(\sin \Delta\theta - \Delta\theta) \\ \Delta q_c &= -\Delta Q \frac{d\Delta\theta}{ds} + \Delta p\Delta\theta + (p + \Delta p)(\sin \Delta\theta - \Delta\theta) \\ &\quad + (q + \Delta q)(\cos \Delta\theta - 1) \\ \Delta m_c &= \Delta Q\Delta\epsilon_0 \end{aligned}$$

次に、小ひずみ、平面保持およびせん断変形無視の仮
定のもとに、各荷重増分段階における材料非線形性を考
慮した断面力と変形との関係が導かれる。

アーチ軸任意点における軸ひずみ $\Delta\epsilon_0$ および曲率変化
 $\Delta\kappa$ は、 $\Delta\epsilon_0 \ll 1$ なる場合、次の各式にて与えられる。

$$\Delta\epsilon_0 = \frac{d\Delta w}{ds} - \frac{\Delta u}{R} \dots\dots\dots(2 \cdot a)$$

$$\Delta\kappa = \frac{d\Delta\theta}{ds} - \frac{\Delta\epsilon_0}{R} \dots\dots\dots(2 \cdot b)$$

また、断面の平面保持の仮定により、断面内任意点の軸
ひずみ $\Delta\epsilon$ は、図心からの距離を y として、

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_0 + \Delta\kappa y$$

にて与えられるゆえ、材料の応力ひずみ曲線における接
線係数を E_t とすれば、軸力増分 ΔN および曲げモー
メント増分 ΔM は次の各式にて表わされることになる。

$$\Delta N = \int \Delta\sigma dA = \int E_t \Delta\epsilon dA = \beta EA \Delta\epsilon_0 + r \frac{EI}{L} \Delta\kappa \dots\dots\dots(2 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} \Delta M &= -\int \Delta\sigma y dA = -\int E_t \Delta\epsilon y dA \\ &= -r \frac{EI}{L} \Delta\epsilon_0 - \alpha EI \Delta\kappa \dots\dots\dots(2 \cdot d) \end{aligned}$$

ここに、 α 、 β 、 r は、弾性定数、断面2次モーメント、
断面積およびアーチ支間を、それぞれ、 E 、 I 、 A およ
び L として次の各式にて定義される。

$$\alpha = \frac{\int E_t y^2 dA}{EI} \dots\dots\dots(2 \cdot e)$$

$$\beta = \frac{\int E_t dA}{EA} \dots\dots\dots(2 \cdot f)$$

$$r = \frac{L \int E_t y dA}{EI} \dots\dots\dots(2 \cdot g)$$

α および β は、断面内の非弾性域の拡大に伴う部材の
曲げ剛性 EI 、および伸び剛性 EA の低下率を表わす。
また、 r は非弾性域の発生に伴って生じる断面1次モー
メントパラメーターである。なお、弾性状態において
は、 $\alpha = \beta = 1$ 、 $r = 0$ であるゆえ、

$$\Delta N = EA \Delta \epsilon_0 = EA \left(\frac{d\Delta w}{ds} - \frac{\Delta u}{R} \right)$$

$$\Delta M = -EI \Delta \kappa = -EI \left(\frac{d\Delta \theta}{ds} - \frac{\Delta \epsilon_0}{R} \right)$$

なる関係が成立する。

また、せん断変形を無視した場合、たわみ角増分 $\Delta \theta$ と接線、法線方向変位 $\Delta w, \Delta u$ との間には次の関係が成立する。

$$\Delta \theta = \frac{d\Delta u}{ds} + \frac{\Delta w}{R} \dots\dots\dots (2 \cdot h)$$

増分形基礎方程式 (1・a)~(1・c) および (2・a)~(2・h) を用いて、アーチ軸線形状の変化に基づく幾何学的非線形性、および断面の一部非弾性化に基づく材料非線形性を考慮した変断面任意形アーチの複合非線形解析が行われる。

3. 非弾性域の拡大に伴う剛性変化

断面内の非弾性域の拡大に伴う部材の曲げ剛性、および伸び剛性の低下率 α および β と非弾性域の発生に伴って生じる断面1次モーメントパラメーター τ とは断面細分割法によって算定される。

残留軸ひずみ ϵ_r と新たな軸ひずみは重ね合わせることができるものとすれば、アーチ軸の軸ひずみ ϵ_0 および曲率変化 κ を用いて、断面内任意微小面積要素の軸ひずみ ϵ は次式にて表わされることになる。

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_0 + \kappa y \dots\dots\dots (3)$$

ここに、図心の軸ひずみ ϵ_0 および曲率変化 κ は、荷重増分の第1段階から現段階までの軸ひずみ増分 $\Delta \epsilon_0$ および曲率変化増分 $\Delta \kappa$ の和として、

$$\epsilon_0 = \sum \Delta \epsilon_0, \quad \kappa = \sum \Delta \kappa$$

にて与えられる。

式 (3) により断面内の任意微小面積要素の軸ひずみが求められれば、これに対応する応力ひずみ曲線の接線係数 E_t を用いて、係数 α, β, τ の値が算定される。

応力ひずみ関係としては、せん

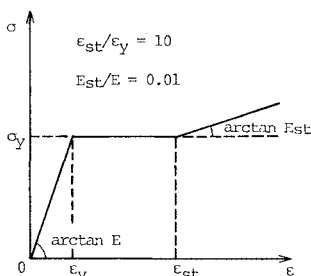


Fig. 1 Stress-Strain Curve.

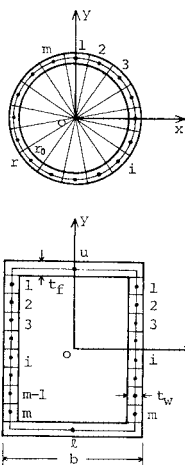


Fig. 2 Pipe Section and Box Section.

断応力無視の仮定により、一軸応力状態での任意の関係を直接的に用いることができる。本論文においては、Fig. 1 に示すとき関係を用いて数値解析を行うこととする。

次に、Fig. 2 に示すように、薄肉円管断面、および薄肉箱型断面に関する α, β, τ の算式を示す。

(1) 薄肉円管断面

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \bar{E}_i \left[\frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cos \frac{2\pi}{m} (i-1) \right]$$

$$\beta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{E}_i$$

$$\tau = \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{AL^2}{I}} \sum_{i=1}^m \bar{E}_i \sin \frac{\pi}{m} \cos \frac{2\pi}{m} (i-1)$$

(2) 薄肉箱型断面

$$\alpha = \left\{ 3(\bar{E}_u + \bar{E}_l) + 2 \frac{h}{b} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{E}_i}{m} \cdot \left[\frac{1}{m^2} + 3 \left(1 - \frac{2i-1}{m} \right)^2 \right] \right\} / f_1$$

$$\beta = \left\{ (\bar{E}_u + \bar{E}_l) + 2 \frac{h}{b} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{E}_i}{m} \right\} / f_2$$

$$\tau = \sqrt{3 \frac{f_1}{f_2} \frac{AL^2}{I}} \left\{ (\bar{E}_u - \bar{E}_l) + 2 \frac{h}{b} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{E}_i}{m} \cdot \left(1 - \frac{2i-1}{m} \right) \right\} / f_1$$

$$f_1 = 2(3+h/b), \quad f_2 = 2(1+h/b)$$

ここに、 \bar{E}_i は第 i 微小面積要素に関する接線係数 E_t と弾性定数 E との比である。

4. 離散的な一般解

変断面任意形アーチの複合非線形解析における基礎方程式 (1・a)~(1・c) および (2・a)~(2・h) は、変数係数の連立微分方程式であり、その解析解を一般的に求めることはほとんど不可能であると判断される。したがって、本論文においては、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、アーチ軸等分点あるいはアーチ支間等分点に対応するアーチ軸分割点に関する、基礎微分方程式の離散的な一般解を求めることとする。なお、以下の所論は文献 11) のそれと基本的には同じであるので、要点のみを記す。詳細は文献 11) を参照されたい。

アーチ軸長、アーチ支間、基準断面 2 次モーメントおよび基準断面積をそれぞれ l, L, I_0 , および A_0 として、

$$X_1 = -L^2 \Delta Q / EI_0, \quad X_2 = -L^2 \Delta N / EI_0,$$

$$X_3 = -L \Delta M / EI_0, \quad X_4 = \Delta \theta, \quad X_5 = \Delta w / L,$$

$$X_6 = \Delta u / L, \quad \eta = s / l$$

なる無次元量 X_t および無次元座標 η を導入すれば、基礎方程式 (1・a)~(1・c) および (2・a)~(2・h) は、次のごとく整理縮小される。

$$\frac{dX_t}{d\eta} = \nu \sum_{k=1}^7 G_{tk} X_k \quad (t=1\sim 6, X_7=1) \quad \dots\dots (4)$$

ここに、 $\nu=l/L$ 。係数 G_{tk} の内容は本文末の Appendix I に示すとおりである。

Fig. 3 に示すごとく、アーチ軸を m 等分した場合の分割点 i における X_t の離散的一般解 $X_{ti}^{(1)}$ は次式となる。

$$X_{ti} = \sum_{n=1}^7 d_{tni} X_{n0} \quad (i=1\sim m, X_{70}=1) \quad \dots\dots (5)$$

ここに、 X_{n0} ：左支点の状態量を表わす積分定数

$$d_{tni} = \delta_{ni} + \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^7 \beta_{ij} G_{tkj} \bar{d}_{knj}$$

$$\bar{d}_{mj} = \delta_{mj}, \beta_{ij} = \alpha_{ij}/24m$$

δ_{ni} ：Kronecker delta

係数 β_{ij} は数値積分法における重み係数である。Simpson の多分割数値積分法を用いた場合の α_{ij} 値を本文末の Appendix II に示す。

アーチ軸座標 η に対して、アーチ支間の水平軸座標を ζ ($0 \leq \zeta \leq 1$) とすれば、両者の間には、アーチ軸の接線傾斜角 ϕ を介して、 $d\zeta = \nu \cos \phi \cdot d\eta$ なる関係が存在する。この関係式を用いて式 (4) を書き換えれば次式が得られる。

$$\frac{dX_t}{d\zeta} = \nu \sum_{k=1}^7 \bar{G}_{tk} X_k \quad (t=1\sim 6, X_7=1) \quad \dots\dots (6)$$

ここに、 $\bar{G}_{tk} = \nu \cos \phi G_{tk}$ である。

したがって、Fig. 4 に示すごとき、アーチ支間の水平軸 m 等分点に対応するアーチ軸分割点 i における X_t の離散的一般解 X_{ti} は次式にて与えられることとなる。

$$X_{ti} = \sum_{n=1}^7 \bar{d}_{tni} X_{n0} \quad (i=1\sim m, X_{70}=1) \quad \dots\dots (7)$$

ここに、

$$\bar{d}_{tni} = \delta_{ni} + \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^7 \beta_{ij} \bar{G}_{tkj} \bar{d}_{knj}$$



Fig. 3 Discrete Points on Arch Axis.

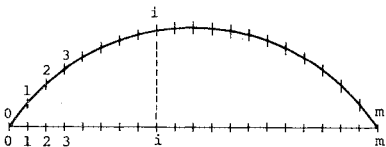


Fig. 4 Discrete Points on Arch Axis.

なお、無次元量 X_t を用いれば、図心の軸ひずみ $\Delta \epsilon_0$ 、および無次元化された曲率変化 $L \Delta \kappa$ を与える式として式 (2・c) および (2・d) より次の2式が得られる。

$$\Delta \epsilon_0 = -\delta_1 X_2 - \delta_2 X_3 \quad \dots\dots (8 \cdot a)$$

$$L \Delta \kappa = \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 \quad \dots\dots (8 \cdot b)$$

ここに、

$$\delta_1 = \frac{\alpha}{\delta_0}, \delta_2 = \frac{\gamma}{\delta_0}, \delta_3 = \frac{\beta a^2 \frac{A}{A_0} \frac{I_0}{I}}{\delta_0}$$

$$\delta_0 = \alpha \beta a^2 \frac{A}{A_0} - r^2 \frac{I}{I_0}, a^2 = \frac{A_0 L^2}{I_0}$$

5. 数値解析

(1) 解法の実用性の検証

基礎微分方程式の離散的一般解に基づく本解析法の既往解法と比較した場合の計算手法としての特長については、文献11)に記したとおりであるので、ここでは重複を避け、本解析法の複合非線形問題への応用性についてのみ検討を行うこととする。

a) 解の収束性

アーチの面内複合非線形解析における、離散的な一般解に基づく本解析法の数値解の収束性の検証を目的として、荷重比 $p_t/p=0.1$ の非対称荷重を受ける、細長比 $a=200$ 、材料定数 $E/\sigma_y=875$ 、拱矢比 $f/L=0.2$ 、0.5 の薄肉円管断面を有する2ヒンジ放物線アーチの荷重変位曲線を Fig. 5 に示す。横軸 u_c/L はアーチクラウンの無次元化された鉛直変位である。また、 m はアーチ支間水平軸の等分数である。

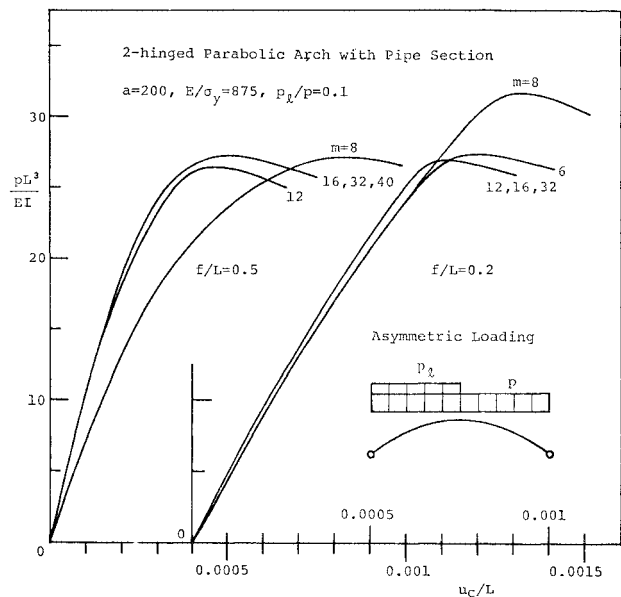


Fig. 5 Load-Deflection Curves.

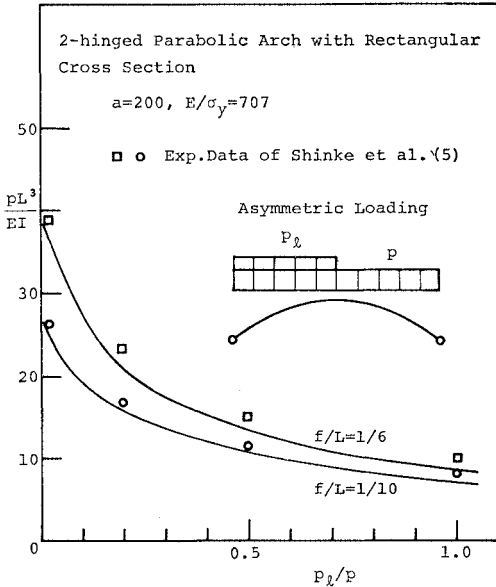


Fig. 6 A Comparison between Experimental Results and Theoretical Ones.

これらによれば、アーチ軸曲率の軸長方向の変化が大きい $f/L=0.5$ の高ライズアーチにおいても、分割数 $m=16$ で十分収束した解が得られることがわかる。

なお、以下の数値解析は、非弾性域分布の算定のために分割を細かくし、 $m=32$ として行っている。

b) 耐荷力実験結果との比較

本解析法による理論解の有用性を明らかにするために、新家⁵⁾らの実験値と本理論値との比較を行う。

Fig. 6 は、細長比 $a=200$ 、材料定数 $E/\sigma_y=707$ 、拱天比 $f/L=1/6, 1/10$ の非対称荷重を受ける、矩形断面 2 ヒンジ放物線アーチの面内耐荷力 PL^3/EI と荷重比 p_L/p との関係を示すものである。

本理論値と既往実験値との良好な一致が認められる。

(2) 2 ヒンジパイプアーチの面内耐荷性

Fig. 7 に示すとき Deck Load を受ける放物線アーチ、Rib Load を受けるカテナリーアーチ、あるいは Radial Load を受ける円弧アーチなどのように、軸圧縮状態の形成により、ほぼ完全なアーチ作用が期待できる細長いアーチの面内耐荷力は、通常、弾性分岐座屈荷重に支配され、簡単に線形座屈理論により解析することが可能であるが、軸力のほかに曲げモーメントを発生させる一般的な荷重に対する面内耐荷力は、アーチ軸線形状の変化に

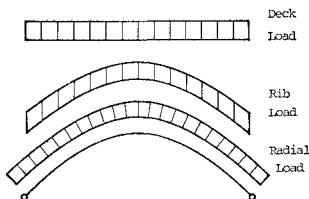


Fig. 7 Deck Load, Rib Load and Radial Load.

伴う幾何学的非線形性と材料の非弾性化、および非弾性域の拡大に起因する材料非線形性を考慮して、複合非線形問題として解析する必要がある。本節においては変断面任意形アーチの複合非線形解析法を応用して、薄肉円管断面を有する、円形および放物線形の 2 ヒンジパイプアーチの Deck Load、および非対称荷重に対する面内耐荷性を解析する。

Fig. 8 (a) および (b) は、細長比 $a=200$ 、材料定数 $E/\sigma_y=875$ の円形および放物線形の 2 ヒンジパイプアーチの荷重変位曲線である。これらの荷重変位曲線において、|印は非弾性域形成開始点を表わし、●印は非弾性分岐座屈点を表わしている。また、■印は、ヒンジ支点に隣接するパイプアーチの両端断面が軸圧縮力によって全断面一挙に非弾性化する点を表わす。なお、本文においては、■点に対応する荷重を端断面全塑性荷重と称することとする。また、○印は弾性分岐座屈点であ

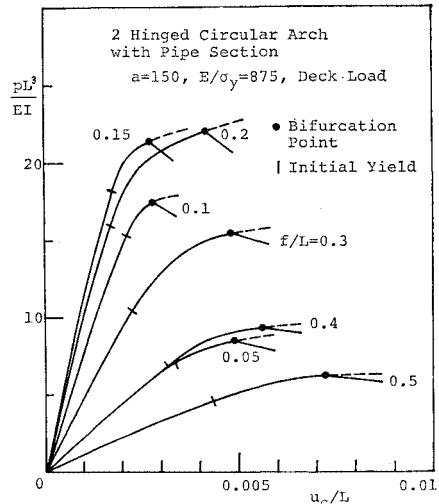


Fig. 8 (a) Load-Deflection Curves.

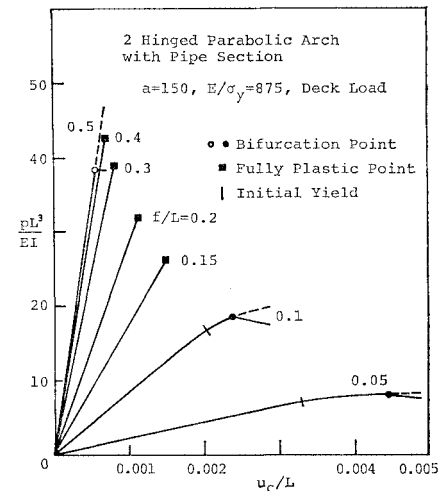


Fig. 8 (b) Load-Deflection Curves.

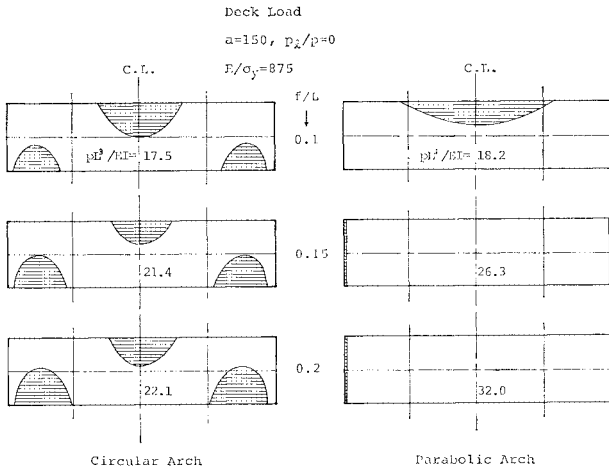


Fig. 9 Distribution of Plastic Zone of 2-hinged Pipe Arch.

る。これらの2図によれば、Deck Loadのような対称荷重に対する2ヒンジパイプアーチの面内耐荷力は、弾性分岐座屈荷重によって決まる場合のほか、非弾性分岐座屈荷重あるいは端断面全塑性荷重によって決まる場合が多いことが明らかである。

なお、これらの限界荷重に到達する直前におけるパイプアーチの非弾性域の深さ分布は Fig. 9 に示すとおりである。

次に、Fig. 10 (a) および (b) に、種々の細長比 a を有する拱矢比 $f/L=0.05\sim 0.5$ なる円形、および放物線形の2ヒンジパイプアーチの Deck Load に対する面内耐荷力を示す。点線は、線形座屈理論による弾性解である。円弧アーチの耐荷力は、ほとんどの場合、非弾性分岐座屈荷重に支配されるが、細長比 $a=100$ のためのアーチにおいては、拱矢比 $f/L=0.1, 0.15, 0.2$ の

各場合、端断面全塑性荷重によって耐荷力が決まることが示されている。また、円弧アーチにおいては、弾性分岐座屈は細長比 a が極めて大きく、拱矢比 f/L が小さい場合にのみ生じることがわかる。一方、放物線アーチにおいては、細長比 a が200程度以上の場合、面内耐荷力は、ほとんど弾性分岐座屈荷重に支配されるが、細長比が小さくなるにつれて、端断面全塑性荷重あるいは非弾性分岐座屈荷重によって耐荷力が決定されることが示されている。

Fig. 11 (a) および (b) は、それぞれ、円弧アーチおよび放物線アーチに関する弾性分岐座屈荷重、非弾性分岐座屈荷重あるいは端断面全塑性荷重などの限界荷重到達時の2ヒンジパイプアーチの限界水平反力 HL^2/EI と拱矢比 f/L との関係を示すものである。点線は鋼道路橋示方書により与えられる限界水平反力曲線である。アーチの耐荷力が弾性分岐座屈荷重によって決まる場合には、示方書の値は実用的な限界水平反力を与えるが、それ以外の場合には、危険側の限界水平反力を与えることが示されている。

Fig. 12 は、荷重比 $p_1/p=0, 0.1, 0.2, 0.4$ の非対称荷重を受ける拱矢比 $f/L=0.15$ の円形、および放物線形の2ヒンジパイプアーチの荷重変位曲線である。非対称荷重に対する面内耐荷力は対称荷重に対する場合とは異なり、非弾性安定限界荷重によって決まることが示されている。なお、これらの安定限界荷重に到達する直前におけるパイプアーチの非弾性域の深さ分布は Fig. 13 に示すとおりである。

Fig. 14 は、拱矢比 $f/L=0.05\sim 0.5$ の放物線アーチ、および円弧アーチに関する非対称荷重に対する面内

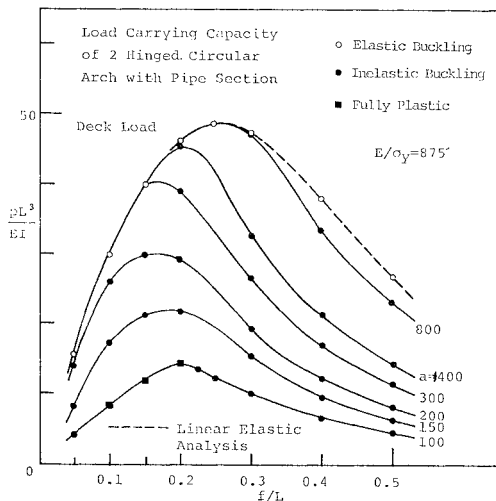


Fig. 10 (a) Load Carrying Capacity of 2-hinged Circular Arch with Pipe Section.

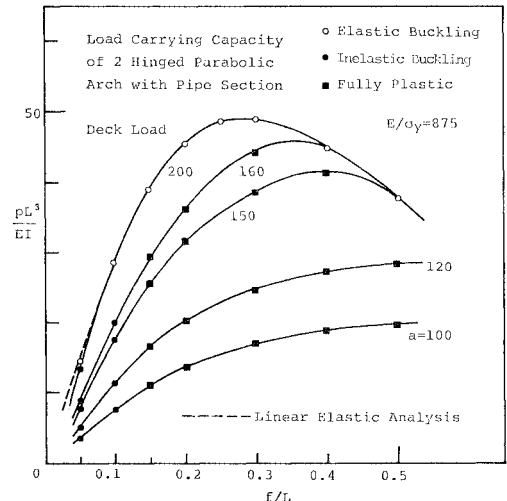


Fig. 10 (b) Load Carrying Capacity of 2-hinged Parabolic Arch with Pipe Section.

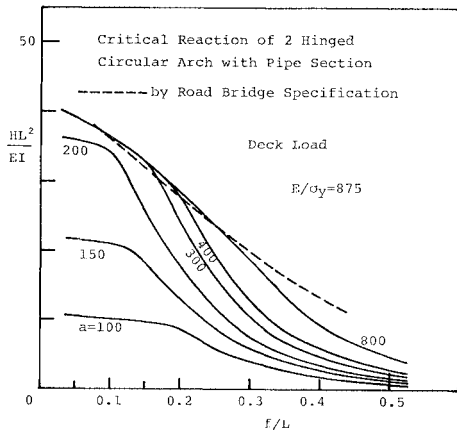


Fig. 11 (a) Critical Reaction of 2-hinged Circular Arch with Pipe Section.

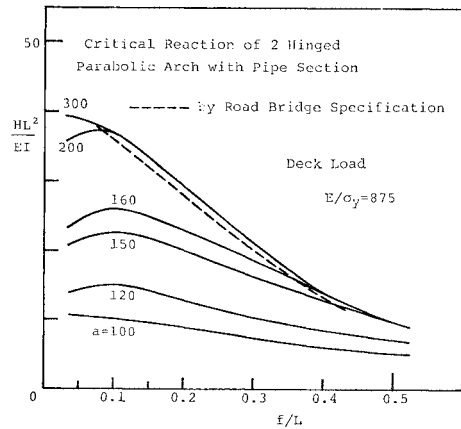


Fig. 11 (b) Critical Reaction of 2-hinged Parabolic Arch with Pipe Section.

耐荷力曲線である。拱矢比 f/L が 0.15 程度以下の場合には、放物線アーチと円弧アーチの非対称荷重に対する耐荷性にはほとんど差は認められないが、高ライズアーチにおいては放物線アーチの耐荷性が優れている。これは、Deck Load によって放物線アーチに形成される軸圧縮状態が半載荷重による非対称変形に抵抗する働きを有し、面内安定性に寄与するためと考えられる。

(3) 変断面アーチの複合非線形性

長大支間を有する変断面アーチ実橋の複合非線形性の把握のために、天草 5 号橋 (松島橋)¹²⁾ の挙動解析を行った。

松島橋は橋長 126 m、アーチ支間長 $l=119$ m の 2 ヒンジパイプアーチ橋で、その全体的形状は Fig. 15 に示すとおりである。完成時のアーチ軸線は円弧形状となるよう設計、架設されている。松島橋における拱矢比 f/L 、アーチ半開角 α および軸長支間長比 l/L は、それぞれ次のとおりである。

$$f/L=0.1261, \alpha=0.49393, l/L=1.0419$$

アーチ部材は薄肉円管断面をもち、断面外径は 185 cm の一定値であるが、不連続的な肉厚変化により部材軸方向に断面 2 次モーメント、および断面積は Table 1 に示すとおり段階的に変化する。左端一様部分の断面 2 次モーメントおよび断面積を基準量にとれば、 $I_0=2.926 \times 10^6 \text{ cm}^4$ 、 $A_0=6.929 \times 10^2 \text{ cm}^2$ となる。したがって、本変断面アーチの細長比 a は 183 である。

松島橋のアーチリブ 1 本についての面内耐荷力の検討を行った。Fig. 16 に Deck Load p と半載等荷重 p_l とから成る非対称荷重作用時の荷重比 $p_l/p=0, 0.1, 0.2, 0.4$ の各場合についての荷重変位曲線を示す。点線は、左端一様部分と同一の断面を有する一様断面アーチの荷重変位曲線である。荷重比 $p_l/p=0$ の場合、す

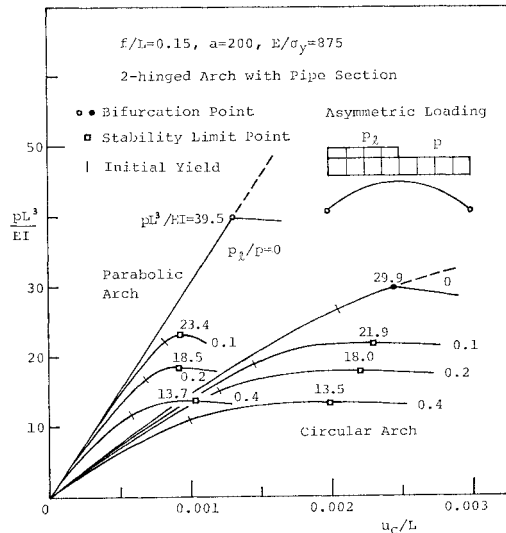


Fig. 12 Load-Deflection Curves.

Table 1 Moment of Inertia of Area and Cross Sectional Area.

part ($\times L$)	$I (\times 10^6)$ (cm^4)	$A (\times 10^2)$ (cm^2)	I_0/I	A_0/A
0 ~ 0.089	2.926	6.929	1.0000	1.0000
0.089 ~ 0.167	3.403	8.075	0.8598	0.8581
0.167 ~ 0.243	3.640	8.647	0.8038	0.8013
0.243 ~ 0.317	3.876	9.219	0.7549	0.7516
0.317 ~ 0.391	3.640	8.647	0.8083	0.8013
0.391 ~ 0.464	3.403	8.075	0.8598	0.8581
0.464 ~ 0.536	3.165	7.502	0.9245	0.9236

なわち、Deck Load が作用する場合の非弾性分岐座屈荷重は $pL^3/EI_0=28.2$ であり、荷重比 $p_l/p=0.1, 0.2, 0.4$ の各場合の非弾性安定限界荷重は、それぞれ $pL^3/EI_0=21.1, 17.2, 12.8$ である。一方、一様断面アーチの非弾性分岐座屈荷重および非弾性安定限界荷重は、それぞれ $pL^3/EI_0=27.0, 19.4, 111.9$ であり、アーチ軸 1/4 点付近を中心とした薄肉円管断面の肉厚の増加により、

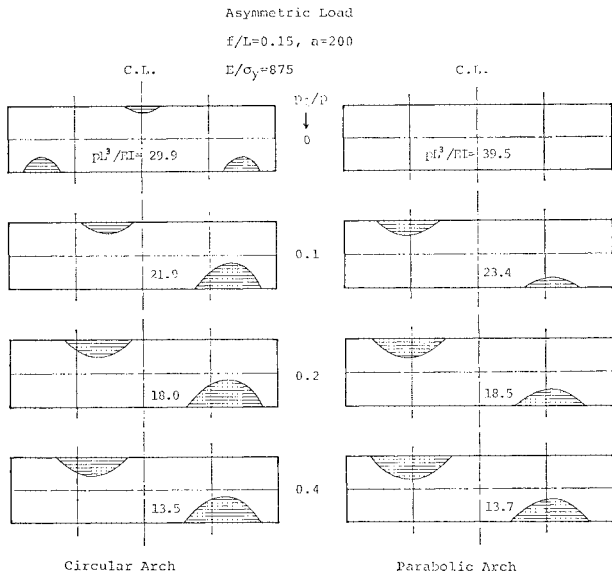


Fig. 13 Distribution of Plastic Zone of 2-hinged Pipe Arch.

松島橋アーチリブの面内耐荷力は、大略、1割程度高められているものと判断される。

Fig. 17 は、材料非線形性を考慮した場合（実線）と無視した場合（点線）の荷重変位曲線である。弾性分岐

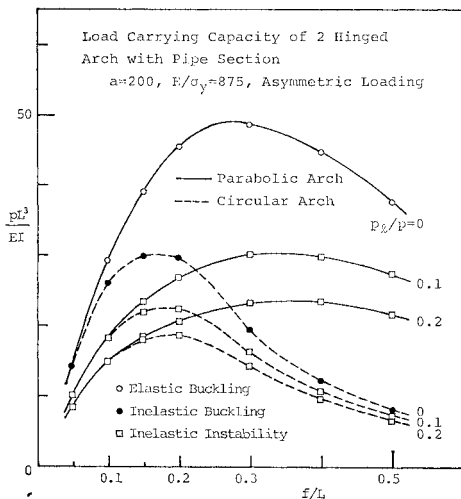


Fig. 14 Load Carrying Capacity of 2-hinged Arch with Pipe Section.

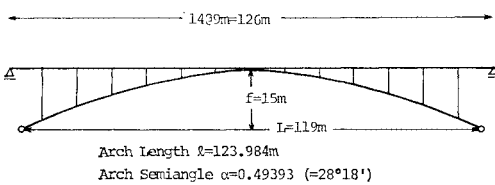


Fig. 15 MATSUSHIMA Bridge.

座屈荷重は $pL^3/EI_0=42.9$ であり、非弾性分岐座屈荷重は $pL^3/EI_0=28.2$ であるゆえ、本アーチの Deck Load に対する面内耐荷力は、材料の一部非弾性化によって、弾性分岐座屈荷重よりも 35% 程度低くなることがわかる。また、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、 $I_0=2.926 \times 10^8 \text{ cm}^4$ 、 $A_0=6.929 \times 10^2 \text{ cm}^2$ として換算すれば、弾性および非弾性の分岐座屈荷重に対応する限界水平反力 H_{cr} は、

$$pL^3/EI_0=42.9 \text{ のとき } H_{cr} \approx 1850 \text{ t}$$

$$pL^3/EI_0=28.2 \text{ のとき } H_{cr} \approx 1220 \text{ t}$$

となる。一方、本アーチリブの設計最大水平反力は、 $H_{max}=581 \text{ t}$ とされていることから、アーチリブの弾性および非弾性の分岐座屈に対する安全率は、それぞれ 3 および 2 程度であると判断される。

(4) 非対称アーチの複合非線形性

雲海橋（高千穂町）などにみられるような非対称形の軸線を有するアーチの複合非線形性を解析し、対称形アーチとの面内耐荷力の比較を行った。

Fig. 18 は、薄肉円管断面を有する非対称形の 2 ヒンジ放物線アーチに、荷重比 $p_1/p=0, 0.1, 0.2, 0.4$ なる非対称荷重が作用した場合の荷重変位曲線である。左右のヒンジ支承の高低差を h として、 $h/L=0, 0.1, 0.3$ の場合の結果を示す。横軸の変位量 θ_0 はアーチ軸左端におけるたわみ角を表わしている。

非対称アーチの耐荷力は、非対称荷重を受ける場合と同様、Deck Load ($p_1/p=0$) を受ける場合にも非弾性安定限界荷重によって決まることが示されている。なお、

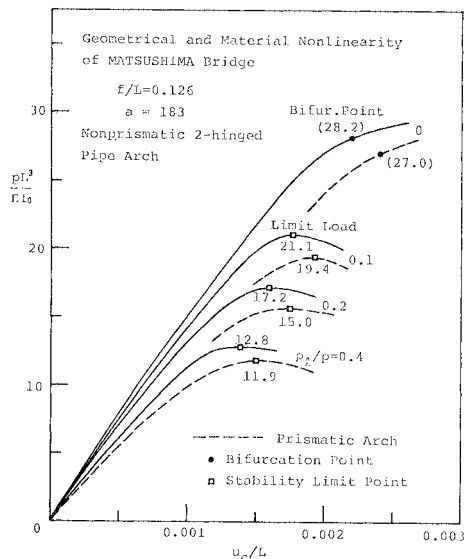


Fig. 16 Geometrical and Material Nonlinearity of MATSUSHIMA Bridge

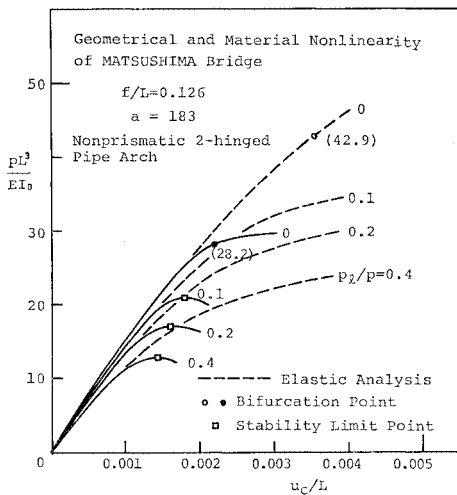


Fig. 17 Inelastic Load-Deflection Curves of MATSUSHIMA Bridge.

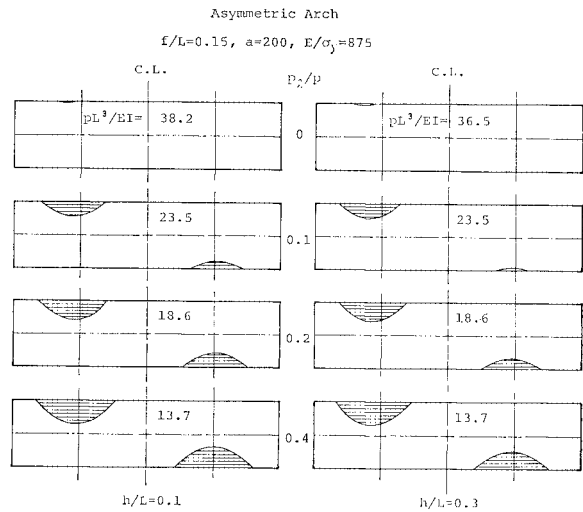


Fig. 19 Distribution of Plastic Zone of 2-hinged Pipe Arch.

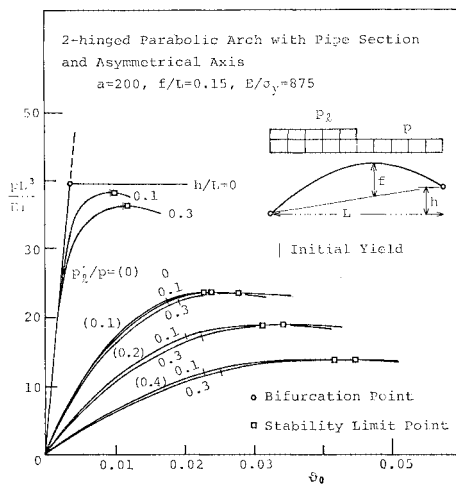


Fig. 18 Load-Deflection Curves.

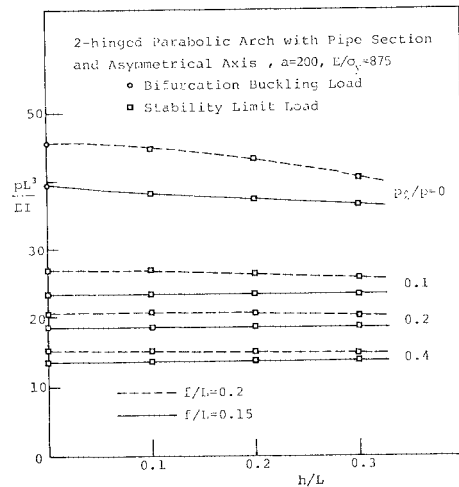


Fig. 20 Load Carrying Capacity of Asymmetric Arch.

Deck Load を受ける 非対称アーチにおいては、非弾性域の発生直後に安定限界点に達しているが、荷重比 p_1/p の増大とともに、初期降伏点から安定限界点までの間隔は長くなっている。これらの安定限界点到達直前における非弾性域の深さ分布は Fig. 19 に示すとおりである。

次に、アーチの非対称性の度合を示す左右支承の高低差比 h/L と耐荷力 pL^3/EI との関係を示す。非対称形アーチの Deck Load に対する耐荷性は、高低差比 h/L の増大とともに低下する傾向が見受けられるが、非対称荷重に対する耐荷性は、同一拱矢比 f/L を有する対称形アーチの場合とほとんど変わらないことが認められる。

6. 結 語

変断面任意形アーチの複合非線形解析法として、増分形基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく直接的かつ半解析的な解法を提示し、2 ヒンジパイプアーチ、変断面アーチ、および非対称形アーチの複合非線形性、および面内耐荷性を解析した。本解析法においては、せん断応力およびせん断変形無視、小ひずみ、平面保持を仮定した。また、材料非線形性の解析にあたって、任意の応力ひずみ関係を取り扱えるようにした。なお、残留ひずみと荷重により生じる新たなひずみとの間に重ね合わせが成立するものと仮定すれば、面内耐荷性に及ぼす残留応力の影響を解析することも可能である。

得られた主要な結果は次のとおりである。

(1) 増分形基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく本解析法により、置換系などにモデル化することなしに、変断面任意形アーチの複合非線形性および面内耐荷性を直接的に解析することができる。

(2) Deck Load を受ける放物線アーチなどのように、軸圧縮状態が形成され、完全なアーチ作用を期待できるアーチの面内耐荷力は、通常、弾性分岐座屈荷重によって決まることが知られているが、Deck Load を受ける円弧アーチなどのように曲げを生ぜしめる対称荷重に対するアーチの耐荷力は非弾性分岐座屈荷重によって決定される場合が多いようである。また、非対称荷重などのように、非対称変形を生ぜしめる荷重に対するアーチの面内耐荷力は、ほとんどの場合、非弾性安定限界荷重に支配されると考えられる。なお、比較的小さな細長比を有するアーチにおいては、軸圧縮状態が形成される場合、弾性分岐座屈が生じる前に両端支承の隣接断面が軸力によって全断面一挙に非弾性化する崩壊形式があることが数値解析上確かめられた。

(3) 左右支点間に高低差のある非対称アーチの面内耐荷力は、ほとんどの場合、非弾性安定限界荷重によって決まるようである。また、非対称荷重に対する非対称アーチの耐荷性は、左右支点間の高低差が比較的小さな範囲においては、同一拱天比を有する対称アーチの耐荷性と大差ないものと思われる。

Appendix I

$$\begin{aligned}
 G_{12} &= -r - (\delta_2 - \delta_1 r) \bar{N}, & G_{13} &= -(\delta_3 - \delta_2 r) \bar{N}, \\
 G_{14} &= -k^2 \bar{q}, & G_{17} &= k^2 (\Delta \bar{p} + \Delta \bar{p}_c) \\
 G_{21} &= r, & G_{22} &= (\delta_2 - \delta_1 r) \bar{Q}, & G_{23} &= (\delta_3 - \delta_2 r) \bar{Q}, \\
 G_{24} &= k^2 \bar{p}, & G_{27} &= k^2 (\Delta \bar{q} + \Delta \bar{q}_c) \\
 G_{31} &= 1, & G_{32} &= -\delta_1 \bar{Q}, & G_{33} &= -\delta_2 \bar{Q}, \\
 G_{37} &= -K^2 (\Delta \bar{m} + \Delta \bar{m}_c) \\
 G_{42} &= \delta_2 - \delta_1 r, & G_{43} &= \delta_3 - \delta_2 r \\
 G_{52} &= -\delta_1, & G_{53} &= -\delta_2, & G_{56} &= r \\
 G_{64} &= 1, & G_{65} &= -r, & \text{other } G_{tk} &= 0 \\
 k^2 &= \Delta p_0 L^3 / EI_0, & K^2 &= \Delta m_0 L^2 / EI_0, & r &= L / R, \\
 \bar{Q} &= -L^2 Q / EI_0, & \bar{N} &= -L^2 N / EI_0, & \bar{p} &= p / \Delta p_0, \\
 \bar{q} &= q / \Delta p_0, & \Delta \bar{p} &= \Delta p / \Delta p_0, & \Delta \bar{q} &= \Delta q / \Delta p_0 \\
 \Delta \bar{m} &= \Delta m / \Delta m_0, & \Delta p_0, \Delta m_0 &: \text{基準増分荷重強度}
 \end{aligned}$$

Appendix II

重み係数 α_{ij} の値は表のとおりである。

Appendix II α_{ij} -value

i	j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	12	12								
2	8	32	8							
3	9	27	27	9						
4	8	32	16	32	8					
5	9	27	27	17	32	8				
6	8	32	16	32	16	32	8			
7	9	27	27	17	32	16	32	8		
8	8	32	16	32	16	32	16	32	8	
:										

参考文献

- Lawrence, H.N.L. and M.M. Lawrence : Inelastic Buckling of Shallow Arches, ASCE, EM 1, pp. 225 ~240, 1968.
- Harries, H. : Traglasten stählerner Zweigelenkbögen mit ausgebreiteten Fliesszonen, Stahlbau, No. 6, pp. 170~177, 1970, No. 8, pp. 248~252, 1970.
- Kuranishi, S. and Le-Wu Lu : Load Carrying Capacity of Two Hinged Steel Arches, JSCE, No. 204, pp. 129~140, 1972.
- 新家 徹・頭井 洋・波田凱夫 : アーチの面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析, 土木学会論文報告集, 第244号, pp. 57~69, 1975.
- 新家 徹・頭井 洋・波田凱夫 : アーチの面内耐荷力解析と模型実験, 土木学会論文報告集, 第263号, pp. 11 ~23, 1977.
- 小松定夫・新家 徹 : アーチの面内耐荷力の实用算定式について, 土木学会論文報告集, 第267号, pp. 39~51, 1977.
- 倉西 茂・矢吹哲哉 : 側方荷重の影響を考慮した2ヒンジ鋼アーチの面内極限強度について, 土木学会論文報告集, 第272号, pp. 1~12, 1978.
- 山崎徳也・石川信隆 : 円弧アーチの弾塑性解析, 土木学会論文集, 第158号, pp. 1~16, 1968.
- 前田幸雄・藤本一男 : 2ヒンジアーチの塑性崩壊荷重の算定について, 土木学会論文報告集, 第174号, pp. 25 ~40, 1970.
- 岡部俊三・倉西 茂 : 変断面アーチの耐荷力について, 土木学会年次学術講演会概要集, I-154, 1976.
- 崎山 毅 : 変断面任意形アーチの幾何学的非線形性解析, 土木学会論文報告集, 第289号, pp. 31~42, 1979.
- 日本道路公団福岡支社 : 工事報告「天草五橋」, 1967.

(1979.12.26・受付)