

砂のせん断時における砂粒子の移動特性

CHARACTERISTICS OF PARTICLE DISPLACEMENTS OF
SAND SUBJECTED TO SHEAR

村山 朔郎*・井上 治**

By Sakuro MURAYAMA and Osamu INOUE

1. はしがき

砂の微視的構造や砂粒子の挙動は、砂の構成特性の根源となるものであるが、まだ未知の事項が少なくない。ゆえに実験方法などを工夫して、それらの実態を実証的に解明することは構成式の研究上非常に重要である。そのため、ここではせん断中の砂における砂粒子の挙動を測ることを目的として、各砂粒子の移動距離と移動方向を測定し、その特性を解明するとともに、さきに理論的に求めた砂の構成式^{1)~3)}の誘導の際に用いた二、三の仮定を実証的に検討することとした。

砂の微視的な粒子状態を観測するための実験は、従来も種々行われてきた。観測の対象には、砂を用いた研究⁴⁾もあるが、砂粒子は形状、寸法が非常に不規則でその状態を測るには不便が多い。そのために実際の砂の代わりに、各種の直径のアルミの丸棒（小円柱）や光弾性材料からできた丸棒を積重ねた2次元積層体を用いた研究^{5)~8)}も多い。砂や丸棒の積層体について通常測定されている要素には、粒子どうしの接点における接平面の方向角（粒子接点角）がある。また光弾性材料の丸棒の積層体では、粒子間力の大きさや方向が観測されている。

せん断試験の材料に自然砂を用いるか、他材質の棒を用いるかは、試験機内の現象が実際の現象と一致しているかどうかの再現性の点にも関係がある。自然砂の場合は、材料としては問題はないが、砂と容器との間に摩擦があり、特に容器壁面付近にある砂粒子の移動は摩擦の影響を受ける。一方、他材料の棒の積層体は前後の壁がなくても自立するから、前後の容器壁から受ける摩擦の影響だけは除かれ砂の2次元模型として砂の代用に用いたこともあった⁹⁾。しかし棒の断面の寸法、形状を自然砂と同じくすることは實際上できず、また表面の性状や摩擦も砂粒子のそれらとは異なる。特に便宜的に用いら

れている円柱形の丸棒では棒相互の接点が常に円柱面上にあって、砂のような接点部近傍の不規則性を必ずしも再現しているとはいえない。両材料の試験材料としてのこのような優劣を量的に評価するにはなお研究を要するが、ここでは粒子移動における粒子の形状・寸法の不規則性を重視して、不規則な砂粒子の測定は面倒であるにもかかわらず、自然砂を用いてせん断試験を行うこととした。

砂の構成特性は、砂粒子の挙動に支配されるから、各砂粒子の挙動を直接測ることが望ましい。そのためここでは、せん断中の砂を撮影した写真中の砂粒子を実体視することにより、カメロン効果を応用して各砂粒子の移動距離と移動方向を測定した⁹⁾。この結果を解析して、砂粒子の移動量が砂のせん断ひずみに及ぼす効果、砂粒子の移動方向角と砂のダイレイタンスーとの関係、砂の弾・塑性、または破壊状態の分類などについて考察を行うとともに、さきに誘導した砂の構成式に用いた二、三の仮定を検討しその妥当性を確かめた。

2. 実体視による砂粒子の移動量測定法

(1) カメロン効果を応用した測定法

測量用語¹⁰⁾では、「実体写真上で移動した物体を実体視するとその運動のため、その物体が見かけ上視差を生じ、その物体が基準面から浮いたり、沈んだりしてみえる。これをカメロン効果 (Cameron effect) という」とある。この原理を拡張すれば、次に述べるように1台の固定したカメラで移動する物体を撮影したときにも、同様にこの効果をみることができる。すなわち、1台の固定したカメラで、カメラの光軸と直角な平面上を移動する物体を撮影すると、異なった時点で撮った2枚の写真にはその物体の位置が移動して写る。そのため、この2枚の写真を物体の移動方向が左右の眼を結んだ線（眼基線）と平行になるように並べて実体視すると、その物体

* 正会員 工博 摂南大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 摂南大学講師 工学部土木工学科

の移動距離に応じた見かけ上の視差 (false parallax) が生じる結果、その物体の像は、静止物体に対して浮かびまたは沈んで比高があるように見える。ここでは、この現象もカメロン効果の中に含ませておく。

本研究では、この拡張したカメロン効果を応用してせん断試験中の砂粒子の移動量を測定した。すなわち、せん断試験中の砂粒子の状態を透明なせん断箱側面を透して、地上に固定した1台のカメラで撮影し、各時点で撮影した写真の中の2枚に対して実体写真測量 (ここでは実体観測ということにする) の解析技法を適用して、移動した砂粒子の移動距離を測定した。ここで用いた実体観測装置は、反射式実体鏡とそれに付属の視差測定かん (パララックス・バー、最小目盛 1/100 mm) である。

ここで用いた「カメロン効果を用いた測定法」を一般の空中写真による比高測定法と比べて簡単に説明する。空中写真では、図-1(a) のように同一高度の2点 O_1, O_2 (O_1, O_2 はカメラのレンズ中心の位置) からカメラを真下に向けてそれぞれ写真 I, II を撮影する。地表の点を A, 地表より比高 Δh の点を B とする。写真 I, II には、それぞれ点 A は a_1, a_2 に、点 B は b_1, b_2 に写る。いま写真 I を、 O_1 が O_2 の位置にくるように写真 II の上に重ねると a_1 は a_1' に b_1 は b_1' にくる。ここに a_1', b_1' の位置は $O_2a_1'/O_1a_1, O_2b_1'/O_1b_1$ として求められる。また、 $\overline{a_1'a_2} = p_A, \overline{b_1'b_2} = p_B$ と記せば、 p_A, p_B はそれぞれ点 A, 点 B の視差である。A, B 2点間の比高と視差との関係は、図-1(a) における幾何学的関係から、 $p_A/f = b/h_A, p_B/f = b/h_B$ であるから、
$$\Delta h = h_A - h_B = b \cdot f \{ (1/p_A) - (1/p_B) \} \dots\dots (1)$$
 Δh が h_A に比べて小さいときは、 $h_A = h$ とおけば上式は近似的に次のようになる。

$$\Delta h = \frac{m_b}{(b/h)} \cdot \Delta p, \Delta p = p_B - p_A, m_b = \frac{h}{f} \dots\dots (2)$$

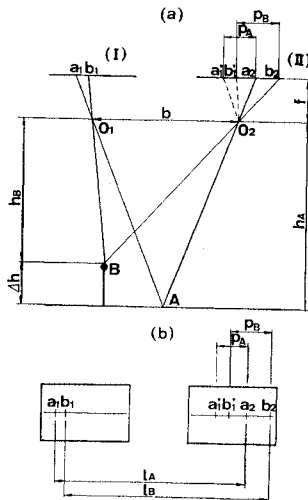


図-1 実体観測による視差と比高との関係

ここに、 f はカメラの画面距離、 m_b は (h/f) で、 $(1/m_b)$ は写真の縮尺に相当し、 Δp は点 A, B 間の視差差である。 (b/h) は撮影基線長 b と対地高度 h との比で、基線高度比といい、I, II の写真の撮影範囲の重複度合とカメラの種類 (普通角一または広角一カメラ) が指定されれば決まる定数である。式 (2) からわかるように2点間の比高は視差差に比例する。したがって等視差差面は、等高面を示すこととなる。

実体観測に際しては、図-1(a) の I, II の位置で撮ったそれぞれの写真を反射実体鏡の下に、同図 (b) のように、撮影したときと同じ関係位置に、かつ眼基線と平行にそれぞれ並べる。ついで写真上においた視差測定かんにつけられた左右の測標の間隔を調節して、測標の実体像がちょうど写真中の目標 (たとえば点 B) の実体像の上に着く (同一比高になる) ようにすれば、このときの測標間の距離の読みは l_B を示すこととなる。同様にして点 A に対する l_A を測れば、 $(l_B - l_A)$ は点 A, B 間の視差差 Δp となる。何となれば、図-1(b) において $\overline{b_1a_1} = \overline{b_1'a_1'}$ であるから、

$$l_B - l_A = \overline{b_2a_2} - \overline{b_1'a_1'} = p_B - p_A = \Delta p \dots\dots (3)$$

ゆえに視差測定かんを用いて点 A, B 間の視差差 Δp を測定することができ、それより式 (2) によって比高 Δh を算出することができる。

一方、1台の固定カメラで砂の水平なせん断層を撮った写真を図-1(b) の I, II とした場合を考えよう。この図の I, II において、それぞれ点 a_1, a_2 をせん断箱などの不動の基準点 A の写真像、点 b_1, b_2 を移動する砂粒子 B の写真像とし、I, II の写真は砂粒子の移動方向が水平な一直線上にあり、かつこの直線が左右の眼を結んだ眼基線と平行になるよう反射実体鏡の下に置かれたものとする。写真撮影が、I, II の順に撮られたものとするれば、これらの写真の上で測った砂粒子の水平移動距離は、 $(\overline{b_2a_2} - \overline{b_1a_1})$ で与えられる。この2枚の写真を実体視すれば、カメロン効果によって、点 B の実体像 (この像は虚像であるが) は点 A の実体像との間に比高があるように見える。ゆえに空中写真を実体視するときと同様に、点 A, B 間の見かけの比高を利用して視差測定かんによって点 A, B 間の視差差 Δp_H (添字 H は粒子移動の方向すなわち視差差の方向が水平である意) を測定することができる。式 (3) から明らかなように点 A, B 間の視差差 Δp_H は $(\overline{b_2a_2} - \overline{b_1a_1})$ に等しいから、用いた写真の実物に対する縮尺を $(1/m)$ とすれば、砂粒子の水平移動距離 δ_H は次式で求められる。

$$\delta_H = m \cdot \Delta p_H \dots\dots (4)$$

上述は、写真 I, II を図-1(b) のように粒子の移動方向を一直線上に、かつ眼基線と平行に置いて実体視する場合であったが、実際の砂のせん断試験では、砂粒子

の移動は、上下のせん断箱の摺動面に対して種々の方向にランダムな移動をする。しかし砂のせん断試験では、砂粒子の移動量の摺動面に垂直な方向の成分(垂直成分： δ_V)は水平成分(δ_H)に比較して一般に小さい。ゆえに I, II の写真を、それぞれの写真に写っている摺動面の線が一直線になるよう、かつこれを眼基線と平行になるように置いて実体観測をすることができる。そのとき求められる視差差は、水平方向の視差(横視差)の差であって、粒子の移動量の摺動面に平行な成分(水平成分)に対応するものである。ゆえに横視差差を Δp_H 、粒子の移動量の水平成分を δ_H とすれば、この場合も Δp_H と δ_H の関係は式(4)で与えられる。

各粒子の δ_V を実体観測で測るには、図-1(b)の I, II の写真を同じ方向に 90° 回転して、せん断箱の摺動線像を眼基線と垂直において実体視を行ってそのときの視差差(縦視差) Δp_V を測れば、粒子移動量の垂直成分 δ_V は式(4)と同様に次式で求められる。

$$\delta_V = m \cdot \Delta p_V \dots\dots\dots (5)$$

以上のように、カメロン効果を用いることによって、砂粒子の移動が測定できる。この方法を砂粒子個々の微視的挙動の解明手段として利用したのは本例が初めてのようである。しかし砂層中に異なった移動量のせん断領域ができる場合、巨視的な等移動量領域のコンターを描くには、実体写真測量において地形の等高線を描くのと同一技法によって、等視差差線を描くことで求められ、このような巨視的なせん断域の移動状況の測定例はすでに報告¹¹⁾されている。本研究においても後に示す 図-5 の砂の等移動量線は、この方法によって求めたものである。

このようなカメロン効果を用いて粒子の移動を測定する方法をここに採用した理由は次のようである。

1) 注目する砂粒子が実体鏡を通して実体視ができさえすれば、その粒子(実際はその粒子の影像)が連続撮影の時隔中に移動した諸元を測定することができる。この際、砂粒子に代わる材料、粒子位置を示す標的または砂粒子へのコーティングは必要でない。

2) 注目する砂粒子の移動を観測する際には、当該粒子の環境となる砂全面に含まれる砂粒子の移動の大勢も同時に、しかも簡単に観察されるので、当該粒子の移動を砂全体の動きと対比して検討することができる。

3) 2枚の連続撮影した写真から粒子の移動量を両眼で実体視して比高の視覚で観測するときの精度は、2枚の写真中の粒子位置を別々に単眼的に測定して移動量を算出するときの精度に比してかなり高い。

4) 砂粒子の移動量を水平成分と垂直成分とに分けて別個に測定することができる。そのため移動方向角の測定精度が良好である。

5) 撮影した連続写真は、後日必要あるとき利用でき連続写真の組み合わせを変えたり、必要な局部を特に詳細に検討することができる。また、カメラレンズやフィルム乳剤の解像度の限度以内であれば、写真を十分引伸ばして精測することもできる。

(2) 砂粒子の移動の撮影

せん断試験中の砂粒子の移動状況は、一面せん断試験機の側面を透明板にして、側面を透して撮影を行った。カメラは写真測量を目的に作られたものではないが、手持ちのもののうち、自動撮影が可能で、シャッターぶれない Contax RTS (レンズの焦点距離 50 mm) を用いた。

撮影時のカメラの設置条件は、①写真縮尺を一定にするため、カメラとせん断箱側面間の距離を一定にした。②砂粒子の移動は、5.(1)で後述するように、上下せん断箱の摺動面の中央 1/3 の区間にある粒子を対象とした。またカメラのレンズの収差とせん断箱側面の透明アクリル板の透過光に対する屈折は、カメラの光軸を中心にして、半径方向に増大する傾向がある。上記の事項を考慮して、カメラの光軸はせん断箱の摺動面(線)の中心を通り、かつせん断箱側面と直角になるようにした。③せん断箱は、その摺動面が水平になるように置き、カメラもこれに習って水平になるよう水準器を用いて固定した。

(3) 実体観測における測定精度

砂粒子の移動量の実体観測において精度上考えられる誤差の原因には、1) 視差測定かんの測標間隔を読みとるとき誤差、2) せん断箱側板に用いたアクリル板の透過光に対する屈折、3) カメラのレンズのひずみ、4) 写真引伸し機のレンズのひずみ、5) カメラの傾斜、6) 印画紙の伸縮などがある。

1) に関しては、視差測定かんの測標間隔の読みの最小目盛は 0.01 mm であるが、測標の実体像を目標の実体像と同一比高に合わせるときの誤差も含めると、人により熟練の差はあるが、肉眼による実体視の精度からみて、視差測定精度は 0.03 mm 前後といわれている¹²⁾。2) については後述。3)、4) については、同一被写部位を写真にすると、カメラまたは引伸し機のレンズの同一部を使うようにすることで、誤差を軽減することができる。5) については、撮影時にカメラの設置を厳密に調整することで避けることができる。6) の誤差を避けるには、せん断箱側面にスチール尺を張り付けておき、これを写真に写し出し、その目盛を基準にして粒子の移動距離を測るようにした。

そこで 2) の側板の屈折誤差を図-2 を用いて検討す

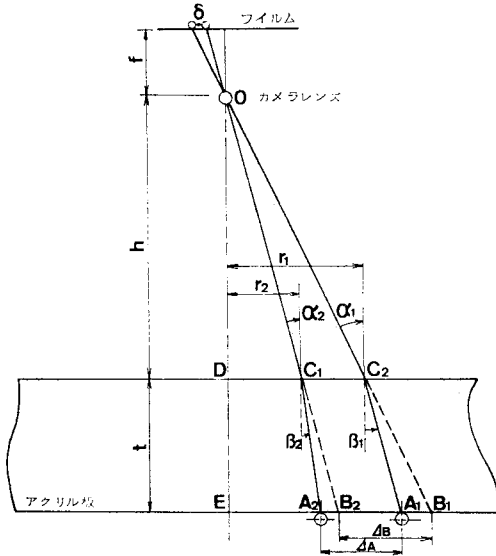


図-2 透明板を透過する光線の屈折

る。図において \overline{OE} はカメラの光軸、 \overline{DE} の部分は厚さ t の透明な側板である。いま側板に接する粒子 A_1 が、 A_2 まで ΔA 移動すると、側板の屈折による見かけの移動は B_1 より B_2 までの ΔB となる (図中の $\angle \alpha$ は入射角、 $\angle \beta$ は屈折角)。写真上で測定される粒子の移動距離は ΔB であるから、 $(\Delta B - \Delta A)$ は誤差となり、これは図の関係および Snell の法則から、側板の屈折率を μ とすると次のように求められる。

$$\Delta B - \Delta A = t \cdot \{(\tan \alpha_1 - \tan \beta_1) - (\tan \alpha_2 - \tan \beta_2)\}$$

ここに、

$$\alpha_1 = \arctan(r_1/h), \alpha_2 = \arctan(r_2/h)$$

$$\beta_1 = \arcsin(\sin \alpha_1/\mu), \beta_2 = \arcsin(\sin \alpha_2/\mu)$$

いまアクリル板の厚さおよび屈折率をそれぞれ、 $t=7$ mm、 $\mu=1.491$ とし、また $h=600$ mm、砂粒子の初期位置およびその移動距離をそれぞれ $r_1=70$ mm、 $r_1-r_2=2$ mm として、これらを上式に入れると、 $\Delta B - \Delta A = 0.008$ mm となる。ゆえに 2) の屈折の誤差は、ほかの誤差の範囲内に入るので、ここではその補正は省略することとした。

3. 砂のせん断試験

実験に用いた砂は、寝屋川市付近において採取した淀川産の川砂である。これをふるい分け 2 mm ふるいを通し、0.84 mm ふるいに残留したものを乾燥炉 (110°C) で乾燥して試料とした。砂の比重は 2.65 であった。

せん断試験機には、市販の一面せん断試験機のせん断箱を改造したものを用いた。せん断箱の改造は、せん断箱端面が砂のせん断に及ぼす影響を減らして上下せん断

- ① 供試体
- ② せん断箱
- ③ ロードセル
- ④ ダイヤルゲージ
- ⑤ 荷重
- ⑥ せん断力を加える装置
- ⑦ ロードセル用自記記録計
- ⑧ アーム
- ⑨ 調整ネジ
- ⑩ 透明板

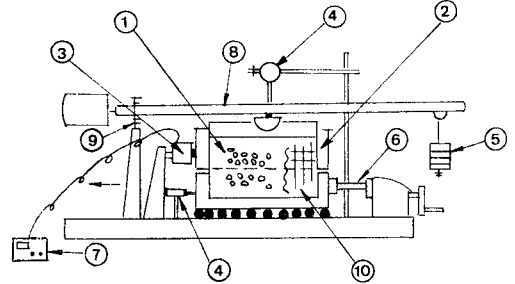


図-3 一面せん断試験装置

箱の摺動面で砂ができるだけ一様にせん断されるようせん断箱の長さを長くしたこと、せん断中の砂の状況を外部から写真撮影できるように箱の側面を透明板で作ったことである。そのために改造されたせん断箱は、厚さ 7 mm の透明なアクリル樹脂板で側面を作り、内りを長さ 30 cm、幅 15 cm に、高さを上下箱ともそれぞれ 4 cm とした。また長辺の透明な側板の内面には水平と垂直に 1 cm 間隔の格子目を描き、粒子の状況を観測する場合の基準線とした。せん断箱は図-3 のように上部固定、下部可動式で、せん断速度は無段変速機によって調節できる。せん断変位(下部せん断箱の水平変位)と垂直荷重の載荷板中央の垂直変位はそれぞれ最小目盛 1/100 mm のダイヤルゲージにて、またせん断力は 490 N の容量のロードセルで測定した。

試料砂はせん断箱に 3 層に分けて入れ、各層をそれぞれ重さ 1.7 N の突棒を試料面から 5 cm の高さより 30 回自然落下させて突き固めた。このとき、層の境がせん断面(せん断箱の摺動面)と一致しないよう、第二層はその中央がほぼせん断面の位置にくるよう加減した。

せん断試験は、垂直荷重 98 N を載荷し(載荷直後の初期間隙比 e は 0.78) せん断速度は 1.0 mm/min で

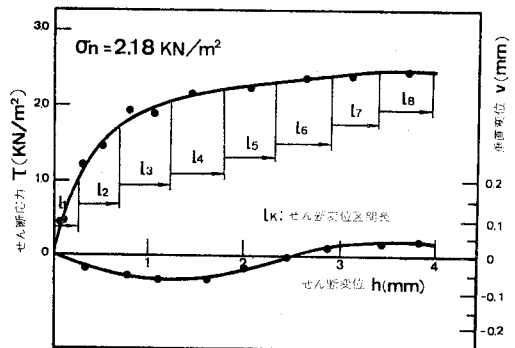


図-4 せん断応力、せん断変位と垂直変位の関係

行った。図-4は、この実験によるせん断応力 (τ kN/m²)、静止位置から測ったせん断変位 (h mm) および載荷板の垂直変位 (v mm, 上方を正) の関係である。一方せん断中の砂粒子の移動状況は、2.(2) に述べたようにカメラを固定して、せん断変位 h が、 $h_k=0, 0.25, 0.75, 1.30, 1.85, 2.40, 2.95, 3.50$ および 4.05 mm に達した9時点で、透明側板を透して写真撮影を行った。ただし h_k の添字 k は写真撮影の順序数 ($k=1, 2, \dots, 9$) である。

4. 粒子の移動量測定に用いる測定区間の選定

一面せん断試験機を用いるせん断試験では、試験機の機構上、試験条件に次のような欠点がある。1) せん断の生じる面の方向が上下せん断箱の摺動面の方向に固定されている結果、せん断に伴いせん断面(摺動面)にかかる主応力の大きさと方向が変化すること。2) せん断箱端面の側壁が砂と同一の変位をしない結果、後部端面は砂を圧縮し、一方前部端面は砂から離れようとしてすき間が生じ気味になること。3) 下部可動型の一面せん断試験機では、箱の上下方向の移動が許されない結果、せん断面における砂粒子の移動に拘束性が増すこと、正のダイレイタンスがある砂では砂が膨れようとしてせん断箱の内側面にかかる摩擦力が増加してせん断面にかかる垂直圧力が増加することのため、砂のせん断抵抗は過大に測定される¹³⁾。これらのため、せん断面に作用する垂直応力 σ_n やせん断応力 τ の分布が一樣にならず、したがって砂粒子の移動の様子も複雑になって、砂粒子の移動は、上下せん断箱の摺動面上ではどこでもすべて同じとはならないことが予期される。しかしここでは設備の都合上砂中の σ_n, τ の分布を知るような応力の計測はできなかったのでその検討や補正は見送った。

一方砂粒子の移動量の測定は、せん断中に撮った砂の写真から、2つの時点(1つは $h_1=0$ mm の時点、ほかは $h_3=0.75$ mm, $h_5=1.85$ mm または $h_7=2.95$ mm の時点)で撮った写真を一組の実体写真として実体観測を行い、砂粒子群の実体像に対して等比高線を描くことによって図-5の等水平移動成分値線を得た。すなわち図の(a), (b), (c)は、それぞれせん断変位 h が、 0 mm \rightarrow 0.75 mm, 0 mm \rightarrow 1.85 mm および 0 mm \rightarrow 2.95 mm のせん断変位区間に対する砂粒子の等水平移動成分値線図である。図中の $n-n$ 線は上下せん断箱の摺動面の位置を示す。数字は固定の上側せん断箱の中では、その中の粒子がせん断に伴って原位置から下側せん断箱の移動方向に移動した距離 δ_H を正值で示し、また、可動の下側せん断箱内の砂に対しては、この箱の中の砂粒子が下側箱に対して下側箱の移動方向と反対方向に移動した距

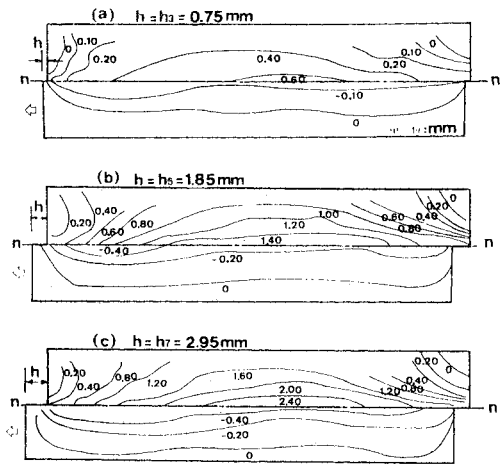


図-5 せん断変位と等水平移動成分値線との関係

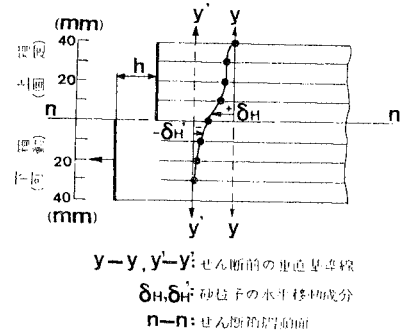


図-6 砂粒子の水平移動成分の説明図

離を $-\delta_H'$ として負値で示したものである。ゆえに、下側箱中の砂粒子が原位置から移動した水平距離は $(h - \delta_H')$ で与えられる(図-6参照)。図-5の各図の等水平移動成分値線の様相にみられるように、前後両端の側壁近傍では、これらの等値線は立ち上がっていて側壁の影響の存在がうかがわれるが、せん断箱の中央部ほぼ1/3区間のせん断領域では、等値線がほぼ水平に近く、かつその形態もほぼ安定しており、側壁の影響をあまり受けないものと推定される。

またこれと別に、せん断変位の途中における個々の砂粒子の水平移動成分の状況を見るため、せん断変位 h が h_k と h_{k+1} (k_0 は k_{0+1} として示されるから、ここでは、 $k=1, 2, \dots, 8$) の連続した順位の時点で撮影した2枚の写真を一組として実体観測を行い、 h_k から h_{k+1} まで l_k ($l_k = h_{k+1} - h_k$) だけせん断変位が増加する間に生じる各砂粒子の水平移動成分を測定した。この結果を図-7に示す。図中の点は、個々の砂粒子が l_k の変位区間に移動した後の位置を l_k 区間の最初の位置を基準にして示したものである。下側箱底面に接する粒子は下側箱とともに動いたものとみて差し支えないのでこれら粒子の位置は初期の基準位置とみなすことができる。図中

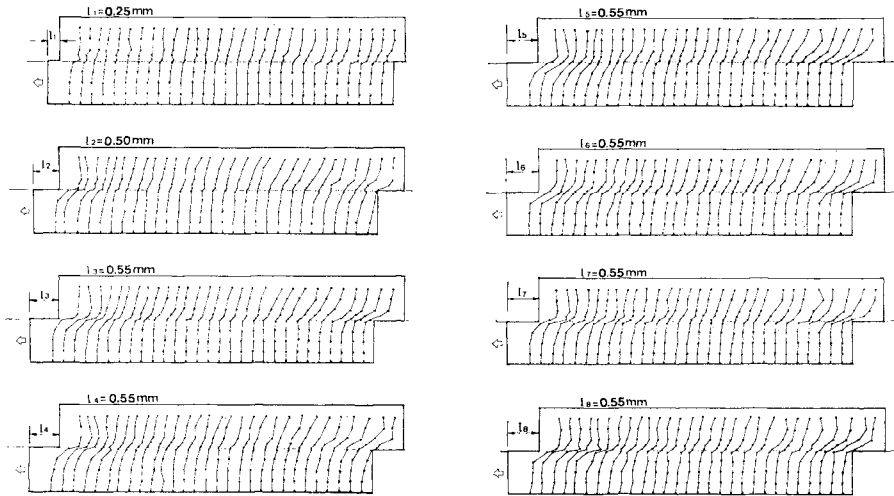


図-7 各 l_k 区間における砂粒子の水平移動成分

の点で示した砂粒子は、せん断箱側面に描いた全格子縦線 29 本上にはほぼ等間隔（ただしせん断箱摺動面の真上付近ではより細かい間隔）にそれぞれ 10 点をとってできた総計 290 の交点上にあった砂粒子である。なおこの実験では、せん断変位区間 l_k は $l_1=0.25$ mm, $l_2=0.50$ mm, $l_3=l_4=l_5=l_6=l_7=l_8=0.55$ mm となっている。図-7 の粒子の水平移動状況を見ると、せん断箱の前後両端近くは、中央の 1/3 の部分に比較して端部壁面の存在による影響を受けている様相がうかがわれ、せん断による自然な粒子の動きとは認めにくい。

上述のことから、今後せん断面付近においてせん断に伴う粒子の正常な移動特性を観測する区間としては、せん断箱全長 (30 cm) のうち中央部の 1/3 の区間 (10 cm) が比較的適していると判断される。

5. せん断面付近の粒子の移動特性

(1) 測定の対象とした粒子

せん断時に、砂のせん断変位が h_k から h_{k+1} に至る $l_k (=h_{k+1}-h_k)$ の区間においてせん断面上の粒子が移動する方向と距離を、 h_k と h_{k+1} の 2 点で撮ったそれぞれの写真を一組として実体視により測定した。測定ではせん断箱全長のうち中央 1/3 の区間 (全長 10 cm) において粒子の相対移動が最も活発に行われているせん断箱の摺動面 (後述の粒子の最大稼働面) を基準面としてその上にある粒子を対象とした。ただし、実際は摺動面の陰にある砂粒子は見えにくいから、摺動面の代わりにこれと至近位置にある水平面を基準面とした。対象粒子としては、試料砂を作成したときの最大ふるい目が 2 mm であることと、粒子の細長比、形状を考慮して、この基

準面 (10 cm) 上にある全粒子のうちからほぼ 2.5 mm 間隔にある粒子をランダムに 41 個選ぶこととし、それら 41 個の粒子について水平移動成分 δ_{Hki} と鉛直移動成分 δ_{Vki} (i は 41 個の粒子個々の意) を実体観測した。なお実体観測においては、 δ_{Hki} は一組の写真中のせん断箱摺動面を眼基線と平行に置いて測定し、 δ_{Vki} は写真中のせん断箱摺動面を眼基線と垂直かつ同じ向きになるように置いて測定した。

(2) せん断面上の粒子の移動距離

各せん断変位区間 l_k ($k=1, 2, \dots, 8$) に対して測った個々の粒子の水平移動成分 δ_{Hki} と垂直移動成分 δ_{Vki} より次式によって粒子の実移動距離 δ_{ki} を求めた。

$$\delta_{ki} = \sqrt{\delta_{Hki}^2 + \delta_{Vki}^2} \dots\dots\dots (6)$$

上式で求めた前記 41 個の粒子をそれぞれの δ_{ki} ($i=1 \sim 41$) を各 l_k 区間に対して度数分布の形で描くと図-8 となる。この図によれば、度数分布形は、 l_1, l_2, \dots, l_5 の区間では、左右ほぼ対称になっているが、 l_6 以後の区間ではこれと様相が多少異なり、分布形のピークが片寄って現われている。各 l_k 区間における砂の状態は、6. に後述するように、 l_1, l_2 は砂の準弾性状態に、 $l_3 \sim l_5$ は塑性状態に、 l_6 以後は破壊状態に該当するものと認められる。

砂が準弾性状態または塑性状態にある場合では、各 l_k 区間に対する粒子の移動距離 δ_{ki} は、粒子の 1 回の移動距離とその粒子の移動の確率の積として求められる^{1),2)}。粒子の 1 回の移動距離は、粒子ごとに異なるが砂全体ではある対称な確率分布をなし、その平均値は砂の材料、弾性か塑性かの砂の状態が定まれば一定と考えられる。また粒子の移動の確率は、砂の状態によって差異があるが、いずれもある確率分布をする粒子の滑動抵抗角 (粒

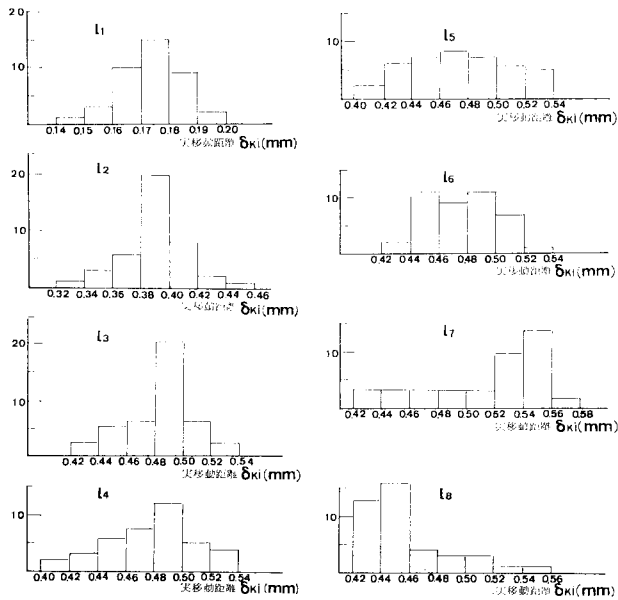


図-8 各 l_k 区間における砂粒子実移動距離の度数分布

子接点角と粒子間摩擦角との和) とほかの確率分布をする粒子間力の方向角とから定まる確率過程によって求められる^{1),2)}。これらのことを考慮すると、図-8の $l_1 \sim l_5$ の場合における δ_{ki} の分布が、中央値の左右にほぼ対称な分布をしていることは、各粒子が上記の推定のように一定の定常的な確率過程で移動 (mobilize) していることを示すものと考えてもよいようである。

砂が破壊状態に入ると、エネルギー障壁を越えた粒子の安定化と安定していた粒子構造の分解 (disintegration) とが、不規則に、むしろ衝撃的に生じると推定される³⁾。図-8の l_6 以後の δ_{ki} の分布が不規則に片寄って発生しているのは上記の推定を表わしているように思われる。

次に、各 l_k 区間における各粒子の水平移動成分の平均値 δ_{Hk} を次式で求める。

$$\delta_{Hk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{Hki}, \quad n=41 \text{ (測定粒子数)} \dots (7)$$

各 l_k 区間における δ_{Hk}/l_k (単位せん断変位当りの平均水平移動成分) を $\tau-h$ 図 (τ : せん断応力, h : せん断変位) の縦距にとり、各 l_k 区間の中央にプロットすると図-9となる。同図では、 $l_1 \sim l_5$ 区間の δ_{Hk}/l_k は l_1 区間のほかはみな等しい。 l_1 区間の δ_{H1}/l_1 がほかと比べてやや小さいのは、 l_1 の測定値の中に、せん断変位以外に砂の初期時であったゆるみから生じた変位が含まれていて、 l_1 が過大に測られたからではないかと思われる。そのため δ_{H1}/l_1 もほかの δ_{Hk}/l_k と等しいとみなせば、準弾性状態、塑性状態においては δ_{Hk}/l_k はすべて等しくなる。このことは全測定粒子の水平移動成分の平

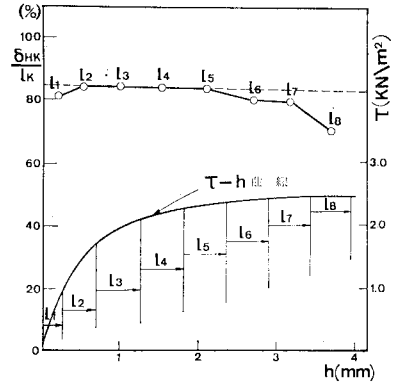


図-9 各 l_k 区間における δ_{Hk}/l_k

均値が砂の水平せん断変位に寄与する効果——したがって各粒子の水平移動成分が砂の水平せん断変位に寄与する効果——は砂が弾性または塑性状態にある場合では τ や h の大きさにかかわらず常に一定であることを示している。この関係は、砂のせん断変位の代わりに砂のせん断

断ひずみを対象にした場合にも同様に成立するから、弾性および塑性状態にある砂の構成式を求める際、砂粒子の移動量の砂のせん断ひずみ方向の成分がそのせん断ひずみに寄与する効果を一定と仮定し、これを一定の寄与係数 c で表わしたこと^{1),2)}の妥当性が確かめられたことになる。さらに上述のことは、砂の応力-ひずみ特性を砂粒子の微視的挙動から誘導する場合に、砂粒子の挙動を測る基準面を粒子の相対移動が最も活発に行われる面 (すなわち粒子の最大稼働面, plane of maximum mobilization) にとる構成式の解析手法^{1),2),14)}の妥当性を立証したものといえよう。

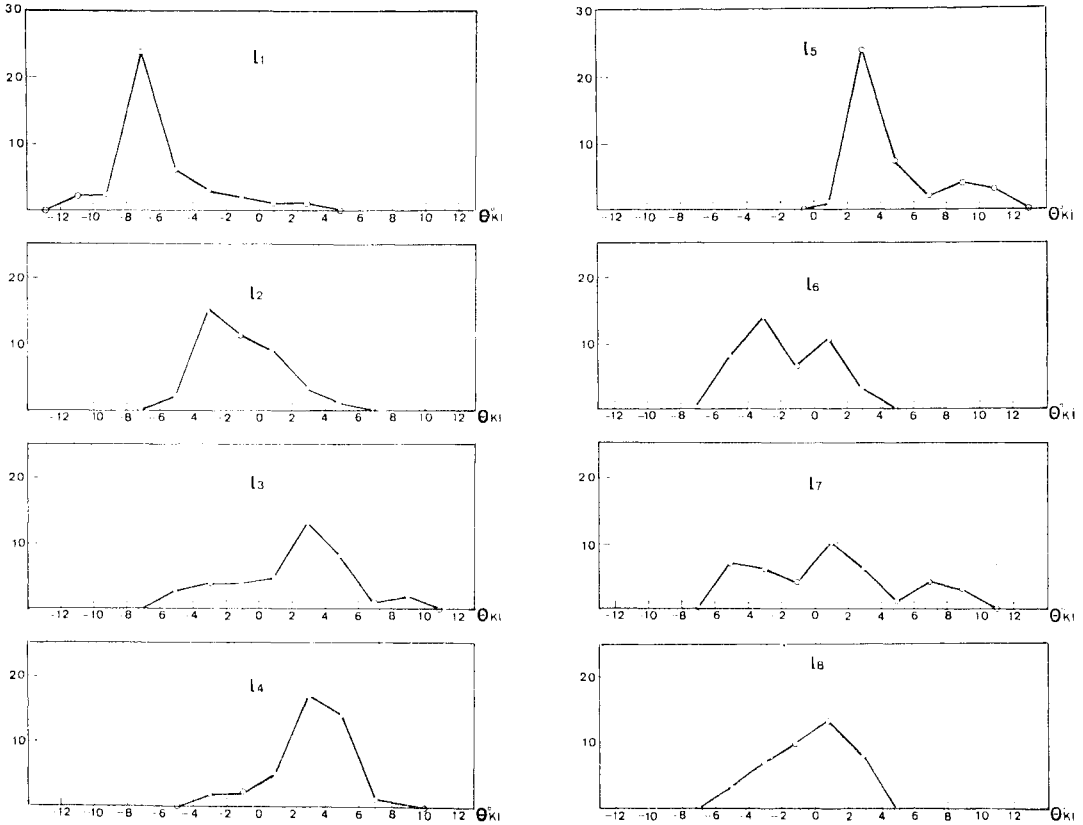
(3) せん断面上の粒子の移動方向

せん断変位の各区間 l_1, l_2, \dots, l_8 において、最大稼働面上の各粒子 (全数 41 個) の最大稼働面から上向きに測った移動方向角 θ_{ki} は次式で求められる。

$$\theta_{ki} = \tan^{-1}(\delta_{Vki}/\delta_{Hki}) \dots \dots \dots (8)$$

各 l_k 区間に対して、上式で求めた θ_{ki} を 2° 間隔に分けて度数分布で示すと図-10となる。この図は、砂が l_k だけせん断変位を増加する間に新たに転位 (dislocate) して配向した粒子の移動方向角の分布を示しているものである。この図によれば、新たに転位した砂粒子の全体としての移動方向は、せん断初期では下向きであるが、せん断が進むにつれて漸次上向きに変化し、この傾向は l_5 の区間まで続く。しかし、 l_6 区間以後では再びわずかながら下向きの傾向に反転している。

図-11 はこれとは別に、せん断変位が一例として h_3 と h_4 に達したときの各写真から、水平せん断断面 (粒子



図—10 各 l_k 区間における砂粒子移動方向角の度数分布

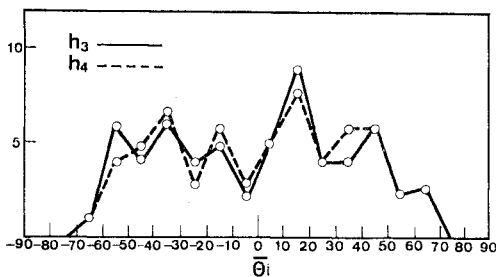
の最大稼働面) 上にある砂粒子の全部の接点について接点角 $\bar{\theta}_i$ を求め度数分布で示したものである。砂の場合では丸棒を積み重ねた積層体と異なり、砂粒子の形状が不規則なため、写真から接点角 $\bar{\theta}_i$ を読み取るには多少の不正確さが入るが、図—11 からでも h_3 のときにあった小さい $\bar{\theta}_i$ の接点は失われ、 h_4 に至るまでにより大きい $\bar{\theta}_i$ の接点に配向する傾向が観察される。しかしこのような全接点の $\bar{\theta}_i$ の度数の変化からは、 $\bar{\theta}_i$ が増減した結果を度数の差として知るだけであって、たとえある $\bar{\theta}_i$ の度数に増減が現われなくてもその $\bar{\theta}_i$ の度数に転位粒子の出入がなかったとはいえないだけでなく、全接点の中には観測時に接していた接点でもその後粒子間力の増

大により粒子間の接触が切れて粒子の挙動を支配しない無関係な接点となる接点の度数も混入して、全接点の接点角の度数変化は砂粒子の挙動を知るための直接的な情報にはならない。ゆえに砂の構成特性の解明には、せん断面上の全接点について接点角の全般的な変動をみるよりも、粒子の挙動を支配する接点、すなわちいわゆる「滑動接点」^{(1),(2)}における接点角の個々の変動を全般的にみることの方が重要であり、その観測手法として個々の粒子の挙動を観測できる 図—10 に示したような観測を行ったものである。

次に各 l_k 区間における個々の粒子移動方向角 θ_{ki} の正接の平均値 $\tan \theta_k$ を次式より求める。

$$\tan \theta_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tan \theta_{ki}, \quad n=41 \dots \dots \dots (9)$$

なお角 θ_{ki} は図—10 にみられるように大部分は 10° 以下の小さい角であるから角 θ_k は角 θ_{ki} の平均値とみなしても大差がない。粒子の平均移動方向角 θ_k は、砂のダイレイタンスーに関するから、図—4 の砂の $v-h$ 曲線 (v : 砂の垂直変位, h : 砂のせん断変位) から各 l_k 区間について $\alpha_k (= \tan^{-1}(dv/dh)_k)$ を求め、この α_k と θ_k とを比較すると、図—12 のように l_1, l_2, \dots, l_3 区間では両者はほとんど一致し、 $\alpha_k = \theta_k$ と近似すること



図—11 全粒子接点における接点角とその度数分布

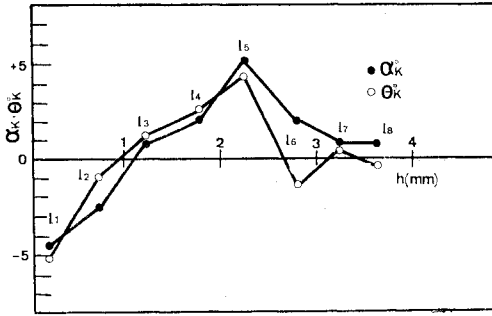


図-12 θ_k と α_k との関係

ができ、微視的量としての個々の粒子の移動方向角の累積が巨視的な砂のダイレイタンスに現われていることがみられる。なおここでは各 l_k 区間における $(dv/dh)_k$ としては、各 l_k 区間の中央における (dv/dh) の値を用いた。上述の $\alpha_k = \theta_k$ の関係は、 $l_1 \sim l_5$ の区間に対しては k の値のいかんにかかわらず成立するから、これらの区間に対しては添字 k を省いて一般に次式で表わされる。

$$\frac{dv}{dh} = \tan \theta \quad \dots\dots\dots (10)$$

この関係は、弾性状態ならびに塑性状態にある砂の構成式を誘導^{1),2)}するに際して理論的に得た $-d\varepsilon_n/dr = \tan \theta$ (ε_n : 体積圧縮ひずみ, r : せん断ひずみ) の関係と等価なもので、この理論式の妥当性を実証したものとえよう。

6. 砂の粒子状態と応力-ダイレイタンス関係

(1) 前報における考察^{1)~3)}

前報^{1)~3)}では、砂の応力-ひずみに関する構成特性は砂粒子の挙動で定まり、砂粒子の挙動は砂の状態に支配されるとし、砂の状態を弾性、塑性、破壊の3状態に分類して各状態における粒子挙動を演繹的に推考し、それに立脚して砂の構成式を誘導した。この際に用いた前提や考え方は次のようである。砂の弾性状態とは拘束圧が一定のもとでせん断応力を載荷後これを除荷したときせん断ひずみが残留しない状態と定義した。一面せん断試験機では、弾性状態は一定の垂直圧 σ_n のもとで一定のせん断応力 τ の載荷と除荷を多数回繰り返すことによりつくることができる。この際繰り返し加えたせん断応力の値を τ_{el} で示すと、この砂の応力比で示した弾性限界 s_{el} は $s_{el} = \tau_{el}/\sigma_n$ となる。弾性状態では砂粒子はせん断応力の加除により、初期の位置とエネルギー障壁との間を隣接粒子に沿って往復すると考えている。

ついでこの σ_n のもとで弾性状態にある砂に、 s_{el} より大きい応力比 ε ($\varepsilon = \tau/\sigma_n$, $\sigma_n = \text{一定}$, $\varepsilon > s_{el}$) を加

えると、そのとき生じたせん断ひずみはせん断応力を除荷しても完全にはもどらない。この状態を砂の塑性状態と称する。これは ε が s_{el} 以上になると滑動する粒子の中にはエネルギー障壁を越えて移動するものが発生するが、エネルギー障壁を越えた粒子は次の安定位置に止まり、せん断応力を除荷しても原位置に復帰しないからであると考えられている。

さらにせん断応力が大きくなると、その応力下ではひずみが際限なく増大しようとする状態に至る。この状態を破壊状態という。破壊状態ではエネルギー障壁を越えた粒子が、それに作用している粒子間力が大きいために移動後安定位置が得られないものや、塑性状態のとき安定していた粒子の中には、もはや安定を続けることができないものが発生する。そのために安定化していた砂の粒子構造は、粒子が動くにつれて分解して弱体化が進行しこの砂が支持できるせん断応力は、せん断変形が進むに伴って低下すると考えた。この考察によれば、破壊の始発点の応力比 $s_f = \tau_f/\sigma_n$ (τ_f : 破壊の始まるときのせん断応力, s_f : 破壊応力比) は応力比-せん断ひずみ曲線のピークとなる。

上記の弾性、塑性、破壊の各状態におけるダイレイタンス関係は、粒子の最大稼働面(粒子の相対移動が最も活発に生ずる面で、一面せん断試験ではせん断箱の摺動面付近となる)における τ/σ_n と $d\varepsilon_n/dr$ (ε_n : 体積圧縮ひずみ, r : せん断ひずみ) の関係として次式で示される。これらを図示すると図-13のように弾性、塑性および破壊の各状態で異なる3本の直線(AB: 弾性状態, BC: 塑性状態, CD: 破壊状態)となる。

$$\left. \begin{aligned} \text{弾性状態では、} \\ \lambda \cdot \left(-\frac{d\varepsilon_n}{dr} \right) + \tan \phi_n = \frac{s_{el} + \varepsilon}{2} \\ \text{塑性状態では、} \\ \lambda \cdot \left(-\frac{d\varepsilon_n}{dr} \right) + \tan \phi_n = \varepsilon \\ \text{破壊状態では、} \\ \lambda_f \cdot \left(-\frac{d\varepsilon_n}{dr} \right) + s_{f0} = \varepsilon, \quad \lambda_f < \lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\varepsilon = \tau/\sigma_n$, λ, λ_f : 定数, ϕ_n : 粒子間摩擦角, s_{f0}

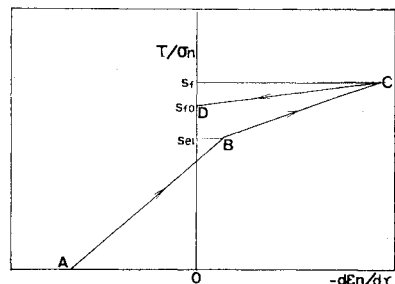
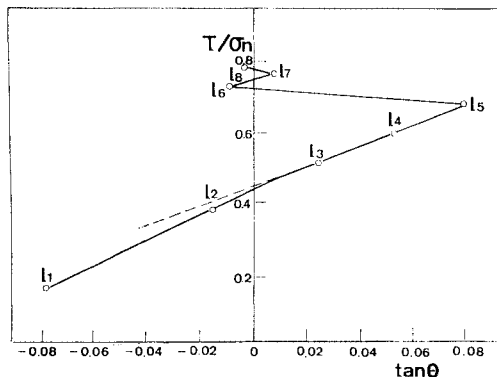


図-13 τ/σ_n と $(-d\varepsilon_n/dr)$ との関係



図—14 τ/σ_n と $\tan \theta$ との関係

：砂の残留強度。

(2) 実験結果に対する検討

今回行った一面せん断試験では、測定した式 (10) の dv/dh は式 (11) の $(-d\epsilon_n/dr)$ と等価な量であるから、図—13 に習って応力比 τ/σ_n を縦軸に、 $\tan \theta$ を横軸にプロットすると図—14 が得られる。ただしこの図において τ の値には各 l_k 区間の中央における τ の値を用いた。図の実測点を折線で結ぶと、図示のようになり、これを図—13 と対比すると、 $l_1 \sim l_2$ 線、 $l_3 \sim l_5$ 線および $l_5 \sim l_6$ の折線の 3 群に分けられる。なお横軸の $\tan \theta$ は、さきに 図—12 について述べたように、 $l_1 \sim l_5$ の区間では、式(10)により dv/dh と記すこともできる。

この砂試料は、作成時突棒で締固めたもので、繰り返し載荷によって得られるほど完全な弾性状態ではないと思われるので、 $l_1 \sim l_2$ 区間の線は砂の内部に弾性部分と塑性部分が混在している準弾性状態に対する $\tau/\sigma_n - dv/dh$ 特性線に該当するものとみられる。次の $l_3 \sim l_5$ は塑性状態の砂に対する特性線に対応し、ここでも直線で示されている。 l_5 以上のいくつかの折線よりなる区間は粒子挙動が不規則なためか 図—13 のような直線にならないが、破壊状態における特性線とみなした。一般に破壊状態での $\tau/\sigma_n - dv/dh$ 線は、図—13 のように左下がりの直線で示されるはずであるが³⁾、図—14 の特性線がこれと異なり左上がりであるのは、4. に前述したように下部可動型の一面せん断試験機では、砂が膨張過程であるとせん断抵抗が過大になるためかと思われる。

ゆえに本実験で得られた $\tau/\sigma_n - dv/dh$ 特性線のうち比較的信頼できる塑性領域の特性線を式示すると次のようになる。

$$\bar{\lambda} \left(\frac{dv}{dh} \right) + b = \frac{\tau}{\sigma_n} \quad (\bar{\lambda}, b \text{ 定数})$$

いま $(dv/dh) = 0$ が $(-d\epsilon_n/dr) = 0$ と同一意義があると考えると、上式の係数 b は式 (11) より $b = \tan \phi_\mu$ と

なって、 b は粒子間の摩擦係数となる。ゆえに上式は次式のようになる。

$$\bar{\lambda} \left(\frac{dv}{dh} \right) + \tan \phi_\mu = \frac{\tau}{\sigma_n} \dots \dots \dots (12)$$

図—14 の塑性領域の特性線の縦軸切片および勾配から $\tan \phi_\mu$, $\bar{\lambda}$ を求めると、 $\tan \phi_\mu = 0.45$, $\bar{\lambda} = 1.7$ となる。これらの値を、村山・松岡¹⁵⁾ が豊浦砂で得た $\lambda = 1.4 \sim 1.5$ (ただし λ は式(11) 第2式の係数), $\tan \phi_\mu = 0.44$ と比較すると、 $\tan \phi_\mu$ はほぼ一致している。一方 λ と $\bar{\lambda}$ はそれぞれ $(-d\epsilon_n/dr)$ と (dv/dh) に対する係数であり等価なものであるが、下部可動型せん断試験機では前述のように、砂の膨張過程では τ が過大になる傾向があるから、 $\bar{\lambda}$ は過大になっている懸念がある。

7. む す び

砂のせん断過程中に生じる砂粒子の挙動を観測することは、砂の構成式の確立上重要であるが、現実の砂を用い、砂粒子の挙動を直接測定した例はあまりないようである。ここでは透明なせん断箱側面をもつ一面せん断試験機によって砂の一定垂直応力下のせん断試験を行い、せん断過程中に透明な側板を透して連続撮影した試料の写真を実体視することにより、カメロン効果を応用してせん断面近傍の砂粒子の移動距離と移動方向を測定し、その結果について考察を行った。得られたおもな成果は次のようである。

(1) 今回試みたカメロン効果を応用した砂粒子の移動測定法は、人により熟練の差はあるが、粒子の移動距離が 0.03 mm 程度以上の移動に対しては測定ができるようである。

(2) 砂粒子の移動の様相を解析することにより、砂の状態を弾性(または準弾性)、塑性および破壊の3状態に分類することができる。ただし今回用いたような下部可動型一面せん断試験機では、試験機の機構上、せん断が砂の全域について一様に行われないので、各状態の力学特性を十分な精度で測定するにはあまり適当でない。

(3) 砂が弾性状態および塑性状態にある場合には、砂が単位せん断変位を生じるために必要な粒子の移動距離の水平成分は粒子個々では異なるがあるが、粒子全体に対しては、せん断応力、せん断変位の大きさにかわらず一定である。換言すれば、全粒子の移動距離の水平成分の平均値が砂の水平せん断変位に寄与する効果は、砂が弾性および塑性状態にある場合では常に一定である。またこのことは、砂の構成式を解析する場合に、砂粒子の移動を測る基準面を粒子の最大稼働面 (plane of maximum mobilization) にとる解析手法の意義と妥当性を立証するものといえよう。

(4) せん断面上の個々の粒子の移動方向角の平均値を θ , 砂の垂直変位を v , せん断変位を h とすると, 砂が弾性または塑性状態にある場合には式 (10) のように $dv/dh = \tan \theta$ の関係が得られ, 微視的な量である θ は巨視的な砂のダイレイタンスーと一義的な関係が存在することが認められる.

(5) τ/σ_n (τ : せん断応力, σ_n : 一定垂直応力) と dv/dh との関係は, 塑性状態では次式 (12) のように示される.

$$\bar{\lambda} \left(\frac{dv}{dh} \right) + \tan \phi_\mu = \frac{\tau}{\sigma_n} \dots\dots\dots (12)$$

ここに, $\bar{\lambda}$: 定数, ϕ_μ : 粒子間摩擦角.

なお上述の(2)~(5)の事項は, さきに砂の構成式^{1),2)}を誘導する際に用いた仮定の一部の妥当性を実験的に確かめたものである.

今回の報告では, 砂の状態, 実験条件は限られた範囲にすぎず, また一面せん断試験機の機構上砂の破壊状態について十分な結論がだせなかったが, 今後もこの微視的現象の実験方法を適用して, 残された範囲に対してさらに研究を続ける予定である.

本研究を進めるに際し, 特に実体写真観測について種々ご助言をいただいた近畿測量専門学校 小林和夫教授, また実験に協力された元大阪工業大学 学生 松本達樹, 海野達夫両君に対し, ここに深謝の意を表する次第である.

参 考 文 献

- 1) 村山朔郎: 弾性状態にある砂の構成式, 土木学会論文報告集, 第 236 号, pp. 125~137, 1975 年 4 月.
- 2) 村山朔郎: 塑性状態にある砂の構成式, 土木学会論文報告集, 第 251 号, pp. 77~90, 1976 年 7 月.
- 3) Murayama, S.: Constitutive equations of particulate

- material in the failure state, Proc. Specialty Session 9, Ninth ICSMFE, 1977, pp. 183~190, 1978.
- 4) Oda, M.: The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, Soils and Foundations, Vol. 12, No. 2, pp. 1~18, June 1972.
- 5) 村山朔郎・松岡 元: 2 次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察, 京大防災研年報, 13 号 B, pp. 505~523, 1970 年 3 月.
- 6) Matsuoka, H.: A microscopic study on shear mechanism of granular materials, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 1, pp. 29~43, Mar. 1974.
- 7) Oda, M. and J. Konishi: Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, pp. 25~38, Dec. 1974.
- 8) Konishi, J.: Microscopic model studies on the mechanical behaviour of granular materials, Proc. US-Japan seminar on continuum mechanical and statistical approaches in the mechanics of granular materials, Sendai, pp. 27~45, 1978.
- 9) 村山朔郎・井上 治: ステレオ写真による砂のせん断時の変位測定, 第 13 回土質工学研究発表会講演概要集, pp. 409~412, 1978 年 6 月.
- 10) 日本測量協会編: 測量用語解説, 日本測量協会発行, pp. 158, 1974 年 10 月 15 日.
- 11) Butterfield, R., R.M. Harkness and K.Z. Andrawes: A stereophotogrammetric method for measuring displacement fields, Geotechnique, Vol. 20, No. 3, pp. 308~314, 1970.
- 12) 木本氏寿: 写真測量の実際, 山海堂発行, p. 41, 1970 年 4 月 20 日.
- 13) 井上広胤: 砂の直接せん断と三軸せん断の比較, 土木学会論文報告集, 第 108 号, pp. 20~23, 1964 年 8 月.
- 14) Murayama, S.: A theoretical consideration on a behaviour of sand, Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mech., Grenoble, 1964, pp. 146~157, Springer-Verlag, 1966.
- 15) 村山朔郎・松岡 元: 砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて, 京大防災研年報, 14 号 B, pp. 551~563, 1971 年 4 月.

(1979.12.26・受付)