

動的解析における摩擦力のモデル化に関する一考察

A COMPUTATIONAL MODEL OF FRICTION FORCE IN DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS

川 島 一 彦*

By Kazuhiko KAWASHIMA

1. はじめに

摩擦力は静的、動的な問題を問わず、常に物体と物体の接触する面に作用する自己つり合い力である。

現在、動的解析においては、摩擦力は計算上無視されるか、もしくは等価な粘性減衰に置き換えて取扱われる場合が多い。この原因としては摩擦力の影響が一般にそれほど顕著ではない場合が多いこと、運動方程式を閉じた形で解くことができないこと等が考えられる。しかしながら、今日では解析手法の高精度化と数値計算技術の長足の進歩に支えられて摩擦力に対する詳細な検討を行うことが可能となり、また、それに伴って摩擦力の影響を詳細に考慮することが必要とされつつある。

本小文は、このような観点から動的解析において摩擦力を表示するための2種類の力学モデルを取り上げ、剛性行列を提示するとともに、試算によりモデルの適用性を検討した結果を報告するものである。

2. クーロン型摩擦力

摩擦力は面と面あるいは点と点というように、いろいろな接触の形態に生じる。これを以下の仮定を設けてクーロン型摩擦力でモデル化する。

① 摩擦力は接触圧が負（圧縮）の場合に、接触圧の絶対値に比例して作用する自己つり合い力である。

② 接触面が互いに相対運動をした場合に接触面に生じる摩擦力は、相手の接面に対する相対速度と反対方向に作用する。

③ 接触面が互いに相対運動をしていない場合に接触面に作用する摩擦力は、系に外部から作用する力に応じて最大の摩擦力と最小の摩擦力の間の任意の値をとる。

④ 摩擦力は接触面間の相対速度によらない。

いま、このような摩擦力を図-1に示す座標系において、IおよびJの2点より成る力学系を用いて表示すれば、それぞれI点およびJ点に作用する摩擦力 F_I^C および F_J^C は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F_I^C = -F_J^C = \nu <N> |N| \text{sign}(\dot{r}) \dots \dots \dot{r} \neq 0 \text{ の場合} \\ -\nu <N> |N| <F_I^C = -F_J^C <\nu <N> |N| \dots \dot{r} = 0 \text{ の場合} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

ここで、 ν は摩擦係数、 N は接触圧、 r, \dot{r} は I, J 間の相対変位および相対速度で、次式により定義する。

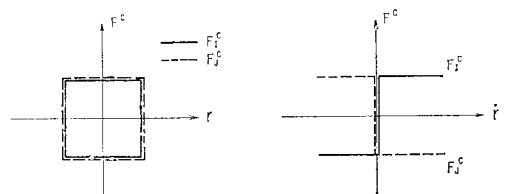
$$r = u_J - u_I, \dot{r} = \dot{u}_J - \dot{u}_I \dots \dots (2)$$

また、 $<N>$ は次式により定義する。

$$<N> = \begin{cases} 1 & N < 0 \\ 0 & N \geq 0 \end{cases} \dots \dots (3)$$

式(1)により定義した摩擦力を図示すると図-2のように表わされる。ここで、図-2(a)は F_I^C, F_J^C と r の関係を示したものであり、図-2(b)は F_I^C, F_J^C と \dot{r} の関係を示したものである。図-2(b)の表示には滑り量が直接現われてこないが、図-2(a)および(b)は本質的に同じ関係を示したものである。

摩擦力は式(1)により動的解析に取り入れることができるが、図-2(a)および(b)のいずれの関係でも相対速度 \dot{r} の符号が変化する際に摩擦力の急な変化が生じ



(a) Displacement Control Model (b) Velocity Control Model

図-2 摩擦力の力学モデル

* 正会員 工修 建設省土木研究所地震防災部振動研究室主任研究員

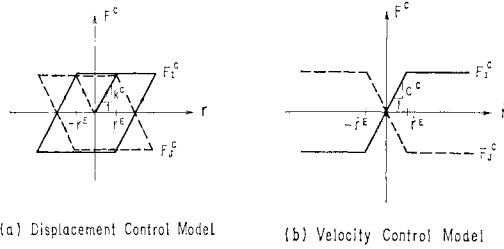


図-3 摩擦力のモデル化

るため、このままの形で数値計算に用いることは実際的ではない。そこで、ここでは図-2の関係を図-3に示すように、相対速度 \dot{r} もしくは相対変位 r が微小な区間で摩擦力が線形に変化するようモデル化する。ここでは仮に図-3(a)のモデルを変位制御モデル、図-3(b)のモデルを速度制御モデルとよぶことにする。

3. 摩擦力の力学モデル

(1) 変位制御モデル

図-3(a)に示した変位制御モデルにおいて、I点およびJ点間の力と変位の関係を次式で定義する。

$$\Delta F^C = k^{FR} \Delta u \dots\dots\dots(4)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} F^C &= \{F_I^C, F_J^C\}^T, \Delta F^C = \{\Delta F_I^C, \Delta F_J^C\}^T \\ u &= \{u_I, u_J\}^T, \Delta u = \{\Delta u_I, \Delta u_J\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

いま、式(2)で定義した相対変位 r に対応する力 S を次のように定義し、

$$S = F_J^C = -F_I^C \dots\dots\dots(6)$$

Δr と ΔS の関係を次式で定義すると、

$$\Delta S = \tilde{k} \Delta r \dots\dots\dots(7)$$

式(5)、(6)から式(4)で定義した剛性行列 k^{FR} は次式で与えられる。

$$k^{FR} = \begin{bmatrix} \tilde{k} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k} & \tilde{k} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

ここで、図-3(a)に示した変位制御モデルでは、摩擦力 S は次式で表わされる。

$$S = \begin{cases} -\nu < N > |N| & r \leq r^S - r^E \\ k^C < N > (r - r^S) & r^S - r^E < r < r^S + r^E \\ \nu < N > |N| & r \geq r^S + r^E \end{cases} \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 r^S は時刻 t における滑り量、 k^C は図-3(a)で定義した初期剛性係数、 r^E は k^C によって生じる弾性変位量で $r^E \equiv \nu |N| / k^C$ と定義する。

直接積分法を用いた地震応答解析において、微小な積分時間間隔 Δt の範囲内で $(r - r^S \pm r^E)$ の符号が一定で、かつ N も変化しないと仮定すると、式(9)の増分表示は次式で与えられる。

$$\Delta S = \begin{cases} k^C < N > \Delta r \dots r^S - r^E < r < r^S + r^E \\ 0 \dots\dots\dots r \leq r^S - r^E \text{ もしくは } r \geq r^S + r^E \end{cases} \dots\dots\dots(10)$$

したがって、式(10)より式(7)で定義した \tilde{k} は次式で与えられる。

$$\tilde{k} = \begin{cases} -k^C < N > \dots r^S - r^E < r < r^S + r^E \\ 0 \dots\dots\dots r \leq r^S - r^E \text{ もしくは } r \geq r^S + r^E \end{cases} \dots\dots\dots(11)$$

以上より、変位制御モデルによる剛性行列 k^{FR} は式(11)を式(8)に代入することによって、また、これに対する復元力ベクトル F^C は式(5)に式(6)および(9)を代入することによって、それぞれ求めることができる。

(2) 速度制御モデル

図-3(b)に示した速度制御モデルにおいて、I点およびJ点間の力と速度の関係を次式で定義する。

$$\Delta F^C = c^{FR} \Delta \dot{u} \dots\dots\dots(12)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} F^C &= \{F_I^C, F_J^C\}^T, \Delta F^C = \{\Delta F_I^C, \Delta F_J^C\}^T \\ \dot{u} &= \{\dot{u}_I, \dot{u}_J\}^T, \Delta \dot{u} = \{\Delta \dot{u}_I, \Delta \dot{u}_J\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

いま、変位制御モデルの場合と同じように、式(2)で表わした相対速度 \dot{r} に対応する力 S を式(6)のように定義し、 \dot{r} と S の関係を次式で定義すると、

$$\Delta S = \tilde{c} \Delta \dot{r} \dots\dots\dots(14)$$

式(6)、(13)から、式(12)で定義した減衰行列 c^{FR} は次式で与えられる。

$$c^{FR} = \begin{bmatrix} \tilde{c} & -\tilde{c} \\ -\tilde{c} & \tilde{c} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

ここで、図-3(b)に示した速度制御モデルでは、摩擦力 S は次式で与えられる。

$$S = \begin{cases} \nu < N > |N| & \dot{r} \geq \dot{r}^E \\ c^C < N > \dot{r} & -\dot{r}^E < \dot{r} < \dot{r}^E \\ -\nu < N > |N| & \dot{r} \leq -\dot{r}^E \end{cases} \dots\dots\dots(16)$$

ここで、 c^C は図-3(b)で定義した初期減衰係数、 \dot{r}^E は摩擦力を相対速度に比例して制御する限界の相対速度で、 $\dot{r}^E \equiv \nu |N| / c^C$ と定義する。

変位制御モデルの場合と同様に、微小な積分時間間隔 Δt の範囲内で $(\dot{r} \pm \dot{r}^E)$ の符号が一定であり、かつ、 N も変化しないと仮定すると、式(16)の増分表示は次式で与えられる。

$$\Delta S = \begin{cases} c^C < N > \Delta \dot{r} & |\dot{r}| < \dot{r}^E \\ 0 & |\dot{r}| \geq \dot{r}^E \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

したがって、式(17)より、式(14)で定義した \tilde{c} は次式で与えられる。

$$\tilde{c} = \begin{cases} c^C < N > & |\dot{r}| < \dot{r}^E \\ 0 & |\dot{r}| \geq \dot{r}^E \end{cases} \dots\dots\dots(18)$$

以上より、速度制御モデルにおける減衰行列 c^{FR} は式(18)を式(15)に代入することによって、また、減

衰力 F^C は式 (16) を式 (13) に代入することによって、それぞれ求めることができる。

4. 試算例

上述した解析モデルの試算例として、図-4 に示すばね (弾性係数 k) によって支持された剛体 (質量 m) がクーロン摩擦 (摩擦係数 ν) のもとで自由振動する場合を取り上げた。これは、自由振動の場合が最も摩擦力の影響が顕著に現われるため、摩擦力のモデル化を検討するためには都合がよいと考えたためである。

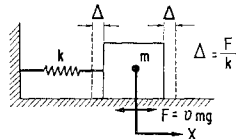


図-4 試算モデル

いま、図-4 で質量 m を右の方へ x_0 だけ移動させ、静かに放したとする。ただし、 $x_0 \gg \Delta = F/k = \nu mg/k$ とする。この場合の自由振動の運動方程式は周知のように次式で与えられ^{1),2)},

$$m\ddot{x} + kx = -F \text{sign}(\dot{x}) \dots\dots\dots(19)$$

この一般解は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= -J + A \cos(\omega_n t - \gamma) \quad (\dot{x} > 0) \\ x &= J + A' \cos(\omega_n t - \gamma') \quad (\dot{x} < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

未定数 A, A', γ, γ' は初期条件を与えることにより定めることができる。

いま、 $x_0 = 12\Delta$ とした場合について、式 (20) から解を求めると、後述する図-5 の実線のようなになる。クーロン摩擦のもとでの系の振動数は非減衰固有振動数と等しく、また、振幅は1周期ごとに 4Δ ずつ減少していくことは周知のとおりである。さらに、質量 m は、振幅のピーク値が Δ よりも小さくなった最初の段階で絶対静止する。

以上の問題を前章に示した摩擦力の数値モデルを用いて解くと以下の通りとなる。まず、数値計算に用いるパラメーターとして以下の諸量を仮定した。

$$\left. \begin{aligned} m &= 0.037 \text{ kg}, \quad k = 71.4 \text{ N/cm}, \quad \nu = 0.5 \\ f_n &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{71.4}{0.037}} = 6.98 \text{ Hz} \\ \Delta &= \frac{F}{k} = \frac{0.5 \times 980 \times 0.037}{71.4} = 0.254 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

また、結果を無次元化して表示するため、次のパラメーターを導入する。

$$\left. \begin{aligned} \text{時間} : T &= \omega_n t, \quad \text{初期剛性係数} : \alpha = r^E / \Delta \\ \text{振幅} : X &= x / \Delta, \quad \text{初期減衰係数} : \beta = \frac{\dot{x}^E / \omega_n}{\Delta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

計算に際しては、一定加速度法を用い、必要に応じてイテレーション法³⁾により解の精度を高めた。

(1) 変位制御モデル

変位制御モデルでは、初期剛性係数 k^C を十分大きくし、図-3 (a) の力学モデルが図-2 (a) の摩擦力の特性をよく再現するようになる必要がある。そこで、 k^C (r^E) の大きさによる解析精度を検討するために、無次元化した積分時間間隔 ΔT を任意に $\pi/10$ に固定し、 $\alpha \equiv r^E / \Delta$ を 0.1, 1.0, 5.0 と変化させた場合の結果を図-5 に示す。この結果によれば、 α の小さい方が解析精度は向上するが、振動振幅 X が α に比較して大きい場合には r^E をある程度大きくとつても計算値は厳密解と比較的よく一致すること、しかしながら振動振幅 X が減少し、 α に近くなるにつれて誤差が顕著に表われる傾向にあることがわかる。したがって、変位制御モデルにより摩擦力をモデル化する場合には、対象とする振動振幅のレベル X が α よりも十分大きくなるように k^C を定める必要がある。

次に、積分時間間隔 Δt の大きさによる解の精度を検討するために、 $\alpha \equiv r^E / \Delta$ を 0.1 に固定し、無次元化した積分時間間隔 ΔT を $\pi/10, \pi/5, \pi/3$ と変化させた場合の計算結果を図-6 に示す。この結果より、積分時間間隔も k^C と同様に顕著に解析結果の精度に影響を及ぼし、 Δt を小さくするほど精度が向上することがわかる。

(2) 速度制御モデル

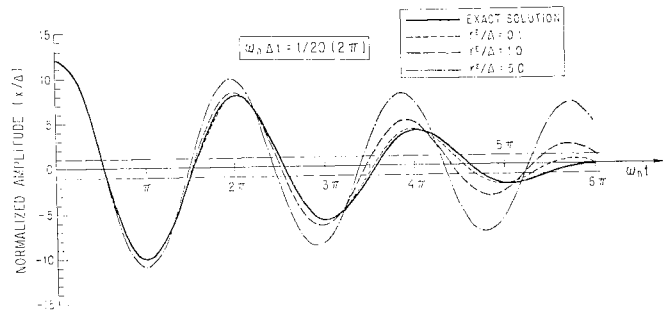


図-5 変位制御モデルを用いた場合の初期剛性係数の影響

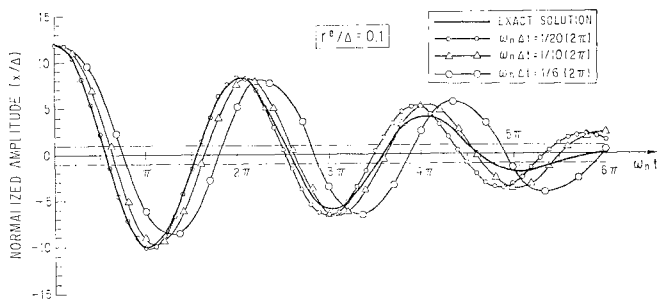


図-6 変位制御モデルを用いた場合の積分時間間隔 Δt の影響

図-7 は r^E の影響を示したものであり、無次元化した積分時間間隔 Δt は $\pi/10$ に固定し、 $\beta \equiv r^E/\omega_n d$ を 0.1, 1.0, 5.0 と変化させた場合の結果を示したものである。この場合にも β を小さくするほど、解の精度が向上することは変位制御モデルと同じである。

また、図-8 は積分時間間隔の影響を検討した結果であり、 $\beta=0.303$ に固定し、 ΔT を $\pi/10, \pi/5, \pi/3$ と変化させた場合を示している。明らかに、積分時間間隔を小さくすることにより、解の精度が向上していることがわかる。

5. 結 論

(1) クーロン型摩擦力を数値解析に取り入れるためには、本小文で定義した変位制御モデルおよび速度制御モデルのいずれのモデルも有効に使用することができる。

(2) 変位制御モデルでは、振動振幅 x/d が r^E/d より十分大きい場合に精度が良いため、初期剛性係数の決定に際しては、予想される振動振幅の大きさに基づき、上記の条件を満足するよう定めることが重要である。

(3) 速度制御モデルでは、無次元化した初期減衰係数 $r^E/\omega_n d$ を小さくするほど、解の精度は向上する。

参 考 文 献

1) Andronov, A.A. and C.E. Chaikin : Theory of Oscilla-

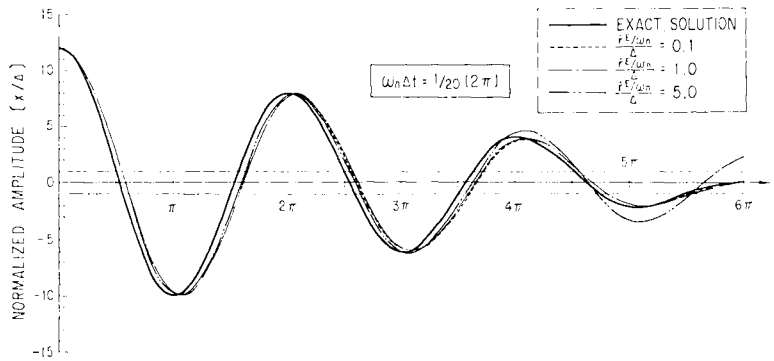


図-7 速度制御モデルを用いた場合の初期減衰係数の影響

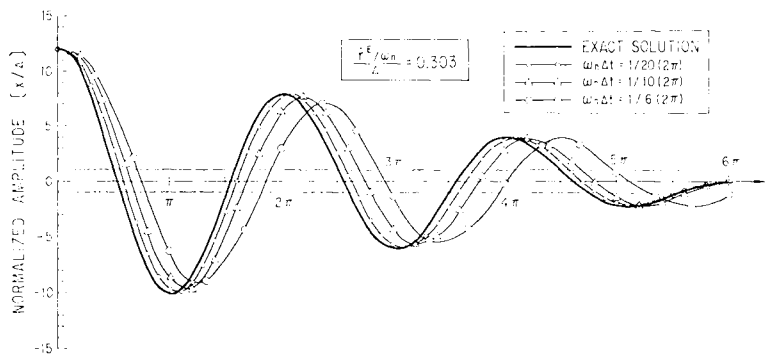


図-8 速度制御モデルを用いた場合の積分時間間隔 Δt の影響

tions, Prenceteon University Press, 1949.

2) Myklestad, N.O.: Fundamentals of Vibration Analysis, McGraw Hill, 1956.
 3) Mondkar, D.P. and G.H. Powell : Static and Dynamic Analysis of Nonlinear Structures, Report No. EERC 75-10, University of California, Berkeley, 1975.
 4) 佐々木・藤野・伯野：地震動による物体のすべり一特にその上下動の影響，第 33 回土木学会年次学術講演会，1978.
 5) Kawashima, K. and J. Penzien : Correlative Investigation on Theoretical and Experimental Dynamic Behavior of A Model Bridge Structure, Report No. EERC 76-26, University of California, Berkeley, 1976.

(1979.11.19・受付)