

有限変形における増分形エネルギー基礎理論

INCREMENTAL ENERGY THEOREMS FOR FINITE DEFORMATIONS

三 池 亮 次*

By Ryoji MIIKE

1. はじめに

材料非線性や幾何学的非線形性を考慮したいわゆる有限変形の理論については、すでに多岐にわたる研究成果が発表されているが、そのほとんどは有限変形におけるエネルギー理論に基づくものである。

鷲津¹⁾や Dym と Shames²⁾ の著書にみられるように、有限変形における内部ひずみエネルギーは、Kirchhoff 応力と Green ひずみの積の形で表わされるが、西野ら³⁾は、このことを考慮した仮想仕事の原理による、軸力と曲げを受ける平面骨組構造の幾何学的非線形解析を試みている。ひずみが微小の幾何学的非線形においては、Green ひずみテンソルは物体の埋め込み座標に対しての通常のひずみテンソルと等価であり、また Kirchhoff 応力テンソルは通常の応力テンソルに一致するので、通常の応力とひずみの間の構成方程式とまったく同じ関係が、この Kirchhoff 応力と Green ひずみテンソルの間に成立することになる。したがって、ひずみエネルギーを Green ひずみテンソルの 2 次形式として表わすことができるが、Przemieniecki⁴⁾、Martin⁵⁾、前田と林ら⁶⁾は、はり理論において、最も簡単な形の Green ひずみの 2 乗形式のひずみエネルギーを用いている。

また有限変形の数値解法として用いられる増分法として次のようなものがある。① 変形前状態を基準とした Kirchhoff 応力と Green ひずみの増分の関係を、仮想仕事の原理より求める鷲津⁷⁾、川井⁸⁾、堀井ら⁹⁾の著書、論文にみられる方法、② ひずみ速度と応力変化率の積として仮想仕事の原理を表わす山田¹⁰⁾の理論、③ 内部ひずみエネルギーの 2 次の導関数によって接線剛性マトリックスを得ようとする Mallet と Marcal¹¹⁾、Stricklin¹²⁾、Oran¹³⁾、大地¹⁴⁾らの解法、④ 変形の中間状態からの変位とひずみの増分についてのポテンシャルエネルギー停

留条件を用いた Martin¹⁵⁾ の解法がある。

ここでは鷲津¹⁶⁾ のいう Lagrange-Euler 併用形で、割線増分形エネルギー基礎式が誘導される。図-1 に示すように物体の変形を、変形前 (1 の状態)、変形の中間状態 (2 の状態) およびそれより荷重増分があった後の変形の状態 (3 の状態、以下単に増分後という) の 3 段階に分け、変形の中間状態において右手系 Cartesian 基準座標系と同じ座標が物体内部に埋め込まれるものとし、その埋め込み座標は変形後に歪曲されて曲線座標系を形成することに注目して、曲線座標系におけるテンソル解析の手法を用い、変形の中間状態を基準とした増分後の Kirchhoff 応力と力のつり合い式が成立することを示す。

次に中間状態において、外力 p が作用してそれより有限の変位増分 Δu があるとき、外力 p が Δu に対してなす仮想仕事 $p \cdot \Delta u$ の総和は、外力 p に伴い物体内部に生ずる Kirchhoff 応力テンソル T_K が、変位 Δu に対応する一種のひずみテンソル増分 ΔE_K に対してなす仮想仕事 $\text{trace}(T_K \Delta E_K)$ の総和に等しいことを示す。

従来の有限変形における仮想仕事の原理¹⁷⁾においては、外力が微小変位増分に対してなす仮想仕事と、Kirchhoff 応力が微小の Green ひずみ増分に対してなす仮想仕事とが等しいという原理であったが、この変位が微小でなく有限であるとき、Kirchhoff 応力と対となるひずみとして Green ひずみとは異なるひずみ ΔE_K が現われるのである。

また、中間状態を基準とした増分形停留ポテンシャルエネルギーの原理をシンボル記法を用いた変分法によって誘導する。近年連続体力学の理論がシンボル記法に従って組み立てられることが多い^{18)~20)}。テンソル解析においては、マトリックスをテンソル成分の配列と定義してシンボル記法と区別している²¹⁾。ここで展開される解法において、添字付記法よりむしろシンボル記法に従ったが、厳密にはテンソル解析というシンボル記法とも多

* 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科

少異質の点もあると思われ、むしろマトリックステンソル記法²³⁾という方が適切かもしれない。

2. 増分形有限変形の幾何学

有限変形において、変形前の表面積と体積に換算された Kirchhoff 応力と表面力および物体力を用い、Lagrange 流に変形前の座標について、つり合い式を表示できることは、すでに Kappus²³⁾ の証するところであり、近年 Dym と Shames²⁴⁾、Fung²⁵⁾、鷲津²⁶⁾、吉村²⁷⁾、山田²⁸⁾ からも種々の観点からこの問題の解を紹介している。

ここでは、上記の変形前を基準とした（と略述する）Kirchhoff 応力およびつり合い式と同様に、変形の間状態を基準とした Kirchhoff 応力およびつり合い式を、鷲津のいう Euler-Lagrange 併用形として表わすことができることを、シンボル記法を用いて確認し、有限変形におけるエネルギー理論のシンボル記法による展開の準備とする。

図-1 に示すように、変形前の物体内部の1点 P_0 が変形の間状態において点 P' に達するものとする。空間に固定された右手系直交座標系において、点 P_0 および P' の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ および $\mathbf{x}' = [x'_1 \ x'_2 \ x'_3]^T$ とする。添字 T は転置記号である。この空間に固定された基準座標系と同じ座標が中間状態において物体内部に埋め込まれているものとする、それより荷重増分があり物体が変形するとともに、埋め込み座標も歪曲し曲線座標を形成することになる。点 P' は増分後に変位 $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \Delta u_3]^T$ を生じて点 P に至るが、点 P' と P の埋め込み座標には変わりがない。しかし、固定された基準座標系に対しての点 P の位置ベクトル $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ は、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \Delta \mathbf{u} \dots \dots \dots (1)$$

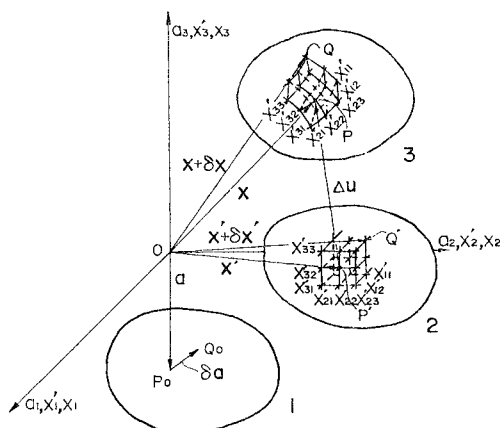


図-1 物体内部の任意点の位置ベクトルと埋め込み座標
(1 変形前, 2 変形の間状態, 3 変形後)

となる。 \mathbf{x}' と \mathbf{x} とは 1:1 の対応があるから、 \mathbf{x} は \mathbf{x}' のベクトル値ベクトル関数で $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}')$ であり、逆に $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x})$ が成立する。この式はまた、増分後の物体内部の任意点 P の埋め込み曲線座標 \mathbf{x}' と、基準座標系における P の位置ベクトル \mathbf{x} の関係式でもある。点 P' に接近する点、 Q' の位置ベクトルを $\mathbf{x}' + \delta \mathbf{x}'$ とする。 $\delta \mathbf{x}'$ は変形の間状態における微小線素ベクトル $\overrightarrow{P'Q'}$ である。この Q' が増分後に位置ベクトルが $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ の点 Q に移動するものとすれば、線素 $\delta \mathbf{x}'$ は変形後に $\overrightarrow{PQ} = \delta \mathbf{x}$ となり、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_1} \delta x'_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_2} \delta x'_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_3} \delta x'_3 \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \delta \mathbf{x}' \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

である。ここに、

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_1} \ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_2} \ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_3} \right] \equiv [e_1 \ e_2 \ e_3] \dots (3)$$

は、Jacobian マトリックスである。式 (2) において、

$$\delta \mathbf{x}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_1} \delta x'_1 = e_i \delta x'_i$$

は、変形の間状態における線素 $[\delta x'_1 \ 0 \ 0]^T$ の増分後の線素ベクトルで、一般に、

$$\delta \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_i} \delta x'_i = e_i \delta x'_i \text{ (和をとらない)} \dots (4)$$

である。以下総和規約を用いるが、同じ添字が2度以上現われて総和規約に従わないときは、その右に（和をとらない）と記す。

式 (4) の $\delta \mathbf{x}_i$ は、変形の間状態において、基準座標系の座標線方向に辺をもつ、図-2 に示すような微小直立方体が、増分後に歪曲されて形成する微小6面体の1辺を形成するベクトルを与える。 e_i は基底ベクトルであり、その方向の単位ベクトルは、

$$l_i = \frac{e_i}{\sqrt{g_{ii}}} \text{ (和をとらない)} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、

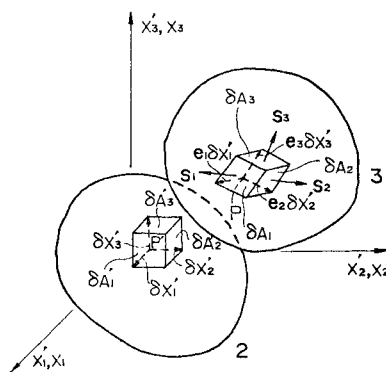


図-2 変形後に歪曲された微小6面体に作用する応力 s_i
(2 中間状態, 3 変形後)

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_j} \quad (\text{和をとらない}) \dots (6)$$

は注1) 共変計量テンソル

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right) \dots \dots \dots (7)$$

の対角要素である。なお、その非対角要素は、

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_j} \quad (i \neq j) \dots \dots \dots (8)$$

である。増分後の微小6面体の1辺を形成するベクトル $\delta \mathbf{x}_i$ のノルムは、式(4)、(6)を用いて、

$$|\delta \mathbf{x}_i| = \sqrt{\delta \mathbf{x}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i} = \sqrt{g_{ii}} \delta x'_i \quad (\text{和をとらない}) \dots \dots \dots (9)$$

また、 $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i \delta x'_i$ (和をとらない) と $\delta \mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \delta x'_j$ (和をとらない) を辺とする増分後の微小6面体の側面積 δA_k を、次式のようにベクトル表示する。すなわち、この側面の外側法線方向の、いわゆる双対基底ベクトルを \mathbf{e}^k とすると面積ベクトル

$$\left. \begin{aligned} \delta A_k &= \delta \dot{A}_k \mathbf{e}^k \quad (\text{和をとらない}) \\ &= \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \delta x'_i \delta x'_j \\ &\quad (\text{和をとらない, } i \neq j, j \neq k, k \neq i) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

ここに $\delta \dot{A}_k$ は必ずしも $\delta A_k = |\delta A_k|$ に一致しない。

$\delta \mathbf{x}_1, \delta \mathbf{x}_2$ および $\delta \mathbf{x}_3$ を辺とする増分後の微小6面体の体積 δV は、 δA_1 と $\delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 \delta x'_1$ の内積であり、

$$\delta V = \delta A_1 \cdot \mathbf{e}_1 \delta x'_1 = \delta \dot{A}_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \delta x'_1 \dots \dots \dots (11)$$

後に式(21)に示すように $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ であり、また式(3)と(10)を考慮して式(11)は、

$$\left. \begin{aligned} \delta V &= \delta \dot{A}_1 \delta x'_1 \\ &= (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 \delta x'_1 \delta x'_2 \delta x'_3 \\ &= \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right| \delta V' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

となる注2)。ここに $\delta V' = \delta x'_1 \delta x'_2 \delta x'_3$ は変形の中間状態における微小直方体の体積であり、 $|\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}'|$ はマトリックス $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}'$ の行列式である。増分後の曲線座標系における計量テンソル \mathbf{G} の行列式を g とすると、

$$g = |\mathbf{G}| = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right) \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right|^2 \dots \dots \dots (13)$$

となる注3)から、

$$\sqrt{g} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right| \dots \dots \dots (14)$$

を得る。なお中間状態と増分後の微小6面体の密度をそれぞれ ρ', ρ とすれば $\rho \delta V = \rho' \delta V'$ であるから式(14)を式(12)の第3式に用い、

$$\sqrt{g} = \frac{\delta V}{\delta V'} = \frac{\rho'}{\rho} \dots \dots \dots (15)$$

である。また式(12)の第1式と第3式および式(14)により、

$$\delta \dot{A}_1 = \sqrt{g} \delta x'_2 \delta x'_3 = \sqrt{g} \delta A_1'$$

ここに、 $\delta A_1' = \delta x'_2 \delta x'_3$ は中間状態における微小直方体の側面積で、同様に任意の側面に対して、

$$\delta \dot{A}_k = \sqrt{g} \delta A_k' \dots \dots \dots (16)$$

であるから、これを式(10)の第1式に代入すれば、

$$\mathbf{A}_k^* = \frac{\delta \dot{A}_k}{\delta A_k'} = \sqrt{g} \mathbf{e}^k \dots \dots \dots (17)$$

しかるに双対基底ベクトル \mathbf{e}^k は、

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \left[\frac{\partial x'_1}{\partial x} \quad \frac{\partial x'_2}{\partial x} \quad \frac{\partial x'_3}{\partial x} \right] = [\mathbf{e}^1 \quad \mathbf{e}^2 \quad \mathbf{e}^3] \dots \dots \dots (18)$$

のように与えられるから、次式で定義される面積ベクトル

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{*T} \\ \mathbf{A}_2^{*T} \\ \mathbf{A}_3^{*T} \end{bmatrix} = \sqrt{g} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{1T} \\ \mathbf{e}^{2T} \\ \mathbf{e}^{3T} \end{bmatrix} = \sqrt{g} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \dots \dots \dots (19)$$

を得る。

なお、式(3)と式(18)より $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}'$ と $\partial \mathbf{x}' / \partial \mathbf{x}$ の積は単位マトリックス \mathbf{I} に等しく、

$$\mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^3 \\ & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^3 \\ \text{sym.} & & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^3 \end{bmatrix} \dots \dots (20)$$

であるから、

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij} \dots \dots \dots (21)$$

である。ここに sym. は対称を意味し、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である。

3. 中間状態を基準とした Lagrange 応力, Kirchhoff 応力および物理的応力

変形前を基準とした Lagrange 応力や Kirchhoff 応力の定義および両者の関係は、たとえば鷲津²⁹⁾や Fung³⁰⁾の著書にみられるとおりでである。ここでは、まず中間状態を基準とした Lagrange 応力および Kirchhoff 応力を定義し、また、変形前を基準とした上記の両応力との同じ型の関係式が、中間状態を基準とした Lagrange 応力と Kirchhoff 応力の間にも成立することを、シンボル記法に従って明らかにする。

なお、鷲津や Fung は、Lagrange 応力テンソル \mathbf{S} から、後述の式(37)に従って Euler 応力テンソル \mathbf{T} を推定する。ここでは Euler 応力 \mathbf{T} より式(23)に基づいて Lagrange 応力 \mathbf{S} を誘導する。その方が、物理的意義がより明瞭で理解しやすい解法と思われる。

変形の中間状態において、右手系基準座標系の座標線方向に辺をもつ、物体内部の微小直方体の側面積 $[\delta A_1'$

注1) 内積記号 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は、マトリックス記法で $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ である。ここではいずれの記法をも用いる。
 2) 三重積 $(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = |\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3| = |\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}'|$
 3) \mathbf{A}, \mathbf{B} を正方マトリックスとすると $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

$\delta A_2' \delta A_3'$ は、増分後に歪曲されて側面積は $[\delta A_1 \delta A_2 \delta A_3]$ となる。この増分後の微小 6 面体の第 i 番目の側面積に作用する応力ベクトルを s_i とする。ただしベクトル s_i は基準座標系の座標線方向の成分で構成されるものとする、

$$S = \left[s_1 \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} \quad s_2 \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} \quad s_3 \frac{\delta A_3}{\delta A_3'} \right] \dots\dots\dots (22)$$

で定義される S は Lagrange 応力マトリックスである。増分後の弾性体内部に生ずる通常の応力、すなわち Euler 応力テンソルを $T = [\tau_1 \tau_2 \tau_3]$ とし、応力ベクトル s_i の作用する面の外側への法線ベクトルを n_i とすると、

$$s_i = T n_i \dots\dots\dots (23)$$

$$\delta A_i = n_i \delta A_i \text{ (和をとらない)} \dots\dots\dots (24)$$

であるから、式 (23) を式 (22) に代入し、また式 (19) と式 (24) を用いて、

$$S = \left[T \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} \quad T \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} \quad T \frac{\delta A_3}{\delta A_3'} \right] \\ = T A^* T = \sqrt{g} T \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^T \dots\dots\dots (25)$$

応力ベクトル s_i を、増分後の斜交する微小 6 面体の各辺の方向の反変成分 τ^{ij} に分解する。すなわち総和規約を用い、

$$s_i = \tau^{ik} e_k \dots\dots\dots (26)$$

上式に式 (5) を代入すれば、

$$s_i = \tau^{ik} \sqrt{g_{kk}} l_k \\ \equiv \sigma_{ik} l_k = \sigma_{ik} \frac{e_k}{\sqrt{g_{kk}}} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、

$$\sigma_{ik} = \tau^{ik} \sqrt{g_{kk}} \text{ (和をとらない)} \dots\dots\dots (28)$$

は、増分後の微小 6 面体の側面に作用する物理的応力成分である。したがって、

$$s_i \frac{\delta A_i}{\delta A_i'} = [e_1 e_2 e_3] \begin{bmatrix} \tau^{i1} \\ \tau^{i2} \\ \tau^{i3} \end{bmatrix} \frac{\delta A_i}{\delta A_i'} \text{ (和をとらない)} \\ = [e_1 e_2 e_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{i1} \\ \sigma_{i2} \\ \sigma_{i3} \end{bmatrix} \frac{\delta A_i}{\delta A_i'}$$

となり、上式を式 (22) に代入して、Lagrange 応力マトリックス

$$S = [e_1 e_2 e_3] \begin{bmatrix} \tau^{11} & \tau^{21} & \tau^{31} \\ \tau^{12} & \tau^{22} & \tau^{32} \\ \tau^{13} & \tau^{23} & \tau^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} & & 0 \\ & \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} & \\ 0 & & \frac{\delta A_3}{\delta A_3'} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

を得る。また、物理的応力成分 σ_{ij} からなるマトリク

スを

$$\Sigma T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

とするとき、Kirchhoff 応力マトリックスは、

$$T_K T = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} & & 0 \\ & \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} & \\ 0 & & \frac{\delta A_3}{\delta A_3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^{11} & \tau^{12} & \tau^{13} \\ \tau^{21} & \tau^{22} & \tau^{23} \\ \tau^{31} & \tau^{32} & \tau^{33} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} & & 0 \\ & \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} & \\ 0 & & \frac{\delta A_3}{\delta A_3'} \end{bmatrix} \Sigma T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

のように定義される注 4)。式 (3) と式 (31) の第 1 式を式 (29) に代入し、

$$S = \frac{\partial x}{\partial x'} T_K \dots\dots\dots (32)$$

であり、さらに式 (20) および (25) を上式に用い、次式

$$T_K = \frac{\partial x'}{\partial x} S = \sqrt{g} \frac{\partial x'}{\partial x} T \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^T \dots\dots\dots (33)$$

を得る。Euler 応力 T は対称であるから T_K もまた対称である。

4. 有限変形する物体の境界における 釣り合い式

Lagrange 応力および Kirchhoff 応力で表わした、中間状態を基準とした増分後の境界条件を導いてみよう。図-3 に示すとおり、中間状態において弾性体の微小境界面 $A'B'C'$ の面積を $\delta A'$ 、境界面 $A'B'C'$ の外側への法線ベクトルを n' とする。基準座標系の座標面に平行な側面と境界面 $A'B'C'$ が作る微小 4 面体 $O'A'B'C'$ が、増分後に面積 δA の境界面をもつ微小 4 面体 $OABC$ になるものとして、この微小 4 面体 $OABC$ に作用する力の釣り合い式を求めよう。

増分後の面 ABC に作用する表面力 p が基準座標系成分で構成されるものとし、

$$p^* = p \frac{\delta A}{\delta A'} \dots\dots\dots (34)$$

を定義する。 p と微小 4 面体の側面に作用する、前節で定義された応力ベクトル s_i との釣り合い式は、

$$p^* \delta A' = p \delta A \\ = s_i \frac{\delta A_i}{\delta A_i'} \delta A_i' = S \begin{bmatrix} \delta A_1' \\ \delta A_2' \\ \delta A_3' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

注 4) T_K および S は 2 階のテンソルである。

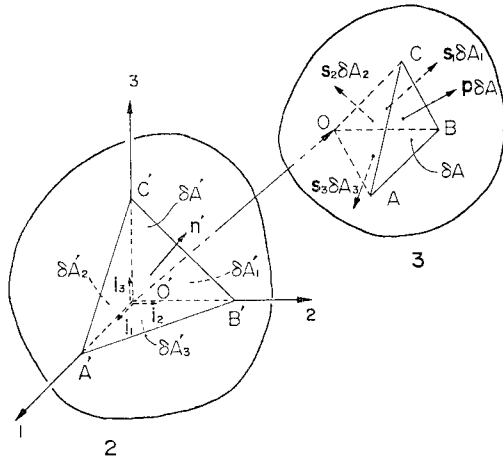


図-3 変形後の物体に作用する表面力 p と s_i との関係 (2 中間状態, 3 変形後)

一方中間状態における微小4面体 $O'A'B'C'$ の境界面の面積 $\delta A'$ とそれ以外の側面積 $\delta A_k'$ の間には、基準座標軸方向の単位ベクトルを $i_1=[1\ 0\ 0]^T$, $i_2=[0\ 1\ 0]^T$, $i_3=[0\ 0\ 1]^T$ とするとき

$$-[i_1\ i_2\ i_3] \begin{bmatrix} \delta A_1' \\ \delta A_2' \\ \delta A_3' \end{bmatrix} + n' \delta A' = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

という幾何学的関係があり、しかるに $[i_1\ i_2\ i_3]=I$ であるから、上式 (36) を式 (35) に代入して、

$$S n' = p^* \quad \dots\dots\dots (37)$$

を得る。また式 (32) に式 (37) を代入すれば、

$$\frac{\partial x}{\partial x'} T_K n' = p^* \quad \dots\dots\dots (38)$$

を得る。式 (37), (38) は境界におけるつり合い式である。

5. 有限変形する物体内部のつり合い式

図-1 に示すように、中間状態において物体内部の1点 P' の位置ベクトルを x' とし、点 P' は増分後に位置ベクトルが x の点 P に達して Euler 応力テンソルが $T=[\tau_1\ \tau_2\ \tau_3]$ になるものとする。 T は位置ベクトル x のテンソル値ベクトル関数であるが、 x と x' とは 1:1 の対応があるから $T=T(x)=T\{x(x')\}$ である。

点 P におけるつり合い式は、物体力を f とすると、

$$T \frac{\partial}{\partial x} + f = 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

である。ここに $\partial/\partial x=[\partial/\partial x_1\ \partial/\partial x_2\ \partial/\partial x_3]^T$ であり、

$$T \frac{\partial}{\partial x} = T \nabla = \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_k \quad \dots\dots\dots (40)$$

と定義する³¹⁾。式 (39) において変数 x を x' に変換

することによって、変形の中間状態を基準とした有限変形における物体内部のつり合い式を誘導する。

Jacobian マトリックス $\partial x/\partial x'=[\partial x/\partial x_1'\ \partial x/\partial x_2'\ \partial x/\partial x_3']$ の余因子を d_{ij} とすれば、式 (14), (20) を用い、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

これより、

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \frac{1}{\sqrt{g}} d_{ki} \quad \dots\dots\dots (42)$$

上式を式 (40) に代入し、また式 (41) を用い、

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \sqrt{g} \left(\frac{\partial}{\partial x_i'} \tau_k \right) \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i'} (\tau_k d_{ki}) - \tau_k \frac{\partial}{\partial x_i'} d_{ki} \\ &= \left\{ [\tau_1\ \tau_2\ \tau_3] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x'} \\ &\quad - [\tau_1\ \tau_2\ \tau_3] \left\{ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{g} T \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^T \right\} \frac{\partial}{\partial x'} - T \left\{ \sqrt{g} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^T \right\} \frac{\partial}{\partial x'} \end{aligned}$$

しかるに、補遺 1, 式 (A・4) が成立するので、また式 (25) より、

$$\sqrt{g} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left\{ \sqrt{g} T \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^T \right\} \frac{\partial}{\partial x'} = S \frac{\partial}{\partial x'} \quad \dots\dots\dots (43)$$

上式を式 (39) に代入しかつ式 (15) を用い、

$$S \frac{\partial}{\partial x'} + f^* = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここに、

$$f^* = \sqrt{g} f = f \frac{\partial V}{\partial V'} \quad \dots\dots\dots (45)$$

は、増分後の物体力 f を中間状態における体積に換算したもので、さらに式 (32) を式 (44) に用いると、次式

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x'} T_K \right) \frac{\partial}{\partial x'} + f^* = 0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

が誘導される。

式 (22) および式 (33) で定義される応力テンソルを、それぞれ中間状態を基準とした Lagrange 応力テンソルおよび Kirchhoff 応力テンソルといい、式 (37), (38) および式 (44), (46) を有限変形における中間状態を基準としたつり合い式ということにする。これらの式の x' の代わりに変形前位置ベクトル a を用いると、通常用いられる変形前を基準とした場合における応力テンソル

ルやつり合い式となる。

6. 有限変形における増分形仮想仕事の原理

(1) 有限変位に対してなす仮想仕事

変形の中間状態より、有限の変位 Δu を生じてつり合い状態にある物体に作用する物体力を f 、表面力を p とする。表面力 p が有限の変位 Δu に対してなす仮想仕事 ΔW_1 は、式 (34), (37) と Gauss の定理を用い、

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= \iint_A p \cdot \Delta u dA = \iint_{A'} p^* \cdot \Delta u dA' \\ &= \iint_{A'} (S n')^T \Delta u dA' \\ &= \iiint_{V'} \text{trace} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} (S^T \Delta u) \right\} dV' \\ &= \iiint_{V'} \left\{ \Delta u^T \left(S \frac{\partial}{\partial x'} \right) + \text{trace} \left(S^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right) \right\} dV' \end{aligned} \tag{47}$$

のように中間状態における体積要素 dV' についての積分として表わすことができる注5)。式 (47) の誘導の詳細は補遺 2 に示す。これより、物体力 f と表面力 p が有限の変位 Δu に対してなす仮想仕事の総和 ΔW は、式 (45), (47) と、また式 (44) および式 (32) を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta W &= \iint_A p \cdot \Delta u dA + \iiint_V f \cdot \Delta u dV \\ &= \iint_{A'} p^* \cdot \Delta u dA' + \iiint_{V'} f^* \cdot \Delta u dV' \\ &= \iiint_{V'} \text{trace} \left(S^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right) dV' \\ &= \iiint_{V'} \text{trace} \left\{ T_K \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right) \right\} dV' \\ &= \iiint_{V'} \text{trace} (T_K \Delta E_{K1}) dV' = \Delta U \end{aligned} \tag{48}$$

である。

上式は、増分後の物体力 f と表面力 p が中間状態よりの荷重増分に伴う有限変位 Δu に対してなす仮想仕事の総和 ΔW は、中間状態を基準とした増分後の状態における Kirchhoff 応力テンソル T_K が、 Δu に伴い物体内部に生ずる一種のひずみ増分 ΔE_{K1} に対してなす仮想仕事の総和、換言すれば一種のひずみエネルギー増分 ΔU に等しいことを示す。

一種のひずみ ΔE_{K1} とは、

$$\begin{aligned} \Delta E_{K1} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right) \\ &= \left(I + \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \end{aligned} \tag{49}$$

注 5) 積分記号下の添字 A, V は増分後の、 A', V' は中間状態における全領域にわたる定積分を意味する。

$$= \Delta E_g + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right) + \Delta W \tag{49}$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} \Delta E_g &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial x}{\partial x'} - I \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right\} \end{aligned} \tag{50}$$

は Green ひずみテンソルの増分であり、

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial x'} - \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \right\} \tag{51}$$

は微小変位理論における回転テンソルで逆対称マトリックスである。また T_K は対称マトリックスで

$$\begin{aligned} \text{trace}(\Delta W T_K) &= \text{trace}(T_K \Delta W^T) \\ &= -\text{trace}(\Delta W T_K) \end{aligned}$$

であり注6)、したがって $\text{trace}(T_K \Delta W) = 0$ となるから、

$$\Delta E_K = \Delta E_g + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right)^T \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x'} \right) \tag{52}$$

を定義とすると、式 (48) は

$$\Delta W = \iiint_{V'} \text{trace}(T_K \Delta E_K) dV' = \Delta U \tag{53}$$

となる注7)。すなわち、 p と f が有限の変位 Δu に対してなす仮想仕事の総和は、Kirchhoff 応力 T_K が ΔE_K に対してなす仮想仕事の総和に等しいという、増分形有限変形仮想仕事の原理が誘導された。なお変位 Δu は有限であっても、ひずみおよび回転変位が微小の場合は、通常の微小変形仮想仕事の原理に従うことが示される。また ΔE_K は対称であることも容易に証明される。

(2) 微小変位に対してなす仮想仕事

物体力 f と表面力 p を受け、中間状態より有限の変形を生じつり合い状態にあるものとする。この状態の前後に微小の仮想変位 $\delta \Delta u$ を生じたものとして、 p と f が $\delta \Delta u$ に対してなす仮想仕事の総和 $\delta \Delta W$ は、式 (48) の有限の変位 Δu の代わりに $\delta \Delta u$ を用いると、

$$\begin{aligned} \delta \Delta W &= \iiint_{V'} f \cdot \delta \Delta u dV + \iint_A p \cdot \delta \Delta u dA \\ &= \iiint_{V'} f^* \cdot \delta \Delta u dV' + \iint_{A'} p^* \cdot \delta \Delta u dA' \\ &= \iiint_{V'} \text{trace} \left\{ T_K \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \left(\frac{\partial \delta \Delta u}{\partial x'} \right) \right\} dV' \end{aligned} \tag{54}$$

しかるに式 (1) より $\partial x / \partial x'$ の微分は、

注 6) $\text{trace}(AB) = \text{trace}\{(AB)^T\} = \text{trace}(BA)$ の公式を用いる。

7) $T_K = \{\tau_{Kij}\}$, $\Delta E_K = \{\Delta e_{Kij}\}$ とすれば $\text{trace}(T_K \Delta E_K) = \tau_{Kij} \Delta e_{Kij}$ である。これはよく知られた総和規約によるひずみエネルギー密度の表示である。

$$\delta\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'}\right) = \delta\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'}\right) = \frac{\partial \delta \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \dots\dots\dots (55)$$

である. 式 (50) の第1式の Green ひずみ増分 $\Delta \mathbf{E}_g$ の微分は

$$\delta \Delta \mathbf{E}_g = \frac{1}{2} \left[\left\{ \delta \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \right\} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \delta \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right) \right] \dots\dots\dots (56)$$

また, \mathbf{T}_K は対称マトリックスであるので, 式 (55), (56) を用い,

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathbf{T}_K \delta \Delta \mathbf{E}_g) &= \text{trace} \left\{ \mathbf{T}_K \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \delta \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right) \right\} \\ &= \text{trace} \left\{ \mathbf{T}_K \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \frac{\partial \delta \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \right\} \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

であるから, これを式 (54) に用い,

$$\begin{aligned} &\iint \iint_V \text{trace} \{ \mathbf{T}_K \delta \Delta \mathbf{E}_g \} dV' \\ &- \iint \iint_{V'} \mathbf{f}^* \cdot \delta \Delta \mathbf{u} dV' - \iint \iint_{A'} \mathbf{p}^* \cdot \delta \Delta \mathbf{u} dA' = 0 \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

を得る. すなわち, 外力 \mathbf{p} と \mathbf{f} を受け, 有限の変位を生じた状態で, その前後に微小の変位 $\delta \mathbf{u}$ を仮想するとき, $\delta \Delta \mathbf{u}$ に対して \mathbf{p}^* と \mathbf{f}^* のなす仕事の総和は, Kirchhoff 応力 \mathbf{T}_K が $\delta \Delta \mathbf{u}$ に伴う, 中間状態を基準とした微小の Green ひずみ増分 $\delta \Delta \mathbf{E}_g$ に対してなす仮想仕事の総和に等しい. たとえば鷺津¹⁶⁾, Stricklin³²⁾ の論文にみられる仮想仕事の原理である.

7. 中間状態からの有限変位を変関数とする 停留ポテンシャルエネルギーの原理

鷺津³⁷⁾ や Dym と Shames³⁸⁾ らは, 仮想仕事の原理からただちに停留ポテンシャルエネルギーの原理を導いている. 同様の推論を適用すれば, 式 (58) の仮想仕事の原理に対応する全ポテンシャルエネルギーは,

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \iint \iint_V \text{trace}(\mathbf{T}_K \Delta \mathbf{E}_g) dV' \\ &- \iint \iint_{V'} \mathbf{f}^* \cdot \Delta \mathbf{u} dV' - \iint \iint_{A'} \mathbf{p}^* \cdot \Delta \mathbf{u} dA' \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

で, ひずみエネルギー密度を与えるひずみテンソルとして $\Delta \mathbf{E}_K$ でなく $\Delta \mathbf{E}_g$ を用いるべきことが推定される. ここに $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \Delta u_3]^T$ とする.

上式が, 中間状態からの有限変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ に関して, 増分後のつり合い状態において停留となることを, 厳密に変分原理の手法を用いて証明してみよう.

式 (50) で定義される $\Delta \mathbf{E}_g$ は $\Delta \mathbf{u}$ の関数とみなし得るから, $\Delta \mathbf{u}$ のみを変関数とすることができるが, また,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T &= \left[\frac{\partial \Delta u_1}{\partial \mathbf{x}'} \ \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \mathbf{x}'} \ \frac{\partial \Delta u_3}{\partial \mathbf{x}'} \right] \\ &\equiv [\Delta u_1' \ \Delta u_2' \ \Delta u_3'] \equiv \Delta \mathbf{U}'^T \end{aligned} \right\} \dots\dots (60)$$

とすると, 式 (50) は,

$$\Delta \mathbf{E}_g - \frac{1}{2} \{ \Delta \mathbf{U}' + \Delta \mathbf{U}'^T + \Delta \mathbf{U}'^T \Delta \mathbf{U}' \} = \mathbf{0} \dots\dots (61)$$

となるから, 式 (59) の $\Delta \Pi$ の停留条件は, 式 (61) の付帯条件のもとでの, 自変数を $\mathbf{x}' = [x_1' \ x_2' \ x_3']^T$, 変関数を $\Delta \mathbf{u}$ と $\Delta \mathbf{E}_g$ とする変分の原理に従って解くことも可能である. すなわち式 (59) の代わりに, 次式

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &\equiv \iiint \iint_{V'} f(\mathbf{x}'; \Delta \mathbf{E}_g, \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{U}') dV' \\ &+ \iint \iint_{A'} H(\mathbf{x}'; \Delta \mathbf{u}) dA' \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}'; \Delta \mathbf{E}_g, \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{U}') &= \text{trace}(\mathbf{T}_K \Delta \mathbf{E}_g) \\ &+ \text{trace} \left[\left\{ \Delta \mathbf{E}_g - \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{U}' + \Delta \mathbf{U}'^T + \Delta \mathbf{U}'^T \Delta \mathbf{U}') \right\} \mathbf{A} \right] \\ &- \mathbf{f}^* \cdot \Delta \mathbf{u} \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

$$H(\mathbf{x}'; \Delta \mathbf{u}) = -\mathbf{p}^* \cdot \Delta \mathbf{u} \dots\dots\dots (64)$$

とし, \mathbf{A} は Lagrange の未定係数で \mathbf{x}' の関数である. なお式 (63) の右辺第1項 $\text{trace}(\mathbf{T}_K \Delta \mathbf{E}_g)$ の \mathbf{T}_K は変関数 $\Delta \mathbf{E}_g$ とは独立の定数とみなす. これはひずみエネルギー密度関数である.

$\Delta \Pi$ の停留条件は, 総和記法を用い,

$$\begin{aligned} \delta \Delta \Pi &= \iiint \iint_{V'} \left[\text{trace} \left(\delta \Delta \mathbf{E}_g^T \frac{\partial f}{\partial \Delta \mathbf{E}_g} \right) \right. \\ &+ \delta \Delta u_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial \Delta u_i} - \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta u_i'} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \right\} \Big] dV' \\ &+ \iint \iint_{A'} \delta \Delta u_i \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta u_i'} \right)^T \mathbf{n}' + \frac{\partial H}{\partial \Delta u_i} \right\} dA' = 0 \dots\dots\dots (65) \end{aligned}$$

これより, 上式を満足する Euler 方程式として,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \Delta u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \Delta u_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \Delta u_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta u_1'} \right)^T \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta u_2'} \right)^T \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta u_3'} \right)^T \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{0}$$

あるいは,

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta \mathbf{u}} - \frac{\partial f}{\partial \Delta \mathbf{U}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (66)$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Delta \mathbf{E}_g} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{E}_g} \{ \text{trace}(\mathbf{T}_K \Delta \mathbf{E}_g) + \text{trace}(\Delta \mathbf{E}_g \mathbf{A}) \} \\ &= \mathbf{T}_K + \mathbf{A}^T = \mathbf{0} \dots\dots\dots (67) \end{aligned}$$

を得る注8). 境界において,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Delta \mathbf{U}'} \mathbf{n}' + \frac{\partial H}{\partial \Delta \mathbf{u}} &= \mathbf{0} \\ \delta \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

注 8) 補遺 3 および 4 を参照.

が停留条件となる．式 (63) の f の $\Delta U'$ についての導関数は，式 (67) を用い \mathbf{A} は対称となるので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Delta U'} &= \frac{\partial}{\partial \Delta U'} \text{trace} \left\{ -\frac{1}{2} (\Delta U' + \Delta U'^T + \Delta U'^T \Delta U') \mathbf{A} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{A}^T + \mathbf{A} + 2 \Delta U' \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{I} + \Delta U') \mathbf{T}_K = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \mathbf{T}_K \dots\dots\dots (69) \end{aligned}$$

である注9)．また，

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta u} = -\mathbf{f}^*, \quad \frac{\partial H}{\partial \Delta u} = -\mathbf{p}^* \dots\dots\dots (70)$$

であるから，式 (66) と (68) はそれぞれ

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \mathbf{T}_K \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} + \mathbf{f}^* = \mathbf{0} \dots\dots\dots (71)$$

および，

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \mathbf{T}_K \right) \mathbf{n}' = \mathbf{p}^* \quad \text{または} \quad \delta \Delta u = \mathbf{0} \dots\dots\dots (72)$$

となる．上の 2 式は中間状態を基準としたつり合い式 (46)，(38) に一致する．換言すれば，つり合い式 (46) と (38) は，式 (59) で定義される全ポテンシャルエネルギー $\Delta \Pi$ の極値条件と等価であるという，有限変形における増分形停留ポテンシャルエネルギーの原理が証明されたことになる．後藤³³⁾が幾何学的非線形解析に用いたエネルギー式は，式 (59) の最も簡略化された形式である．

8. 結 論

(1) 物体の変形を，変形前，変形の中間状態およびそれより荷重増分のあった後の状態 (増分後の状態) の 3 段階に分け，変形の中間状態を基準とした増分後の Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{T}_K と，かつ中間状態を基準とした増分後の物体の境界および内部におけるつり合い式を，シンボル記法を用いて示した．

(2) 鷺津のいう有限変形における Lagrange-Euler 併用形で，かつ割線増分形仮想仕事の原理を誘導した．すなわち変形の中間状態において表面力 \mathbf{p} と物体力 \mathbf{f} を受け，それよりの有限変位増分 Δu を生じたものとする． \mathbf{p} と \mathbf{f} が有限変位 Δu に対してなす仮想仕事の総和は，有限変位 Δu に伴い物体内部に生ずる中間状態を基準とした Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{T}_K が，一種のひずみテンソル増分 $\Delta \mathbf{E}_K$ に対してなす仮想仕事 $\Delta U' = \text{trace}(\mathbf{T}_K \Delta \mathbf{E}_K)$ の総和に等しいこと，この一種のひずみテンソル増分 $\Delta \mathbf{E}_K$ は，Green ひずみテンソル増分 $\Delta \mathbf{E}_g$ と $(\partial \Delta u / \partial \mathbf{x}')^T (\partial \Delta u / \partial \mathbf{x}') / 2$ の和であることを示した．

(3) 中間状態において，表面力 \mathbf{p} と物体力 \mathbf{f} を受け，物体内部に中間状態を基準とした Kirchhoff 応力テ

ンソル \mathbf{T}_K と，中間状態よりの有限の変位 Δu を生じてつり合い状態にあるものとする．この状態の前後に仮想の微小変位 $\delta \Delta u$ が生じたものとして， \mathbf{p} と \mathbf{f} が $\delta \Delta u$ に対してなす仮想仕事の総和は， $\delta \Delta u$ に伴い物体内部に生ずる中間状態を基準とした Green ひずみテンソル増分 $\Delta \mathbf{E}_g$ に対してなす仮想仕事 $\text{trace}(\mathbf{T}_K \delta \Delta \mathbf{E}_g)$ の総和に等しいことをシンボル記法に従って証した．これは鷺津や Stricklin の論文にみられる型の仮想仕事の原理である．

(4) 中間状態からの有限変位増分 Δu および Δu に伴う Green ひずみ増分 $\Delta \mathbf{E}_g$ を変関数とする停留ポテンシャルエネルギーの原理を，シンボル記法による条件付変分原理に従い誘導した．この場合のひずみエネルギー密度関数は $\text{trace}(\mathbf{T}_K \Delta \mathbf{E}_g)$ であり， \mathbf{T}_K は定数とする．

なお，(2) の一種のひずみテンソル $\Delta \mathbf{E}_K$ の意味および本論の具体的応用例については，一部発表のとおり³⁶⁾であるが，詳細は改めて投稿の予定である．

【補 遺】

$$(1) \left\{ \sqrt{g} \left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{0} \quad \text{であることの証明}$$

式 (18) を用いて，

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{g} \left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} &= \frac{\partial}{\partial x_i'} (\sqrt{g} e^i) \\ &= \sqrt{g} \frac{\partial e^i}{\partial x_i'} + e^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i'} \\ &\dots\dots\dots (A \cdot 1) \end{aligned}$$

しかるに，

$$\frac{\partial e^i}{\partial x_i'} = -\Gamma_{ai}^a e^a \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

であり³⁴⁾，また，

$$\Gamma_{ai}^a = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_a'} \dots\dots\dots (A \cdot 3)$$

である³⁵⁾から，

$$\frac{\partial e^i}{\partial x_i'} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_a'} e^a$$

上式を式 (A・1) に代入して，

$$\left\{ \sqrt{g} \left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

となる．

(2) 式 (47) の証明

Gauss の定理によって，中間状態における面積要素 dA' についての下記の積分を体積要素 dV' についての積分に，シンボル記法に従って変換する．すなわち，

$$\iint_{A'} \mathbf{n}'^T \mathbf{S}^T \Delta u dA' = \iiint_{V'} \text{trace} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} (\mathbf{S}^T \Delta u) \right\} dV' \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

注 9) 補遺 3 参照．

しかるに、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} (S^T \Delta u) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1'} (S^T \Delta u) \quad \frac{\partial}{\partial x_2'} (S^T \Delta u) \quad \frac{\partial}{\partial x_3'} (S^T \Delta u) \right] \\ &= \left[\frac{\partial S^T}{\partial x_1'} \Delta u \quad \frac{\partial S^T}{\partial x_2'} \Delta u \quad \frac{\partial S^T}{\partial x_3'} \Delta u \right] \\ &+ \left[S^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x_1'} \quad S^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x_2'} \quad S^T \frac{\partial \Delta u}{\partial x_3'} \right] \\ &\equiv \frac{\partial S^T}{\partial \mathbf{x}'} \otimes \Delta u + S^T \frac{\partial \Delta u}{\partial \mathbf{x}'} \dots\dots\dots (A.6) \end{aligned}$$

しかるに、 S の要素を S_{iK} とするとき、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i'} S^T \right) \Delta u = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_{1K}}{\partial x_i'} \Delta u_K \\ \frac{\partial S_{2K}}{\partial x_i'} \Delta u_K \\ \frac{\partial S_{3K}}{\partial x_i'} \Delta u_K \end{bmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{trace} \left\{ \frac{\partial S^T}{\partial \mathbf{x}'} \otimes \Delta u \right\} &= \left(\frac{\partial S_{1K}}{\partial x_1'} + \frac{\partial S_{2K}}{\partial x_2'} + \frac{\partial S_{3K}}{\partial x_3'} \right) \Delta u_K \\ &= \Delta u^T \left(S \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \right) \dots\dots\dots (A.7) \end{aligned}$$

式 (A.7) を式 (A.6) に代入し、式 (A.6) をさらに式 (A.5) に用いると式 (47) を得る。

(3) マトリックスの微分公式

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{trace} (A^T X) \\ & \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{trace} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{a}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2^T \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3^T \mathbf{x}_3) \\ &= [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \mathbf{A} \dots\dots\dots (A.8) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{trace} (X^T X A) = 2 X A \dots\dots\dots (A.9)$$

ここに、 A は対称マトリックス、その i 行 j 列要素は a_{ij} で $A = \{a_{ij}\}$ とする。

[証]

$$X^T X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \mathbf{x}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] = \{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j\}$$

とすると、総和規約に従い、

$$\text{trace} (X^T X A) = a_{ij} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{trace} (X^T X A) &= \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} \right] a_{ij} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \\ &= 2 [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] A = 2 X A \end{aligned}$$

(4) 式 (65) の $\partial f / \partial \Delta E_g$ の意味

式 (50) で与えられる Green ひずみ テンソルの増分

$\Delta E_g = \{\Delta \varepsilon_{ij}\}$ は対称であるので 9 個の要素 $\Delta \varepsilon_{ij}$ のうち独立な変数は 6 個である。しかし式 (65), (67) の $\partial f / \partial \Delta E_g$ において、 ΔE_g の 9 個の要素はすべて独立の変関数とみなし、(A.8) に従い微分するものとする。この場合に ΔE_g が対称であって、 $\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ji}$ の条件は、式 (61) の付帯条件の中に設定されている。

参考文献

- 1) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，日本鋼構造協会編，コンピューターによる構造工学講座 II-3-A，培風館，pp. 126, 1972 年 2 月。
- 2) Dym, C.L. and I.H. Shames: Solid Mechanics, A Variational Approach (砂川恵監訳，材料力学と変分法，ブレイン図書 K.K., pp. 394~399, 1977 年 11 月)。
- 3) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，第 237 号，pp. 11~24, 1975 年 5 月。
- 4) Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company, pp. 386, 1968.
- 5) Martin, H.C.: On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems, Proceeding of the First Air Force Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, Vol. 2, AFFDL-TR-66-80, November, 1965.
- 6) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，第 253 号，p. 17, 1976 年 9 月。
- 7) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, pp. 393~394, 1975.
- 8) 川井忠彦：座屈問題解析，日本鋼構造協会編，コンピューター構造工学講座 II-6-B，培風館，pp. 142~143, 1974 年 10 月。
- 9) 堀井健一郎・斉藤 進・川原睦人・森 繁：骨組構造の大変形解析，土木学会論文報告集，第 191 号，pp. 17~18, 1971 年 7 月。
- 10) 山田嘉昭：塑性，粘弾性，日本鋼構造協会編，コンピューターによる構造工学講座 II-2-A，培風館，pp. 18~45, 1972 年 5 月。
- 11) Mallet, R.H. and P.V. Marcal: Finite Element Analysis of Nonlinear Structure, Journal of the Structural Division, Proceeding of A.S.C.E., Vol. 94, No. ST. 9, pp. 2083~2085, September, 1968.
- 12) Stricklin, J.A., W.E. Haisler and Von W.A. Rise-mann: Geometrically Nonlinear Structural Analysis by Direct Stiffness Method, Journal of Structural Division, Proceeding of A.S.C.E., Vol. 97, ST. 9, pp. 2229~2313, September, 1971.
- 13) Oran, C.: Tangent Stiffness in Plane Frames, Journal of Structural Division, Proceeding of A.S.C.E., Vol. 99, ST. 6, pp. 973~985, June, 1973.
- 14) 大地羊三：構造解析とコンピューター，産業図書，pp. 239~249, 1971 年 5 月。
- 15) Martin, H.C.: Finite Elements and Analysis of Geometrically Nonlinear Problems, U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, pp. 343~381, 1969.
- 16) 前掲 7), p. 395.
- 17) 前掲 1), 前掲 2)。
- 18) 佐武正雄：変形の表現について，土木学会論文報告集，第 134 号，1966 年 10 月。
- 19) Leigh, D.C.: Nonlinear Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1968 (村上澄男訳：非線形連続体力学，共立

- 出版, 1975 年 10 月.
- 20) Truesdell, C. : A First Course in Rational Continuum Mechanics, Vol. 1, Academic Press, pp. 119~156, 1977.
- 21) Nickerson, H.K., D.C. Spencer and N.E. Steenrod : Advanced Calculus, D. Van Nostrand, 1959 (原田重春・佐藤正次訳 : 現代ベクトル解析, 岩波書店, p. 26, 1965 年 4 月).
- 22) Borg, S.F. : Matrix-Tensor Methods in Continuum Mechanics, D. Van Nostrand Company, 1963 (伊藤徳之助 : 応用ベクトル解析, 丸善出版, pp. 374~410, 1950 年 12 月).
- 23) 倉西正嗣 : 弾性学, pp. 37~41, 1957 年 4 月.
- 24) 前掲 2), pp. 375~394.
- 25) Fung, Y.C. : Foundation of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc. (大橋義男・村上澄男・神谷紀生共訳 : 固体の力学, 培風館, pp. 440~448, 1970 年 4 月).
- 26) 前掲 1), pp. 112~119.
- 27) 吉村慶丸 : 非線形有限変形弾性理論 I, 日本機械学会論文集 (第 1 部), 26 卷 167 号, pp. 988~994, 1960 年 7 月.
- 28) 前掲 10), pp. 27~41.
- 29) 前掲 1), pp. 182~186.
- 30) 前掲 25), pp. 444, 445.
- 31) 前掲 19), p. 62.
- 32) Stricklin, J.A.; Von W.A. Riesenmann, J.R. Tillerson and W.E. Haisler : Static Geometric and Material Nonlinear Analysis, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, the 2nd U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, pp. 307~309, August, 1972.
- 33) 後藤茂夫・羽根悟郎・田中達朗 : 接線剛性法による骨組構造物の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第 238 号, 1975 年 6 月.
- 34) セドフ (大橋義夫訳) : 連続体力学, 培風館, p. 11, 1977 年 5 月.
- 35) 前掲 19), p. 105.
- 36) 三池亮次 : 有限変形についての増分形仮想仕事の原理, 第 34 回土木学会年次学術講演会, 昭和 54 年 10 月.
三池亮次 : 有限変形における補足仮想仕事の原理とその応用, 第 29 回応用力学連合講演会, 昭和 54 年 11 月.
- 37) 前掲 1), p. 126.
- 38) 前掲 2), p. 100~101.

(1979.12.25・受付)