

非減衰系の固有モードを用いる減衰系の一応答解析

AN EFFICIENT LINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF DAMPED SYSTEM USING NATURAL MODES OF UNDAMPED SYSTEM

水田 洋司*・平井 一男**・吉村 虎蔵***
By Yoji MIZUTA, Itio HIRAI and Torazo YOSHIMURA

1. はじめに

構造物の減衰の取り扱いについては未解決の点が多く、実際には構造物の減衰の評価、モデル化に伴う減衰機構の表現が問題となるであろう。本論文では、構造物の減衰の算定問題ではなく、減衰が決定された後の数値計算上の問題について述べている。

有限個の要素からなる構造物の動的応答解析手法の1つに、モーダルアナリシス^{1),2)}とよばれる方法がある。これは、周知のように、構造物の固有振動数、固有モードを用いて、一般座標の振動方程式を基準座標の振動方程式に変換して解析し、最後にそれらを重合する方法である。非減衰振動、あるいは減衰マトリックスが Rayleigh 減衰、Caughey 減衰³⁾で表わされる減衰振動の場合には、非減衰系の固有振動数、固有モードを用いて、モーダルアナリシスを適用することができる。しかし、Rayleigh 減衰、Caughey 減衰で表わされない減衰マトリックスが振動方程式に含まれる場合には、非減衰系の固有モードを用いて、一般座標の振動方程式を基準座標の振動方程式に変換することはできず、減衰によってモード間に連成が起る。この場合は、K.A. Foss⁴⁾、T.K. Caughey⁵⁾らの方法で求められた固有振動数、固有モードを用いて、振動方程式を変換する必要がある。Foss 法は、対象とする構造物の2倍の自由度をもつマトリックスの固有値解析を行う必要があり、求められた固有振動数、固有モードは、一般に複素数で表わされる。また、Caughey 法は、非減衰振動系の固有振動数、固有モードを用いて、減衰系の固有振動数、固有モードを近似的に求める方法である。

減衰が Rayleigh 減衰 (Caughey 減衰も含めて考える) で表現できない減衰系においても、減衰定数が小さい場

合には、非減衰系の固有モードを用いて応答を求めても誤差は微小であろう。しかし、減衰が Rayleigh 減衰で表わされず、地中構造物のように減衰定数が大きい場合あるいは、高架橋、建物、煙突のように上部構造部分と地盤部分で減衰が異なる⁶⁾場合には、Foss 法で求められた複素固有値、複素固有モードを用いて応答解析を行う必要がある。また、非減衰系の固有値解析によれば、減衰系の固有振動数 (ω_D) は、非減衰系の固有振動数 (ω_U) より必ず小さい。しかし、減衰系の固有値解析によれば、減衰マトリックスの形により最低次の固有振動数において、 $\omega_D > \omega_U$ となる場合があることが報告⁷⁾されている。これは、Rayleigh 減衰のみを考慮する場合にはあり得ないことである。この場合の応答は、Rayleigh 減衰のみを考慮したときの応答とは、かなり異なるであろう。

本論文は、多自由度系の振動要素が Rayleigh 減衰で表わされない減衰性をもつ場合の動的応答解析の一方について述べている。提案法は、非減衰系の固有値解析により求められた固有値、固有モードを用いて、Rayleigh 減衰のみを含んだ減衰振動 (=減衰によるモード間の連成を無視した減衰振動)、あるいは非減衰振動の応答を求め、それぞれ連成項あるいは減衰項に相当する応答の補正を行い、減衰系の応答を求める方法である。応答の補正を行うときにある仮定を設けているため、提案法は近似解法である。理論の展開にあたり、基準座標における振動方程式を解く手法は、Duhamel の積分、Newmark の β 法を用いている。

2. 基礎式

強制力 $P(t)$ の作用する多質点系の一般座標における運動方程式は、

$$M\ddot{W} + C\dot{W} + KW = P(t) \dots\dots\dots (1)$$

と表わせる。ここに、 M 、 C 、 K はそれぞれ、質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスであり

* 正会員 工修 八代工業高等専門学校講師 土木建築工学科
** 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科
*** 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科 (現・有明工業高等専門学校 校長)

\ddot{W} , \dot{W} , W , $P(t)$ はそれぞれ, 加速度ベクトル, 速度ベクトル, 変形ベクトル, 外力ベクトルである. 一般座標の変形ベクトル W は, 座標変換マトリックス (モーダルマトリックス) Φ と基準座標 (時間ベクトル) $q(t)$ の積として求めることができる.

$$W = \Phi q(t) = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

ここに, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ は非減衰系の 1 次, 2 次, \dots n 次の正規化モードである. $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ は各モード成分の時間変化を表わす. 式 (2) を式 (1) に代入し, 式 (1) の両辺に左側より転置したモーダルマトリックス Φ^T をかける.

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \Phi^T K \Phi q(t) = \Phi^T P(t) \dots\dots\dots (3)$$

モーダルマトリックス Φ の特性より,

$$\Phi^T M \Phi = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

$$\Phi^T K \Phi = \omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \omega_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

ここに, ω_i は i 次の固有振動数 (rad/s) である. また, 式 (3) の右辺を次式のようにおく.

$$\Phi^T P(t) = F(t) \dots\dots\dots (6)$$

式 (4)~(6) の関係を用いて, 式 (3) を書き換えると,

$$\ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = F(t) \dots\dots\dots (7)$$

となる. 式 (7) は任意時間 t において成り立つ式であるから, step-by-step に応答を求める場合の任意時刻 r においても成立する. すなわち,

$$\ddot{q}_r + \Phi^T C \Phi \dot{q}_r + \omega^2 q_r = F_r \dots\dots\dots (8)$$

減衰マトリックスが Rayleigh 減衰あるいは Caughey 減衰で表わされない場合には, $\Phi^T C \Phi$ は非対角要素も零でない値をもつため, 式 (8) はこのままの状態では 1 自由度系に分解することができないが, 一般には非対角要素を零とみなして解いている. 本論文では, 近似解ではあるが式 (8) をより厳密に解く 2 つの方法を提案する. 1 つは減衰マトリックスによるモード間の連成項, すなわち式 (8) の $\Phi^T C \Phi$ の非対角要素と \dot{q}_r の積を等価な外力 (= 付加外力) に置換する方法, もう 1 つは減衰項全部, すなわち $\Phi^T C \Phi \dot{q}_r$ を付加外力に置換する方法である. 前者, 後者とも非減衰系の固有値解析で求められた固有モードを用いて, 振動方程式を一般座標から基準座標に変換している. しかも, 基準座標の応答は逐次に

求められている.

(1) 連成項に等価な付加外力

一般に, 式 (1) にモーダルアナリシスを利用する場合には, 減衰を Rayleigh 減衰と考え, 減衰によるモード間の連成を無視して, 式 (8) は次式のように表わされる.

$$\ddot{q}_r + 2 \zeta \omega \dot{q}_r + \omega^2 q_r = F_r \dots\dots\dots (9)$$

ここに,

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \zeta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

ζ_i は i 次モードの減衰定数である. $2 \zeta \omega$ は $\omega^T C \Phi$ の対角要素からなるマトリックスで, 対角要素以外は零である. 式 (8), (9) 中の減衰に関するマトリックスの差を ΔC と置くと,

$$\Delta C = \Phi^T C \Phi - 2 \zeta \omega \dots\dots\dots (11)$$

と表わされ, 式 (11) を式 (8) に代入して整理すると,

$$\ddot{q}_r + 2 \zeta \omega \dot{q}_r + \omega^2 q_r = F_r - \Delta C \dot{q}_r \dots\dots\dots (12)$$

となる. いま, $-\Delta C \dot{q}_r$ の値をあらかじめ求めることができるならば, 式 (12) は各基準座標について独立な 1 自由度の式となり, モーダルアナリシスの考え方が適用できる. 便宜上, $-\Delta C \dot{q}_r$ を式 (13) のように等価な外力 ΔF_r で表わし, これを付加外力とよぶ.

$$\Delta F_r = -\Delta C \dot{q}_r \dots\dots\dots (13)$$

したがって, 式 (12) は次式のように表わされる.

$$\ddot{q}_r + 2 \zeta \omega \dot{q}_r + \omega^2 q_r = F_r + \Delta F_r \dots\dots\dots (14)$$

まず, ΔF_r を未知数として含む基準座標の応答 $\ddot{q}_r, \dot{q}_r, q_r$ の算定式を導く. 次に, \dot{q}_r の算定式と式 (13) の関係より, ΔF_r を求める式を導く. 応答 $\ddot{q}_r, \dot{q}_r, q_r$ は ΔF_r を $\ddot{q}_r, \dot{q}_r, q_r$ の算定式に逆代入することにより計算される. $\ddot{q}_r, \dot{q}_r, q_r$ を求める手法として, ここでは Duhamel の積分, Newmark の β 法を用いている.

a) Duhamel の積分

刻み時間間隔を h とし, 初期条件に $(r-1)$ 時点での応答 $q_{r-1}, \dot{q}_{r-1}, \ddot{q}_{r-1}$ を使い, h 時間後の r 時点での応答を Duhamel の積分により求めると次式を得る.

$$q_r = E(h) \{ \tilde{C}_{os}(h) q_{r-1} + (\tilde{\omega})^{-1} \tilde{S}_{in}(h) (\dot{q}_{r-1} + \zeta \omega q_{r-1}) \} + A + B \dots\dots\dots (15)$$

$$\dot{q}_r = E(h) \{ \tilde{C}_{os}(h) \dot{q}_{r-1} - \omega (\tilde{\omega})^{-1} \tilde{S}_{in}(h) (\omega q_{r-1} + \zeta \dot{q}_{r-1}) \} + \dot{A} + \dot{B} \dots\dots\dots (16)$$

$$\ddot{q}_r = E(h) \{ \omega (\tilde{\omega})^{-1} \tilde{S}_{in}(h) (\zeta \omega^2 q_{r-1} + 2 \zeta^2 \omega \dot{q}_{r-1} - \omega \ddot{q}_{r-1}) - \tilde{C}_{os}(h) (\omega^2 q_{r-1} + 2 \zeta \omega \dot{q}_{r-1}) \} + \ddot{A} + \ddot{B} \dots\dots\dots (17)$$

ここに,

$$\mathbf{E}(h) = \text{diag}[e^{-\zeta_i \omega_i h}] \dots \dots \dots (18 \cdot a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \text{diag}[\omega_i] \dots \dots \dots (18 \cdot b)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \text{diag}[\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}] \dots \dots \dots (18 \cdot c)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{os}(h) = \text{diag}[\cos(\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} h)] \dots \dots (18 \cdot d)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) = \text{diag}[\sin(\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} h)] \dots \dots (18 \cdot e)$$

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}^{-1} \int_0^h \mathbf{E}(h-\tau) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h-\tau) \mathbf{F}_{r-1}(\tau) d\tau \dots \dots \dots (19 \cdot a)$$

$$\mathbf{B} = (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \int_0^h \mathbf{E}(h-\tau) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h-\tau) \Delta \mathbf{F}_{r-1}(\tau) d\tau \dots \dots \dots (19 \cdot b)$$

また、 $\dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{B}}$ はそれぞれ \mathbf{A}, \mathbf{B} の時間間隔 h による 1 階微分, 2 階微分である。 $\Delta \mathbf{F}_{r-1}(\tau)$ は $\Delta \mathbf{C}$ と $\dot{\mathbf{q}}_{r-1}(\tau)$ の積で表わされるため時間間隔 h で変化するが, 時間間隔 h は微小であるから, 付加外力の時間間隔内における時間的変化量は小さいと考えられる。したがって付加外力は時間間隔内で一定と仮定すると, $\mathbf{B}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{B}}$ は次式のように表わせる。

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}^{-2} [\mathbf{I} - \mathbf{E}(h)] \{ \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) + \tilde{\mathbf{C}}_{os}(h) \} \Delta \mathbf{F}_r \dots \dots \dots (20 \cdot a)$$

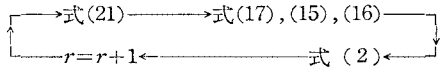
$$\dot{\mathbf{B}} = (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \Delta \mathbf{F}_r \dots \dots \dots (20 \cdot b)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{E}(h) \{ \tilde{\mathbf{C}}_{os}(h) - \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \} \Delta \mathbf{F}_r \dots \dots \dots (20 \cdot c)$$

式 (13), (16), (20 \cdot b) の関係より, $\Delta \mathbf{F}_r$ を定めることができる。

$$\Delta \mathbf{F}_r = - \{ \mathbf{I} + \Delta \mathbf{C} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \}^{-1} \Delta \mathbf{C} [\mathbf{E}(h) \{ \tilde{\mathbf{C}}_{os}(h) \dot{\mathbf{q}}_{r-1} - \boldsymbol{\omega} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) (\boldsymbol{\omega} \mathbf{q}_{r-1} + \boldsymbol{\zeta} \dot{\mathbf{q}}_{r-1}) \} + \dot{\mathbf{A}}] \dots \dots \dots (21)$$

式 (21) で求めた $\Delta \mathbf{F}_r$ を式 (15)~(17) に代入することにより, モード間の連成を考慮した応答を得ることができる。計算手順を下記に示す。



次に, $\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{A}}$ の値であるが, 任意外力 $\mathbf{F}_{r-1}(\tau)$ については式 (19 \cdot a) に示す積分を行って求めればよい。ここでは簡単のために, 時間間隔内で外力一定, すなわち $\mathbf{F}_{r-1}(\tau) = \mathbf{F}_r$ とおいて $\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{A}}$ の値を求めた結果を記しておく。

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}^{-2} \mathbf{F}_r - \boldsymbol{\omega}^{-2} \mathbf{E}(h) \{ \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) + \tilde{\mathbf{C}}_{os}(h) \} \mathbf{F}_r \dots \dots \dots (22 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \mathbf{F}_r \dots \dots \dots (22 \cdot b)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{E}(h) \{ \tilde{\mathbf{C}}_{os}(h) - \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \} \mathbf{F}_r \dots \dots \dots (22 \cdot c)$$

また, 式 (21) 中の $\Delta \mathbf{C} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h)$ の各要素は 1 より小と考えられるため, $\{ \mathbf{I} + \Delta \mathbf{C} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \}$ の逆マトリックスは級数展開により求めることができる。

$$\{ \mathbf{I} + \Delta \mathbf{C} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \}^{-1} = \mathbf{I} - \Delta \mathbf{C} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) + \{ \Delta \mathbf{C} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h) \}^2 + \dots \dots \dots (23)$$

式 (23) において第何項までとればよいかということは, $\Delta \mathbf{C} (\tilde{\boldsymbol{\omega}})^{-1} \mathbf{E}(h) \tilde{\mathbf{S}}_{in}(h)$ のノルムに関係すると思われる。

b) Newmark の β 法

時間間隔を h とし, r 時間点での応答を Newmark の β 法により求める。Newmark の β 法は次式で表わせる。

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_{r-1} + \frac{h}{2} (\ddot{\mathbf{q}}_{r-1} + \ddot{\mathbf{q}}_r) \dots \dots \dots (24)$$

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_{r-1} + h \dot{\mathbf{q}}_{r-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{r-1} + \beta h^2 \ddot{\mathbf{q}}_r \dots \dots \dots (25)$$

式 (24), (25) を式 (14) に代入し, $\ddot{\mathbf{q}}_r$ を求める式を導くと,

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = (\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1} \left[\mathbf{F}_r + \Delta \mathbf{F}_r - 2 \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} \left(\dot{\mathbf{q}}_{r-1} + \frac{h}{2} \ddot{\mathbf{q}}_{r-1} \right) - \boldsymbol{\omega}^2 \left\{ \mathbf{q}_{r-1} + h \dot{\mathbf{q}}_{r-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{r-1} \right\} \right] \dots \dots \dots (26)$$

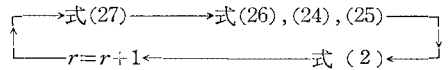
$\mathbf{F}_r, \Delta \mathbf{F}_r$ は, それぞれ r 時間点での外力, 付加外力である。式 (13), (24), (26) の関係より付加外力 $\Delta \mathbf{F}_r$ を定めることができる。

$$\Delta \mathbf{F}_r = - \left\{ \mathbf{I} + \frac{h}{2} \Delta \mathbf{C} (\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1} \right\}^{-1} \Delta \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{q}}_{r-1} + \frac{h}{2} \ddot{\mathbf{q}}_{r-1} + \frac{h}{2} (\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1} \left\{ \mathbf{F}_r - 2 \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} \left(\dot{\mathbf{q}}_{r-1} + \frac{h}{2} \ddot{\mathbf{q}}_{r-1} \right) - \boldsymbol{\omega}^2 \left(\mathbf{q}_{r-1} + h \dot{\mathbf{q}}_{r-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{r-1} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (27)$$

式 (27) の $(\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1}$ は対角マトリックスのため, その逆マトリックスは各対角要素の逆数により求めることができる。また, 式 (27) 中の $\frac{h}{2} \Delta \mathbf{C} (\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1}$ の各要素は 1 より小と考えられるため, $\left\{ \mathbf{I} + \frac{h}{2} \Delta \mathbf{C} (\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1} \right\}^{-1}$ は級数展開により次式で求めることができる。

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{h}{2} \Delta \mathbf{C} (\mathbf{I} + \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1} \right\}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{h}{2} \Delta \mathbf{C} (\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1} + \left\{ \frac{h}{2} \Delta \mathbf{C} (\mathbf{I} + h \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} + \beta h^2 \boldsymbol{\omega}^2)^{-1} \right\}^2 + \dots \dots \dots (28)$$

計算手順を下記に示す。



(2) 減衰項に等価な付加外力

この節では, (1) の場合と違って, 式 (8) の左辺の減衰項を右辺に移行して非減衰線形微分方程式の形に変形し, これをモーダルアナリシスにより解く手法について

述べる。 r 時点における減衰項に等価な付加外力を ΔF_r で表わすと、式 (8) は次式のように書ける。

$$\dot{q}_r + \omega^2 q_r = F_r + \Delta F_r \dots\dots\dots(29)$$

$$\Delta F_r = -\Phi^T C \Phi \dot{q}_r \dots\dots\dots(30)$$

式 (29) で ΔF_r が既知であるならば、式 (29) は基準座標について独立となり、モーダルアナリシスを適用することができる。(1) の場合と同様に式 (30) の ΔF_r の値を既知として解析し、 \dot{q} の算定式を用いて式 (30) より ΔF_r を定める必要がある。応答を求める手法として、(1) の場合と同様に、Duhamel の積分、Newmark の β 法を用いている。

a) Duhamel の積分

r 時点での応答は、初期条件として $(r-1)$ 時点での応答 q_{r-1} 、 \dot{q}_{r-1} を用いて求めることができる。

$$q_r = C_{os}(h)q_{r-1} + \omega^{-1} S_{in}(h)\dot{q}_{r-1} + A_1 + B_1 \dots\dots\dots(31)$$

$$\dot{q}_r = -\omega S_{in}(h)q_{r-1} + C_{os}(h)\dot{q}_{r-1} + \dot{A}_1 + \dot{B}_1 \dots\dots\dots(32)$$

$$\ddot{q}_r = -\omega^2 C_{os}(h)q_{r-1} - \omega S_{in}(h)\dot{q}_{r-1} + \ddot{A}_1 + \ddot{B}_1 \dots\dots\dots(33)$$

ここに、

$$C_{os}(h) = \text{diag}[\cos(\omega_i h)] \dots\dots\dots(34 \cdot a)$$

$$S_{in}(h) = \text{diag}[\sin(\omega_i h)] \dots\dots\dots(34 \cdot b)$$

$$A_1 = \omega^{-1} \int_0^h F_{r-1}(\tau) S_{in}(h-\tau) d\tau \dots\dots\dots(35 \cdot a)$$

$$B_1 = \omega^{-1} \int_0^h \Delta F_{r-1}(\tau) S_{in}(h-\tau) d\tau \dots\dots\dots(35 \cdot b)$$

(1) の場合と同様に、時間間隔内で付加外力は一定と仮定すると、 $\Delta F_{r-1}(\tau) = \Delta F_r$ とすることができる。 B_1 、 \dot{B}_1 、 \ddot{B}_1 を定式化すると、

$$B_1 = \omega^{-2} (I - C_{os}(h)) \Delta F_r \dots\dots\dots(36 \cdot a)$$

$$\dot{B}_1 = \omega^{-1} S_{in}(h) \Delta F_r \dots\dots\dots(36 \cdot b)$$

$$\ddot{B}_1 = C_{os}(h) \Delta F_r \dots\dots\dots(36 \cdot c)$$

となる。式 (30)、(32)、(36・b) より付加外力 ΔF_r を求めると、

$$\Delta F_r = -\{I + \Phi^T C \Phi \omega^{-1} S_{in}(h)\}^{-1} \Phi^T C \Phi \{-\omega S_{in}(h)q_{r-1} + C_{os}(h)\dot{q}_{r-1} + \dot{A}_1\} \dots\dots\dots(37)$$

となる。式 (37) で求めた ΔF_r を式 (31)~(33) に代入して q_r 、 \dot{q}_r 、 \ddot{q}_r を求めることができる。応答を求める手順を図表化すると下記ようになる。 A_1 の値は任意外力 $F_{r-1}(\tau)$ に対して求めることができるが、ここでは時間間隔内で一定として求めた結果を記す。

$$\begin{matrix} \text{式(37)} & \longrightarrow & \text{式(33), (31), (32)} \\ \longleftarrow & & \longleftarrow \\ & & r=r+1 \end{matrix} \quad \text{式(2)}$$

$$A_1 = \omega^{-2} \{I - C_{os}(h)\} F_r \dots\dots\dots(38 \cdot a)$$

$$\dot{A}_1 = \omega^{-1} S_{in}(h) F_r \dots\dots\dots(38 \cdot b)$$

$$\ddot{A}_1 = C_{os}(h) F_r \dots\dots\dots(38 \cdot c)$$

b) Newmark の β 法

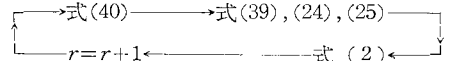
ここでは、式 (29) を Newmark の β 法を用いて解く方法について述べる。式 (24)、(25) を式 (29) に代入し、 \dot{q}_r を求める式を導くと次式で表わされる。

$$\dot{q}_r = (I + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \left[F_r + \Delta F_r - \omega^2 \left\{ q_{r-1} + h \dot{q}_{r-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{q}_{r-1} \right\} \right] \dots\dots\dots(39)$$

式 (24)、(30)、(39) の関係より、付加外力 ΔF_r は、

$$\Delta F_r = -\left\{ I + \frac{h}{2} \Phi^T C \Phi (I + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \right\}^{-1} \Phi^T C \Phi \left[\dot{q}_{r-1} + \frac{h}{2} \ddot{q}_{r-1} + \frac{h}{2} (I + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \left\{ F_r - \omega^2 \left(q_r + h \dot{q}_r + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{q}_r \right) \right\} \right] \dots\dots\dots(40)$$

となる。式 (40) 中の $(I + \beta h^2 \omega^2)$ は対角マトリックスのためその逆マトリックスは容易に求めることができる。 $\left\{ I + \frac{h}{2} \Phi^T C \Phi (I + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \right\}$ の逆マトリックスは前節と同様に級数展開によっても求めることができるであろう。下記に計算手順を示す。



3. 数値計算

理論の妥当性を確かめるために、Rayleigh 減衰で表わされない減衰をもつ 3 質点モデル (図-3)、トラス橋 (図-6)、上路式ランガー橋 (図-9) を例にとり、減衰係数の大きさ、時間間隔の大きさ、外力の種類を変えて数値計算を行った。3 質点モデル、トラス橋に作用する外力は一定外力 (図-1) と正弦波外力 (図-2) の 2 種類である。正弦波外力の振動数は共振に近い状態にするため、非減衰系の固有振動数に Rayleigh 減衰を考慮して求めた 1 次の固有振動数を用いている。また、上路式ランガー橋においては、上記外力の他に走行荷重によ

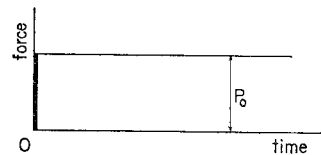


図-1 一定荷重

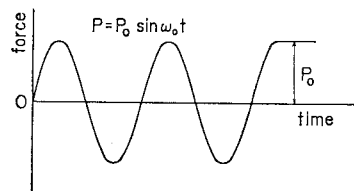


図-2 正弦波荷重

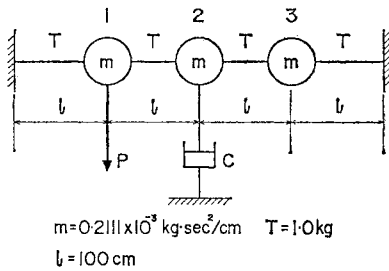


図-3 3 質点モデル

る応答についても調べている。モーダルアナリシスは、固有値解析後、Duhamel の積分を用いて逐次に解いており、外力は時間間隔内で一定としている。

(1) 3 質点モデル²⁾

図-3 では、長さ $4l$ の弦が初期張力 T で引張られ、両端で固定してある。弦は 3 個の等しい質量を等間隔に支えており、質点 2 にダッシュポットが取り付けられている。外力は質点 1 に作用しており、基本解としては、式 (1) を Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) で求めた値 (刻み時間間隔 0.01 秒 = $T_{min}/50$) を用いている。表-1, 2 には、それぞれ、図-3 のモデルの固有振動数、正規化モードを表わしている。表-3 には各モードの減衰定数 (ζ_i) とダッシュポットの減衰係数の関係を表記している。図-4 (a)~5 (b) 中のモーダルアナリシスによる解は、

$$\ddot{q}(t) + 2\zeta\omega\dot{q}(t) + \omega^2q(t) = F(t) \dots\dots(41)$$

を Duhamel の積分により刻み時間間隔 $h=T_{min}/20$ で解き、式 (2) より求めた値である。

2. (1), (2) に述べた各方法による応答はよく一致しており、図-4(a)~5 (b) には、proposed me-

表-1 3 質点モデルの固有振動数

n^*	circular frequency (rad/s)
1	5.267 8
2	9.733 5
3	12.717 5

* order of natural frequency

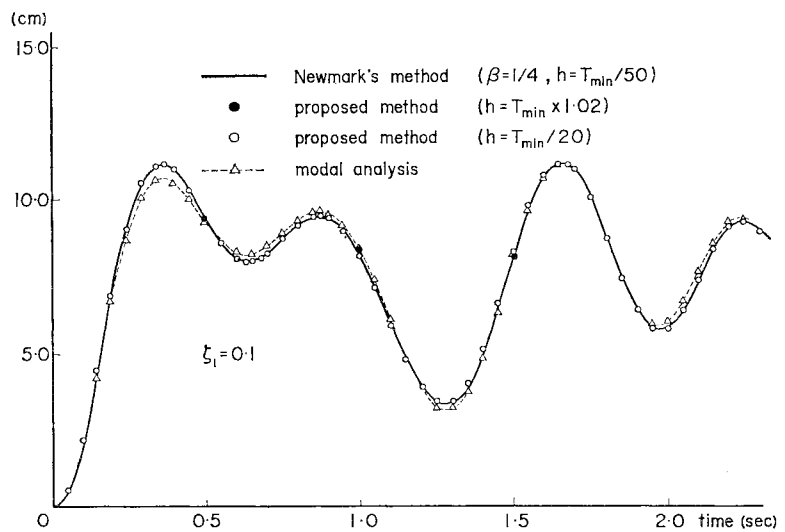
表-2 3 質点モデルの正規化モード

mass No. / n^*	1	2	3
1	$\frac{1}{0.0291}$	$\frac{\sqrt{2}}{0.0291}$	$\frac{1}{0.0291}$
2	$\frac{1}{0.0205}$	0	$-\frac{1}{0.0205}$
3	$\frac{1}{0.0291}$	$-\frac{\sqrt{2}}{0.0291}$	$\frac{1}{0.0291}$

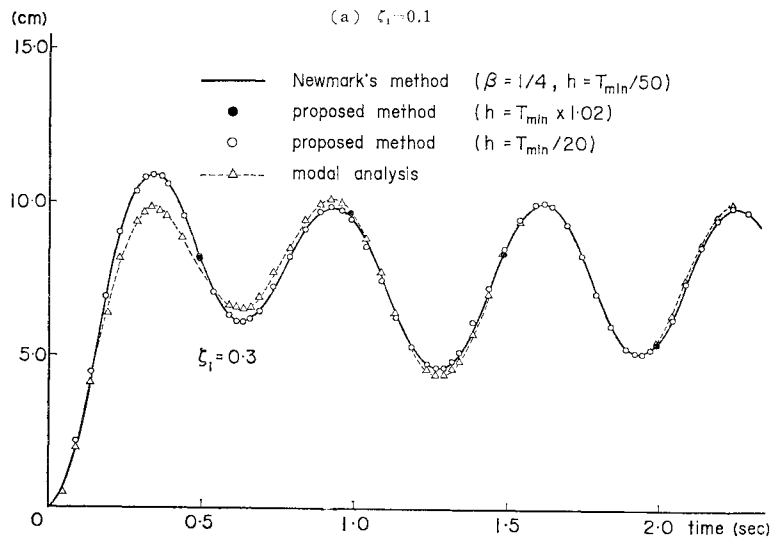
* order of natural frequency

表-3 減衰係数と減衰定数

ζ_1	ζ_2	ζ_3	$C(\text{kg}\cdot\text{s}/\text{cm})$
0.01	0.0	0.004 14	0.44608×10^{-4}
0.05	0.0	0.020 71	0.22304×10^{-3}
0.10	0.0	0.041 42	0.44608×10^{-3}
0.30	0.0	0.124 26	0.13382×10^{-2}
0.50	0.0	0.207 10	0.22304×10^{-2}

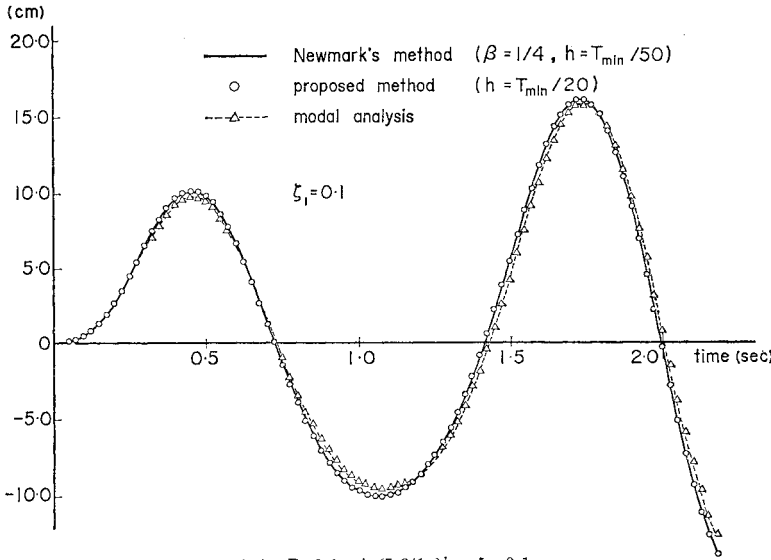


(a) $\zeta_1=0.1$

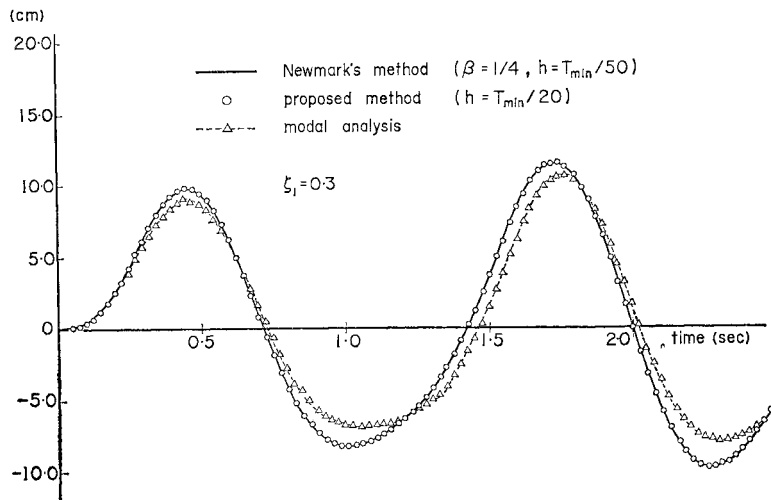


(b) $\zeta_1=0.3$

図-4 一定荷重による質点 1 の変位応答 ($P=0.1 \text{ kg}$)



(a) $P=0.1 \times \sin(5.241t)$ kg, $\zeta_1=0.1$



(b) $P=0.1 \times \sin(5.025t)$ kg, $\zeta_1=0.3$

図-5 正弦波荷重による質点1の変位応答

thod と一括して表わしている。減衰係数が小さい場合にはモーダルアナリシス, proposed method, 基本解の差は応答の山, 谷の部分を除いて差はみられないが, 減衰係数が大きくなるに従いモーダルアナリシスは振幅差を生じる (図-4 (a), (b)). 周期外力の場合には連成項無視の影響は振幅差のほか位相差という形で現われている (図-5 (a), (b)). それに比べて, 本法は外力の種類, 時間間隔の大きさに関係なく基本解とよく一致している。

減衰係数 $C=0.1338 \times 10^{-2}$ kg·s/cm ($\zeta_1=0.3$) のときの $\Phi^T C \Phi$ の値を式 (42) に示している。

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} 3.17 & 0.0 & -3.17 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.17 & 0.0 & 3.17 \end{bmatrix} \dots (42)$$

(2) トラス橋

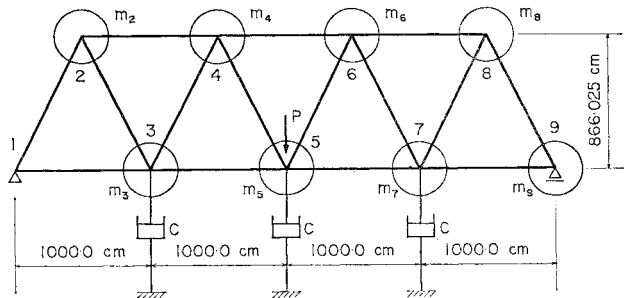
図-6 に示すように, 節点 3, 5, 7 に大きさの等しいダッシュポットが取り付けられている。外力は節点 5 に下向きに作用し, 一定外力と正弦波外力の 2 種類の外力について応答を求めている。表-5 には, 減衰を無視し

表-4 トラス橋の質量

mass No.	mass (kg·s ² /cm)
m_2	1.02
m_3	5.10
m_4	2.04
m_5	5.10
m_6	2.04
m_7	5.10
m_8	1.02
m_9	2.55

たときのトラス橋の固有振動数を記している。図-7, 8 には, 節点 5 のたわみ応答を示している。図中の Newmark's method は, 式 (1) を Newmark の β 法 ($\beta=1/4$, 時間間隔 $h=0.001$ 秒 $=T_{\min}/16$) によって逐次に求めた値であり, 基本解とみなしている。また, モーダルアナリシスは, 時間間隔 $h=0.001$ 秒で求めており, 図-7 (a), (b) の h の値は提案法の時間間隔を示している。2. (1), (2) に述べた提案法のなかで, Duhamel の積分, Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を用いて求めた応答は, 図

上では区別できず, (1) の方法を proposed method 1, (2) の方法を proposed method 2 と表わしている。(1) と (2) の解析法の違いは, h が小さい場合には現われな



$A=30.0 \text{ cm}^2$ $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

図-6 トラス橋

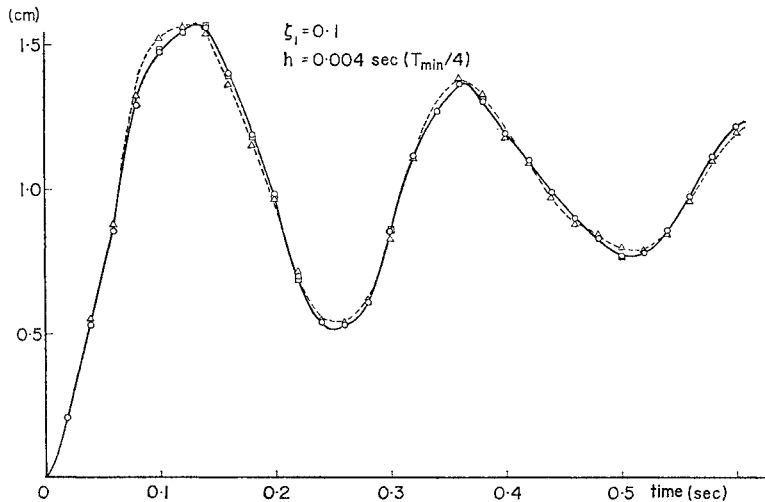
いが、 h が大きくなるにつれ徐々に現われる。また、

$h > T_{\min}$ (最小固有周期) になると、(2) の Duhamel の積分による解は精度が悪くなる。理由としては、式 (36) の付加外力は式 (13) の付加外力に比べて大きく、時間間隔が大きくなると付加外力の近似度が悪くなるためと思われる。連成項と応答の関係は、トラス橋の場合も 3 質点モデルの場合と同様の傾向を示しており、連成項無視の影響は減衰係数が大きくなるにつれ、顕著になるようである。減衰係数 $C=272.8 \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{cm}$ ($\zeta_1=0.3$) のときの $\Phi^T C \Phi$ の値を式 (43) に示している。ただし各要素は 10^{-2} 以下を四捨五入している (次式(43))。

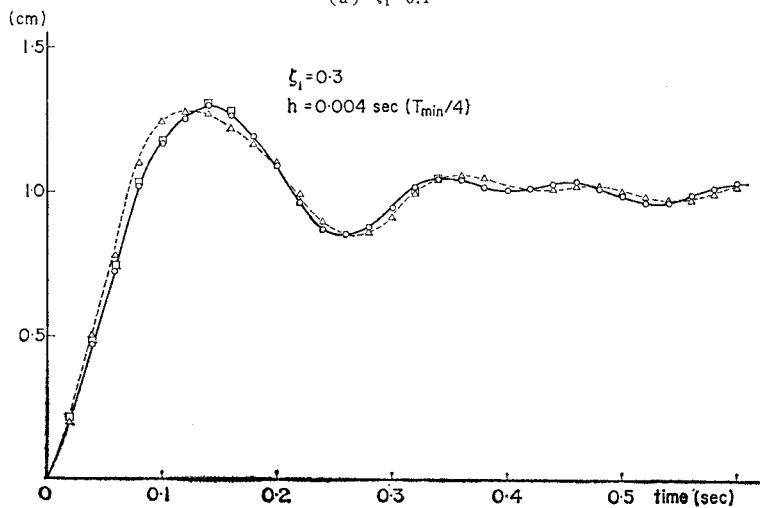
表—5 トラス橋の固有振動数

n^*	natural frequency (Hz)	n^*	natural frequency (Hz)
1	4.0845	9	38.6019
2	7.3677	10	40.2022
3	11.8158	11	40.6607
4	17.8044	12	50.2318
5	20.5438	13	51.5795
6	26.0760	14	55.5810
7	28.5023	15	61.0464
8	31.1981		

* order of natural frequency



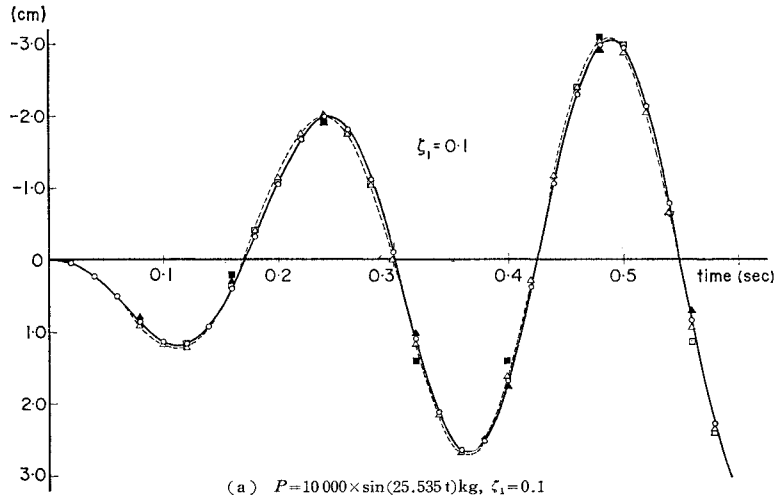
(a) $\zeta_1=0.1$



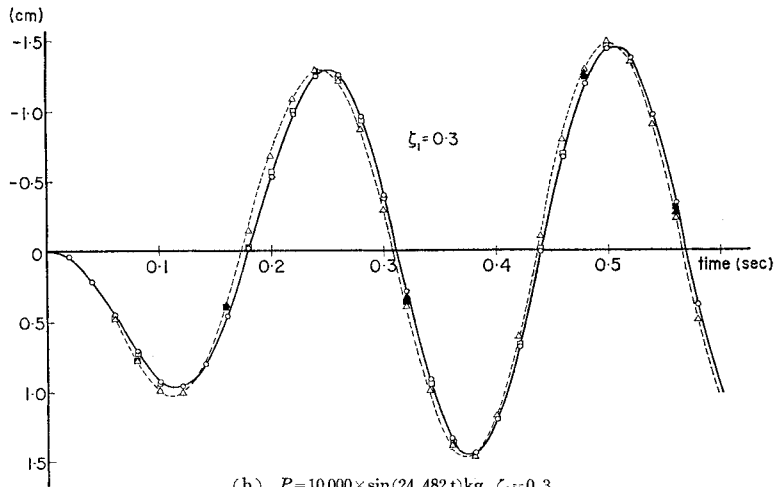
(b) $\zeta_1=0.3$

- Newmark's method ($\beta=1/4, h=T_{\min}/16$)
- proposed method 1
- proposed method 2
- △--- modal analysis

図—7 一定荷重による節点 5 のたわみ応答 ($P=10\,000 \text{ kg}$)



(a) $P=10000 \times \sin(25.535t)$ kg, $\zeta_1=0.1$



(b) $P=10000 \times \sin(24.482t)$ kg, $\zeta_1=0.3$

- Newmark's method ($\beta = 1/4, h = T_{min}/16$)
- proposed method 1 ($h = T_{min}, T_{min}/4$)
- proposed method 2 ($h = T_{min}/4$)
- - - modal analysis ($h = T_{min}/4$)
- proposed method 2 ($h = T_{min}$)
- ▲ modal analysis ($h = T_{min}$)

図-8 正弦波荷重による節点5のたわみ応答

(3) 上路式ランガー橋

図-9 に示す上路式ランガー橋は、実在の下路式ランガー橋のアーチ部を平行移動させて上路式ランガー橋としたものである。質量は1~21の各点に集中する集中質量とし、アーチ部の各節点は放物線上にあり、各節点を結ぶ部材は直線部材としている。表-6 には質量を表-7 には数個の固有振動数を記している。(1),(2)の計算例により、提案法はモード間の連成を考慮した応答を、十分な正確さで与えることが確かめられた。ここでは作用荷重の違いによって連成項がたわみ応答にどのように

影響するかを調べている。提案法は 2.(1) b)の方法を用いている。提案法、モーダルアナリシスの時間間隔は等しくしており、大きさは図の説明文に記している。また、桁尻ダンパーの大きさは、逆対称1次モードに対して、減衰定数が0.5になるように定めている。桁尻ダンパーは水平方向に取り付けられているため、対称モードの減衰定数は0.0となる。それぞれの荷重状態について直接積分法で求めた応答と提案法で求めた応答はよく一致しており、図上では区別できない。したがって、図-10~12 には、提案法で求めた応答と非対角要素を無視したモード解析で求めた応答を図示している。

$$\Phi^T C \Phi$$

$$= \begin{bmatrix} 15.40 & 8.28 & -1.41 & 17.67 & -5.37 & 0.76 & 3.59 & -3.82 & -0.90 & -10.17 & -5.83 & -0.54 & -0.25 & -0.02 & -2.01 \\ 4.45 & -0.76 & 9.50 & -3.08 & 0.41 & 1.93 & -2.06 & -0.49 & -5.47 & -3.13 & -0.29 & -0.14 & -0.01 & -1.08 \\ 0.13 & -1.62 & 0.53 & -0.07 & -0.33 & 0.35 & 0.08 & 0.93 & 0.53 & 0.05 & 0.02 & 0.0 & 0.0 & 0.18 \\ 20.28 & -6.58 & 0.87 & 4.12 & -4.39 & -1.04 & -11.66 & 6.69 & -0.62 & -0.29 & -0.02 & -2.31 \\ 2.13 & -0.28 & -1.34 & 1.42 & 0.36 & 3.78 & 2.17 & 0.20 & 0.09 & 0.01 & 0.75 \\ 0.04 & 0.18 & -0.19 & -0.04 & 0.50 & -0.29 & -0.03 & -0.01 & 0.0 & -0.01 \\ 0.84 & -0.89 & -0.21 & -2.37 & -1.36 & -0.13 & -0.06 & 0.0 & -0.47 \\ 0.95 & 0.22 & 2.52 & 1.45 & 0.13 & 0.06 & 0.0 & 0.50 \\ 0.05 & 0.60 & 0.34 & 0.03 & 0.01 & 0.0 & 0.12 \\ 6.71 & 3.84 & 0.36 & 0.17 & 0.01 & 1.33 \\ 2.21 & 0.20 & 0.10 & 0.01 & 0.76 \\ & & & 0.02 & 0.01 & 0.0 & 0.07 \\ & & & & & 0.0 & 0.0 & 0.03 \\ & & & & & & & 0.0 & 0.0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0.26 \end{bmatrix} \quad (43)$$

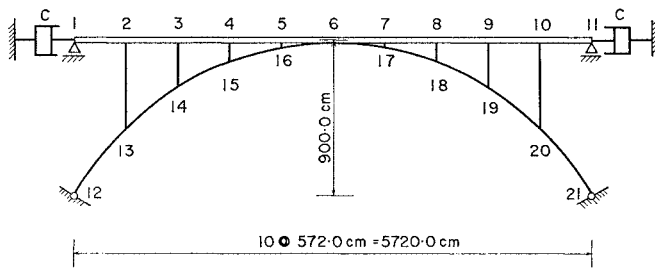


図-9 桁尻ダンパーをもつ上落式ランガー橋

上落式ランガー橋では、通常の場合、逆対称1次モードに対する固有振動数が最低のため、鉛直たわみの影響線は1/4点付近(質点3付近)で最大を示す。それゆえ、荷重の作用点、応答値の比較点として質点3を選んでいる。また、異なる振動モードが励起されるように、作用荷重を一定荷重、正弦波荷重、走行荷重の3種類とし、大きさは各荷重とも20 ton(下向き)としている。まず、正弦波荷重の場合には、逆対称1次モードの固有振動数に近い振動数を与えたため、励起される振動モードは逆

表-6 上落式ランガー橋の質量

joint	mass (kg·s ² /cm)	
1	11	8.62
2	10	17.35
3	9	17.30
4	8	17.27
5	7	17.24
6		18.29
13	20	1.36
14	19	1.22
15	18	1.10
16	17	1.06
total		181.33

表-7 上落式ランガー橋の固有振動数

n*	natural frequency (Hz)
1	1.742
2	3.324
3	4.746
4	6.725
5	7.951
6	12.380
⋮	
36	247.47

* order of natural frequency

対称1次である。一定荷重をフーリエ級数で表わすといろいろな振動数をもつ調和関数荷重に分解されるため、一定荷重による応答は低次モードだけでなく高次モードも応答に影響を及ぼす。走行荷重の場合には動的増加たわみとして低次モードの振動が励起されることが文献¹³⁾の解析例などから予想される。

一定荷重によるたわみ応答は過渡振動においてモーダルアナリシスに振幅差がみられるが、定常振動では対称1次の振動数で振動してお

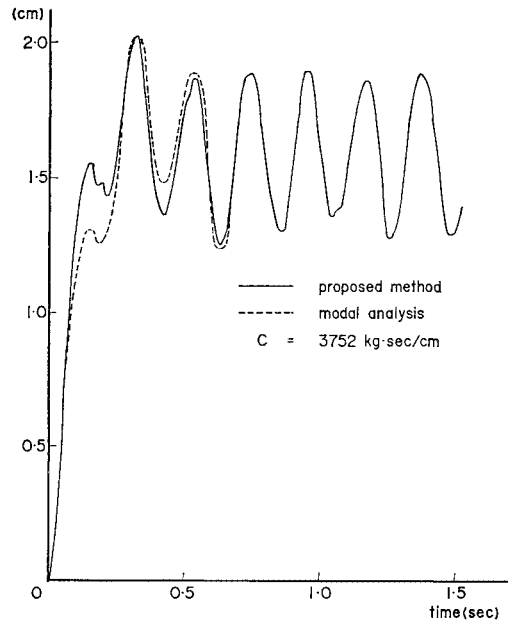


図-10 一定荷重による質点3のたわみ応答 (P=20 ton, h=0.001 s)

り、連成の影響は現われない(図-10)。正弦波荷重が作用したときのモーダルアナリシスによるたわみ応答は、過渡振動において振幅差、位相差を生じ、定常振動では振幅差、位相差は一定のようである(図-11)。走行荷重による応答は時速 60 km の速度で 20 ton 荷重を走らせたときの動的増加たわみを図-12 に示しており、モーダルアナリシスによる応答には最大増加たわみの約 20% の振幅差がみられる。上記 3 種類の荷重によるたわみ応答において、連成項無視の影響は過渡振動において顕著に現われ、定常振動においてはあまり現われないようである。また、連成項を無視することは、一定荷重、正弦波荷重の場合には応答振幅を過小評価、走行荷重の場合には応答振幅を過大評価していることに等しい。

減衰係数 $C=3752 \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{cm}$ ($\zeta_1=0.5$) のときの $\Phi^T C \Phi$ の値を式 (44) に示している。 $\Phi^T C \Phi$ は 36×36 のマトリックスであるが、ここではその一部を明示し、各要素は 10^{-2} 以下を四捨五入している。(次式(44))

以上、3 種類の例題について、数値計算を行ったが、例 1 の場合は、パイプラインにダンパーを取り付けた場合が考えられ、例 2 は非比例減衰を表わすか否か

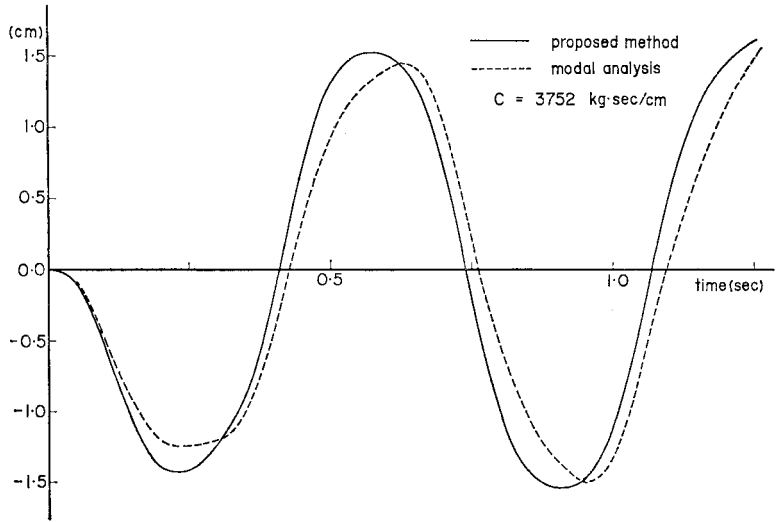


図-11 正弦波荷重による質点 3 のたわみ応答 ($P=20 \times \sin(9.476 t)$ ton, $h=0.001$ s)

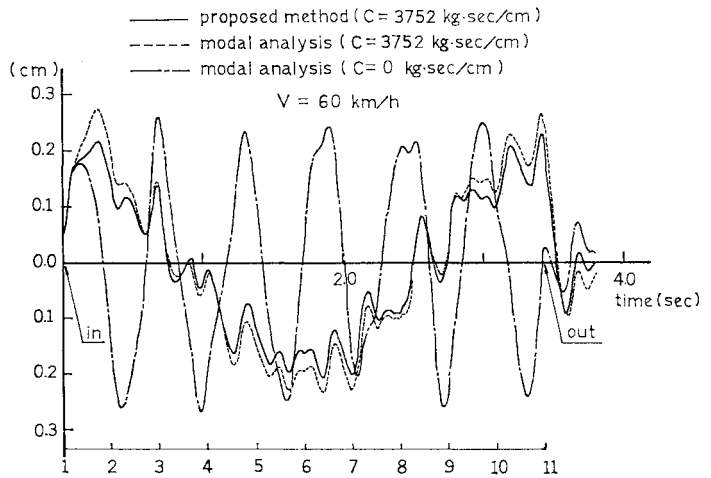


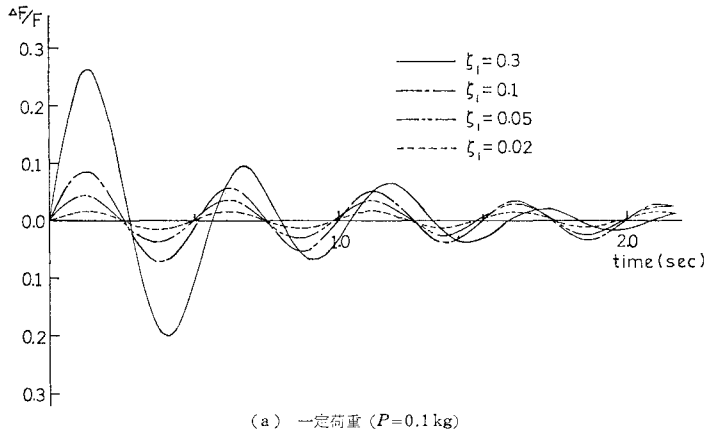
図-12 走行荷重による質点 3 の動的増加たわみ ($P=20$ ton, $h=0.002$ s)

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} 10.94 & 0.0 & 0.0 & -20.47 & -0.19 & 0.0 & 0.0 & 0.80 & 0.0 & -28.85 & 6.37 & 0.0 & 0.0 & -18.96 & \dots \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots \\ & & 38.29 & 0.35 & 0.0 & 0.0 & -1.50 & 0.0 & 53.97 & -11.92 & 0.0 & 0.0 & 35.46 & \dots \\ & & & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.01 & 0.0 & 0.49 & -0.11 & 0.0 & 0.0 & 0.32 & \dots \\ & & & & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots \\ & & & & & 86.74 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -86.71 & 0.0 & \dots \\ & & & & & & 0.06 & 0.0 & -2.12 & 0.47 & 0.0 & 0.0 & -1.39 & \dots \\ & & & & & & & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots \\ & & & & & & & & 76.09 & -16.80 & 0.0 & 0.0 & 49.99 & \dots \\ & & & & & & & & & 3.71 & 0.0 & 0.0 & -11.04 & \dots \\ & & & & & & & & & & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \dots \\ & & & & & & & & & & & 86.68 & 0.0 & \dots \\ & & & & & & & & & & & & 32.84 & \dots \end{bmatrix}$$

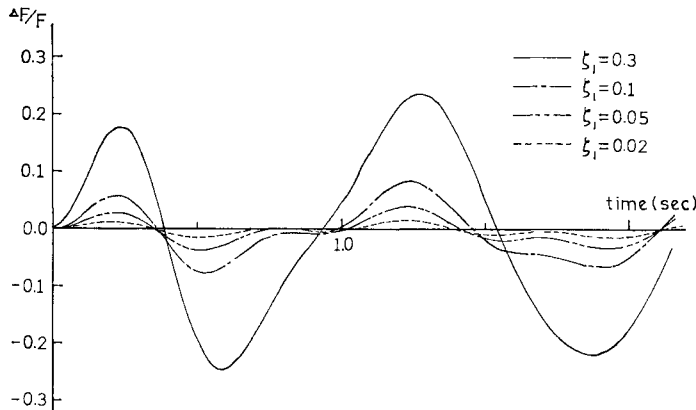
.....(44)

をみるための仮想モデルであり、例3は水平方向の振動を小さくするためのダンパーを取り付けた場合に相当する。これらの例に示すように、減衰がRayleigh減衰で表わされず、大きい値をもつ構造物の場合には、従来のモーダルアナリシスは応答に振幅差、位相差を伴い、応答性状の把握が難しい。しかし、提案法では十分な正確さで応答を求めることができ、応答性状も正確に把握できることがわかった。

図一13には例1の3質点モデルにおける1次モードに対する付加外力と作用外力の比の時間的変化を表わしている。この図より、減衰定数(ζ)が大きいほど、付加外力の振幅は大きくなり、 $\Phi^T C \Phi$ の非対角要素を無視できなくなることがわかる。荷重が一定の場合(図一13(a))には、過渡応答に大きな付加外力を生じ、時間の経過とともにその振幅は小さくなり、減衰定数の大きいものほどその傾向は顕著である。正弦波荷重(図一13(b))の場合には、時間が経過しても付加外力の振幅は小さくならず、 $\Phi^T C \Phi$ の非対角要素の影響はいつまでも続く。一定荷重、正弦波荷重とも付加外力の大きさは、非比例減衰の応答と比例減衰の応答差にその傾向がよく



(a) 一定荷重 ($P=0.1 \text{ kg}$)



(b) 正弦波荷重 ($P=0.1 \times \sin(5.268\sqrt{1-\zeta_1^2}t) \text{ kg}$)

図一13 付加外力と作用外力の比の時間的変化

表一8 C.P.U. time の比較 (1000 ステップ)

モデル	解析法	提案法	直接積分法
3 質点モデル (3自由度) ($h=0.01 \text{ s}, T=10 \text{ s}$)		51 秒	1 分 5 秒
トラス橋 (15自由度) ($h=0.001 \text{ s}, T=1 \text{ s}$)		3 分 52 秒	6 分 51 秒
ランガ一橋 (36自由度) ($h=0.001 \text{ s}, T=1 \text{ s}$)		13 分 11 秒	36 分 20 秒

h : 時間間隔, T : 1000 ステップの時間

似ている。付加外力と作用外力の比 $\Delta F/F$ が $1/40$ 以下では、作用荷重、減衰定数の大きさに関係なく、非比例減衰系と比例減衰系の応答に大きな差異は生じないようである。

表一8には2.(1)で述べた提案法と直接積分法(Newmarkの $\beta=1/4$ 法)に要する計算時間を示している。作用荷重は一定荷重とし、3質点モデルには質点1に下向きに 0.1 kg 、トラス橋は質点5に下向きに 10 ton 、上路式ランガ一橋は質点3に下向きに 20 ton の荷重である。マトリックス次数の大きさによってどれくらいの時間差が生じるかを明らかにするために、各モデルとも1000ステップの計算に要する時間(C.P.U. time)を比較している。表一8よりわかるようにマトリックスの次数(=自由度)が大きくなるほど、提案法と直接積分法の時間差は大きくなるようである。Foss法は提案法に比較して、固有値解析のマトリックスの大きさは4倍、応答解析の固有値、モードの個数は2倍であるから、明らかに提案法より多くの計算時間を必要とするであろう。

数値計算には、八代工業高等専門学校のFACOM 230-28を用いた。

4. 結 び

本論文では、Rayleigh減衰、Caughey減衰で表わされない非比例減衰をもつ減衰系の動的応答を、非減衰系の固有振動数、固有モードを用いて、近似的に求める方法を提案した。提案法の特徴は下記のように表わせる。

(1) 複素固有値解析を必要としないため、Foss法に比較して、記憶容量の小さな電子計算機(例3のモデルで50KB)を用いて計算可能で、計算に要する時間の短縮が期待できる。

(2) 直接積分法に比較して、計算に要する時間が短い(表一8)。

(3) 作用荷重の時間的変動が小さい場合には、非比例減衰系の減衰の大きさに無関係に、過渡振動は非比例減衰で解き、定常振動は比例減衰で解いても、応答差は生じないであろう(図—4, 5, 13).

(4) 非比例減衰系を非比例減衰として解くか否かの限界は、おおよそ $\Delta F/F \approx 1/40$ である(図—13).

提案法の精度は、付加外力の取り方、固有モードへ分解した後の方程式の解析方法によって異なるが、数値計算例より、連成項のみを付加外力で表わす 2.(1)の方法が、計算精度、式の簡潔さの面から好ましいようである。数値計算例では、すべての固有振動数と固有モードを用いて計算したが、必要な数個の固有振動数と固有モードを用いて計算してもよい。用いる固有モードの数によって、式(21),(27),(37),(40)の逆マトリックスの次数は決まる。

本論文で取り扱った例 1, 2 は、提案法が非比例減衰系の解析の一手法となり得るか否かを確かめるための解析モデルである。上路式アーチ橋の応答に対するアーチの水平変位の拘束効果については、すでに筆者らによって発表されている^{19)~21)}が、その効果がダンパーによってどのように影響されるかは興味もたれるところであり、このための解析モデルを例 3 として取り上げた。上部構造—基礎系などへの適用も当然考えられるところである。例 3 の場合、ダンパーの動的増加たわみへの効果は大きく、歩行者への振動感覚などに重要な速度応答、加速度応答がダンパーのない場合に比べてきわめて微小となることが図—12 から推察されるであろう。

参 考 文 献

- 1) 川井忠彦：マトリックス法振動および応答，コンピューターによる構造工学講座，I-4-B，培風館，pp. 76~84，1971.
- 2) 河島佑雄：動的応答解析，コンピューターによる構造工学講座，II-4-A，培風館，pp. 33~80，1972.
- 3) Foss, K.A. : Co-Ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, pp. 361~364, September, 1958.
- 4) Caughey, T.K. : Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, pp. 269~271, June, 1960.
- 5) Caughey, T.K. and M.E.J. O'Kelly : Effect of Damping on the Natural Frequencies of Linear Dynamic Systems, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 33, Number 11, November, 1961,
- 6) 武藤 清・小林俊夫：各部別減衰振動系のモーダルアナリシス法，日本建築学会論文報告集，第 204 号，pp. 37~43，昭和 48 年 2 月.
- 7) 武藤 清・小林俊夫：RC 造模型建物振動実験解析，日本建築学会論文報告集，第 205 号，pp. 43~51，昭和 48 年 3 月.
- 8) 伊藤 学・片山恒雄：橋梁構造の振動減衰，土木学会論文集，第 117 号，pp. 12~22，昭和 40 年 5 月.
- 9) 小西一郎・山田善一：鋼構造物の減衰性と桁橋の強制振動性状について，土木学会誌，第 41 巻第 2 号，pp. 7~13，昭和 31 年 2 月.
- 10) Newmark, N.M. : A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. of ASCE, Vol. EM 3, pp. 67~74, 1959.
- 11) Wilson, E.L. and R.W. Clough : Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis, Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Lisbon-Portugal, October, 1962.
- 12) Clough, R.W. : Analysis of Structural Vibration and Dynamic Response, Japan-U.S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design, Tokyo-Japan, August, 1969.
- 13) Argyris, J.H., P.C. Dunne and T. Angelopoulos : Dynamic Response by Large Step Integration, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, pp. 185~203, 1973.
- 14) Bathe, K.J. and E.L. Wilson : Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Method, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 283~291, 1973.
- 15) 水田洋司・西山研一・平井一男：Newmark の β 法における位相遅れ補正の一方法，土木学会論文報告集，第 268 号，pp. 15~21，1977 年 12 月.
- 16) Nakao, Y. and S. Takano : Elasto-Plastic Seismic Analysis of Framed Structure by Mode Superposition, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Univ. of Tokyo Press, pp. 423~440, 1973.
- 17) 水田洋司・平井一男：付加外力を用いて効率化した一非線形応答解析法，土木学会論文報告集，第 287 号，pp. 1~9，1979 年 7 月.
- 18) 吉村虎蔵・平井一男：ランガー橋の動的解析，土木学会論文集，第 101 号，pp. 1~14，1964 年 1 月.
- 19) 吉村虎蔵ほか：水平変位の拘束による 2 ヒンジアーチの動的・静的挙動，土木学会第 22 回年次講演会概要集，pp. 68-1~68-2，1967 年 5 月.
- 20) 吉村虎蔵ほか：上路式補剛アーチ橋を水平に弾性拘束したときの結合法による動的解析とその拘束効果，土木学会第 23 回年次講演会概要集，pp. 407~410，1968 年 10 月.
- 21) 吉村虎蔵ほか：結合法による中路式補剛アーチ橋の固有値解析とアーチの水平拘束効果，土木学会第 27 回年次講演会概要集，pp. 579~582，1972 年 10 月.

(1979.10.15・受付)