

不確定変量を有する動的系の非定常不規則応答

NONSTATIONARY RANDOM RESPONSE OF DYNAMIC
SYSTEMS WITH UNCERTAIN PROPERTIES

岡 林 隆 敏*

By Takatoshi OKABAYASHI

1. はじめに

土木構造物の中には、地震荷重、風荷重、波力、交通荷重のように、再現性のない不規則な荷重が作用するものが多い。そこで、荷重を確率過程でモデル化し、これを n 自由度系でモデル化した構造物に作用させることにより、応答を不規則振動論の観点から評価する研究がなされてきた。さらに近年、荷重に関する研究の進展に伴って、荷重の非定常な特性が明らかになりつつあり、このような非定常性を考慮した解析が試みられている。

一方、構造物のモデル化に際して、質量および弾性係数等の材料特性の変動および断面等の幾何学的特性の変動さらに、材料強度の変動等のさまざまな変動が解析モデルの中に不確定要因として持ち込まれることは避けられない。これらの不確定要因は、構造物の動的特性値、すなわち、固有振動数、減衰定数、固有モード等を不確定なものにし、その結果、外力の不確定性と相まって、応答に変動を生じさせる原因となる。特に、狭帯域過程でモデル化された入力を受ける減衰の小さい構造物では、確率変量の変動は応答に敏感に影響する。したがって、地震応答や走行車両による橋梁の応答等の観点からも、このような系の応答解析理論の確立は重要であるものと考えられる。

構造物の諸特性を確率変数と考えた初期の研究として Keller¹⁾ による不規則媒体中の波動伝播に関する研究、さらに、Bogdanoff・Chenea²⁾ および Kozin³⁾ による 1 自由度系の動特性の解析が知られている。確率変量を有する動的系の応答解析には、摂動法 (Perturbation Method) および線形近似理論を適用したものが^{4)~6)} 多い。星谷^{7)~9)} は 1 自由度系の応答解析の手法を示し、インパルス応答関数の変動について検討を加えた。さらに曲げ剛性と質量を確率変数と考えた、白色雑音を入力と

する矩形板の非定常応答解析を行っている。Chen¹⁰⁾ は、固有振動数が確率変数である、1 自由度系のインパルス応答関数について解析し、El Centro¹¹⁾ 地震を外力とする 3 自由度系の解析に適用した。松島¹²⁾ は地震外力を強度も変動する白色雑音でモデル化し、質量および剛性を確率変数とした多自由度せん断型モデルの定常応答解析を行った。また、山崎¹³⁾ は地震応答解析に線形近似理論を適用し、最大応答の変動の解析を行っている。さらに星谷・千葉¹⁴⁾ は、松島の解析より得られる固有振動数と固有モードに対して、シミュレーションにより検討を加えた。

しかしながら、摂動法の適用範囲は、確率変数の変動が小さい場合に限定される¹⁾。変動の大きい場合の解析手法の 1 つとして階層法 (Hierarchy Method) が知られている。Keller¹⁵⁾ は不規則媒体中を伝播する波動の解析に階層法を適用した。Richardson¹⁶⁾ は確率過程を係数とする線形方程式の初期値問題の解析を行い、階層方程式の打切近似として、(a) 相関関数打ち切り、(b) キュムラント打ち切り、(c) 最小二乗誤差を提案している。また、階層法^{17)~19)} による境界値問題の解析もなされている。中川ら²⁰⁾ は、非定常狭帯域過程を入力とする、質量ばね定数および減衰定数が確率変数である 1 自由度系に対して、非定常応答解析を行っている。この非定常応答解析は、Duhamel の積分を基礎とするものであるために、外力のパワースペクトル密度の形状および非定常性のいかんによっては、応答解析は煩雑になることが予想される。

本論文では、変動が大きく、かつ確率分布がガウス分布に制約されない確率変量を有する、非定常不規則外力を受ける構造物の解析モデルについて述べるとともに、非定常 r.m.s. (root mean square) 変位、および速度応答の確率変量による平均値を得るための手法を提案した。さらに、数値計算に基づいて、本解法の適用限界をシミュレーションにより検討し、確率変数の変動ならば

* 正会員 工修 長崎大学助手 工学部土木工学科

に相関が r.m.s. 変位応答の確率変量による平均値に及ぼす影響について考察を加えた。

解析モデルは、伊藤型の確率微分方程式で表現する。非定常応答解析は、これより誘導される共分散方程式により遂行される。不確定変量は、共分散方程式に高次モーメント打切近似および高次キュムラント打切近似を用いた階層法を適用することにより処理した。したがって、本解法によれば、非定常不規則外力を受ける系の非定常 r.m.s. 応答の確率変量による平均値の解析は微分方程式の数値解析に、定常不規則外力を受ける系の定常 r.m.s. 応答解析は連立方程式の解法に帰着する。

2. 動的系の表現

(1) 状態空間表示と共分散方程式

外力 $f(t)$ を受ける n_1 自由度系の運動方程式は、

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる²¹⁾。ここに、 $q(t)$ および $f(t)$ は、それぞれ n_1 次元ベクトルであり、 M 、 C および K は、それぞれ $(n_1 \times n_1)$ の質量行列、減衰行列および剛性行列である。

状態ベクトル

$$Y(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

を導入し、式 (1) を状態空間表示すれば、

$$\dot{Y}(t) = A_Y Y(t) + F_Y(t), \quad Y(t_0) = Y_0 \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここに、 $Y(t)$ 、 $F_Y(t)$ 、 Y_0 は m_1 次元ベクトル、また A_Y は $(m_1 \times m_1)$ 行列である。なお、 Y_0 は初期条件である。ここで、 $m_1 = 2n_1$ とした。 A_Y および $F_Y(t)$ は次のようになる。

$$A_Y = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

$$F_Y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

外力 $f(t)$ は、平均値 0 の定常過程ベクトル $Z(t)$ と、確定関数 $g(t)$ の積で表わされる非定常過程とする。

$$f(t) = g(t) \cdot Z(t) \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $Z(t)$ および $g(t)$ は、それぞれ m_2 次元ベクトルと $(n_1 \times m_2)$ 行列である。 T は転置行列を表わす記号である。ここで、 $F_Y(t)$ は一般化して、次のように表示する。

$$F_Y(t) = A_{YZ}(t) \cdot Z(t) \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $A_{YZ}(t)$ は $(m_1 \times m_2)$ 行列である。

ところで、任意のパワースペクトル密度を有する定常過程は、白色雑音過程を入力とする線形微分方程式（フィルター系）の定常解過程として得られる。ゆえに、

このフィルター方程式は、次の伊藤型の確率微分方程式^{22),23)}で記述される。

$$dZ(t) = A_Z Z(t) dt + B_Z dW_Z(t) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $Z(t)$ は m_2 次元ベクトル、 A_Z および B_Z は $(m_2 \times m_2)$ 行列である。また、 $W_Z(t)$ は m_2 次元のウィナー過程^{22),23)}であり、次のような確率特性を有するガウス過程である。

$$(i) \quad E[dW_Z(t)] = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$(ii) \quad E[dW_Z(t) dW_Z(t)^T] = I_Z dt \dots\dots (10)$$

なお、 I_Z は $(m_2 \times m_2)$ の単位行列である。

構造物系とフィルター系を 1 つの合成系と見なし、 $n = m_1 + m_2$ 次元の状態ベクトル

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

を用いると、構造物—フィルター系は式 (3)、(7)、(8) より、

$$\left. \begin{aligned} dX(t) &= A_X(t) X(t) dt + B_X(t) dW_X(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

で表わされる。 $A_X(t)$ 、 $B_X(t)$ は次式で示される $(n \times n)$ 行列である。

$$A_X(t) = \begin{bmatrix} A_Y & A_{YZ}(t) \\ 0 & A_Z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$B_X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_Z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

なお、解析を一般化するために、式 (14) は時間関数としておく。また、 $dW_X(t)$ はウィナー過程より構成される n 次元ベクトル

$$dW_X(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ dW_Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

である。 n 次元の初期値ベクトル X_0 は、ここでは、外力と独立な確率変数と考える。一般的な結論を誘導するために、以後、式 (12) を基礎式とする。

式 (12) は線形微分方程式であるので、応答 $X(t)$ の確率特性は、平均値と共分散により規定される。

a) 平均値応答

式 (12) の両辺に平均操作を施すと、次式を得る。

$$E[\dot{X}(t)] = A_X(t) E[X(t)], \quad E[X(t_0)] = E[X_0] \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $E[]$ は外力の確率過程に対する集合平均を表わす演算子である。

b) 共分散応答

応答 $X(t)$ の共分散行列 $R_X(t)$ は、次式で定義される。

$$R_X(t) = E[(X(t) - E[X(t)]) \cdot (X(t) - E[X(t)])^T] \dots\dots\dots (17)$$

この共分散 $R_X(t)$ の応答は、共分散方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_X(t) &= \mathbf{A}_X(t) \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{R}_X(t) \mathbf{A}_X(t)^T \\ &\quad + \mathbf{B}_X(t) \mathbf{Q}_X \mathbf{B}_X(t)^T \\ \mathbf{R}_X(t_0) &= \mathbf{R}_X \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

により記述される。ただし、 \mathbf{Q}_X は $\mathbf{W}_X(t)$ の共分散に
関係した行列である。なお、共分散方程式の誘導は、補
遺 (A) に示した。一方、フィルター系の応答は、定常
過程であるので、式 (8) に対応する共分散方程式は、

$$\mathbf{A}_Z \mathbf{R}_Z(t) + \mathbf{R}_Z(t) \mathbf{A}_Z^T + \mathbf{B}_Z \mathbf{I}_Z \mathbf{B}_Z^T = \mathbf{0} \dots\dots\dots (19)$$

の連立方程式で表わされる。

ここで、非定常 r.m.s. 応答と定常 r.m.s. 応答につい
て説明する。非定常 r.m.s. 応答とは分散 \mathbf{R}_X を有す
る不確定変数で表わされる初期条件のもとで、非定常不
規則外力を受ける系の変位および速度に関する r.m.s.
値の時間的変化である。これは式 (18) のマトリックス
形式の微分方程式より得られる。他方、定常 r.m.s. 応
答は、定常な不規則外力を受ける系における $t \rightarrow \infty$
の応答である。この場合、式 (18) の共分散方程式は
 $\dot{\mathbf{R}}_X(t) = \mathbf{0}$ となる。したがって応答解析は連立方程式の
解法に帰着する。なお、本解法は、変数を状態空間で表
示するために、変位の分散、変位と速度の共分散および
速度の分散が同時に得られる。

(2) 係数が確率変数である共分散方程式

式 (1) の係数行列 \mathbf{M} , \mathbf{C} および \mathbf{K} の要素を、外力
ならびに初期条件と独立な確率変数と考える。それぞれの
行列の要素の中に、確率変数が m 個あるものとして、
新たに確率変数を $A_1 \dots A_m$ で表わす。さらに一般的に、
フィルター系の係数を確率変数と考えても、本質的な理
論の変更は必要としない。この確率変数の集合を

$$\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \dots\dots\dots (20)$$

で定義し、さらに、 \mathbf{A} の実現値の集合を

$$\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \dots\dots\dots (21)$$

で定義する。式 (12) の係数がこのような確率変数で表
わされるものとする。応答 $\mathbf{X}(t)$ は、外力ばかりでな
く、係数の \mathbf{A} に依存した確率変数となる。このことを
強調して、係数が確率変数である場合、式 (12) の変数
を $\mathbf{X}(t, \mathbf{A})$ で表わすと、式 (12) は、

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{X}(t, \mathbf{A}) &= \mathbf{A}_X(t, \mathbf{A}) \mathbf{X}(t, \mathbf{A}) dt \\ &\quad + \mathbf{B}_X(t, \mathbf{A}) d\mathbf{W}_X(t) \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

のように書き改められる。

この確率微分方程式に対応する共分散方程式を誘導す
るために、 $\mathbf{X}(t, \mathbf{A})$ の共分散を定義する。 $\mathbf{A} = \lambda$ である
場合、 $\mathbf{X}(t, \mathbf{A})$ の条件付き確率密度関数は、 $\mathbf{X}(t, \mathbf{A})$ と
 \mathbf{A} の結合確率密度関数 $P(\mathbf{x}, t, \lambda)$ と \mathbf{A} の確率密度関

数 $P(\lambda)$ を用いて、

$$P(\mathbf{x}, t | \mathbf{A} = \lambda) = P(\mathbf{x}, t, \lambda) / P(\lambda) \dots\dots\dots (23)$$

により定義²⁴⁾される。 \mathbf{x} は $\mathbf{X}(t, \mathbf{A})$ の実現値であるが、
 \mathbf{A} に関する確率変数である。なお、 \mathbf{x} は $\mathbf{x}(t)$ を略記
したものである。

$\mathbf{X}(t, \mathbf{A})$ の共分散行列 $\mathbf{R}_X(t, \mathbf{A})$ は、条件付き期待
値

$$\int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T P(\mathbf{x}, t | \mathbf{A}) d\mathbf{x} \dots\dots\dots (24)$$

となり、これは \mathbf{A} に関する確率変数である。一方、
 $\mathbf{R}_X(t, \mathbf{A})$ に関する共分散方程式は、式 (18) を誘導し
た同じ手順より、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_X(t, \mathbf{A}) &= \mathbf{A}_X(t, \mathbf{A}) \mathbf{R}_X(t, \mathbf{A}) \\ &\quad + \mathbf{R}_X(t, \mathbf{A}) \mathbf{A}_X(t, \mathbf{A})^T \\ &\quad + \mathbf{B}_X(t, \mathbf{A}) \mathbf{Q}_X \mathbf{B}_X(t, \mathbf{A})^T \dots\dots (25) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、この共分散方程式は、確率微分方程式
になっている。本研究の解析の対象は、 $\mathbf{R}_X(t, \mathbf{A})$ の \mathbf{A}
に関する平均値、すなわち、

$$\langle \mathbf{R}_X(t, \mathbf{A}) \rangle = \int \mathbf{R}_X(t, \lambda) P(\lambda) d\lambda \dots\dots\dots (26)$$

である。なお、 $\langle \rangle$ の記号は \mathbf{A} に関する平均操作を表
わすものとする。本研究では共分散応答に着目してい
るので、以後の解析では一般性を失うことなく、平均値応
答は、

$$E[\mathbf{X}(t, \mathbf{A})] = \mathbf{0} \dots\dots\dots (27)$$

とする。

3. 階層方程式の誘導

Richardson¹⁹⁾ は、階層法を適用して線形微分方程式
の初期値問題の解析を行っている。本論文では、この階
層法を共分散方程式に適用する。

解析の便宜上、行列形式で表現される式 (25) の微分
方程式を、通常のベクトル形式の微分方程式

$$\dot{\mathbf{H}}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{G}(t, \mathbf{A}) \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) + \mathbf{F}(t, \mathbf{A}) \dots\dots\dots (28)$$

に展開する。共分散行列は対称行列であるから、この展
開によって、 $(n \times n)$ の共分散行列は、 $n(n+1)/2$ 次元
ベクトル $\mathbf{H}(t, \mathbf{A})$ に変換される。ここに、 $\mathbf{G}(t, \mathbf{A})$ は
 $\mathbf{A}_X(t, \mathbf{A})$ の要素から構成される $(n(n+1)/2)^2$ 行列で
ある。 $\mathbf{A}(t, \mathbf{A})$ から $\mathbf{G}(t, \mathbf{A})$ への変換については、
Bellman²⁵⁾ および Chen²⁶⁾ らによって研究されている。
Chen²⁹⁾ らは、 $\mathbf{A}_X(t, \mathbf{A})$ の要素から $\mathbf{G}(t, \mathbf{A})$ を構成す
るアルゴリズムを提案している。なお、フィルター系の
定常解、すなわち式 (19) の解を式 (28) の微分方程式
に組み込むと、式 (28) のベクトルの次元は $m_2(m_2 +$
 $1)/2$ だけ減少する。さらに、 $\mathbf{G}(t, \mathbf{A})$ および $\mathbf{F}(t, \mathbf{A})$
も、対応した形に変更される。

式 (28) において、 $\mathbf{G}(t, \mathbf{A})$ および $\mathbf{F}(t, \mathbf{A})$ は、 A_i

の 2 次の項まで含むものと仮定する。このとき、 $\mathbf{G}(t, \mathbf{A})$ および $\mathbf{F}(t, \mathbf{A})$ は、次式のように表わすことができる。

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{G}_0(t) + \sum_{i=1}^m A_i \mathbf{G}_i(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i A_i A_j \mathbf{G}_{ij}(t) \dots \dots \dots (29)$$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{A}) = \mathbf{F}_0(t) + \sum_{i=1}^m A_i \mathbf{F}_i(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i A_i A_j \mathbf{F}_{ij}(t) \dots \dots \dots (30)$$

なお、 $\mathbf{G}_0(t)$ 、 $\mathbf{G}_i(t)$ 、 $\mathbf{G}_{ij}(t)$ は $\mathbf{G}(t, \mathbf{A})$ と同じ次元の行列であり、また、 $\mathbf{F}_0(t)$ 、 $\mathbf{F}_i(t)$ 、 $\mathbf{F}_{ij}(t)$ は、 $\mathbf{F}(t, \mathbf{A})$ と同じ次元のベクトルである。

このような仮定のもとで階層方程式を誘導する。式 (29)、(30) を式 (28) に代入し、両辺に \mathbf{A} に関する平均操作を施せば、

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{H}}(t, \mathbf{A}) \rangle &= \mathbf{G}_0(t) \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_i(t) \langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbf{G}_{ij}(t) \langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mathbf{F}_0(t) \\ &+ \sum_{i=1}^m \langle A_i \rangle \mathbf{F}_i(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \langle A_i A_j \rangle \mathbf{F}_{ij}(t) \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

を得る。この微分方程式を解くためには、未知数 $\langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ および $\langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ を確定しなければならない。そこで、式 (28) の両辺に A_k を掛けて、両辺に \mathbf{A} に関する平均操作を施せば、 $\langle A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle A_k \dot{\mathbf{H}}(t, \mathbf{A}) \rangle &= \mathbf{G}_0(t) \langle A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_i(t) \langle A_i A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbf{G}_{ij}(t) \langle A_i A_j A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \\ &+ \mathbf{F}_0(t) \langle A_k \rangle + \sum_{i=1}^m \langle A_i A_k \rangle \mathbf{F}_i(t) \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \langle A_i A_j A_k \rangle \mathbf{F}_{ij}(t) \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

この式では、新たな未知数として $\langle A_i A_j A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ が現われる。さらに $\langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ に関する微分方程式を得るためには、式 (28) の両辺に $A_l A_m$ を掛けて両辺に \mathbf{A} に関する平均操作を施す。この操作を続ける限りこの連鎖は無限に続くことになり、閉じた形の方程式は得られない。そこで、適当な段階でこの操作を打ち切り、何らかの仮定を設けることにより、解析可能な微分方程式群を得るための手段を考える。

本論文では式 (32) の段階の階層で打ち切りを実施する。その結果 $\langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ および $\langle A_i A_j A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ は未知数として残るので、これらを低次のモーメントを用いて表現する手段を考える。高次モーメントを低次のモーメントで近似する手段としては、(a) 中心モーメン

ト打ち、(b) キュムラント打ち、(c) 最小二乗誤差近似等が提案^{(6), (27)}されている。Wilcox, Bellman⁽²⁸⁾ は、種々の近似について、共分散行列が非負定値である観点から検討を加え、キュムラント打ちが最良であることを指摘している。本論文では高次中心モーメント打ちと高次キュムラント打ちの両近似について検討した。

4. 打ち近似と階層方程式

(1) 打ち近似について

a) 高次中心モーメント打ち

\mathbf{y} を n 次元確率変数ベクトルとして、 n 次元結合確率密度関数を $P(\mathbf{y})$ で表わす。このとき、 $k_1 \dots k_n$ 次の結合中心モーメント $\mu_{k_1 \dots k_n}$ ⁽²⁹⁾ は、

$$\begin{aligned} E[(y_1 - \mu_1)^{k_1} \dots (y_n - \mu_n)^{k_n}] \\ = \int (y_1 - \mu_1)^{k_1} \dots (y_n - \mu_n)^{k_n} P(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \dots (33) \end{aligned}$$

で定義される。ここに、 μ_1, \dots, μ_n はそれぞれ $E[y_1], \dots, E[y_n]$ を表わすものとする。この章では、 $E[\]$ は、与えられた確率変数に対する集合平均を示している。

2次、3次の中心モーメントを

$$E[(y_1 - \mu_1)(y_2 - \mu_2)] = \sigma_{12}^2 \dots \dots \dots (34)$$

$$E[(y_1 - \mu_1)(y_2 - \mu_2)(y_3 - \mu_3)] = \mu_{111} \dots \dots \dots (35)$$

で表わすと、2次、3次のモーメントは、

$$E[y_1 y_2] = \sigma_{12}^2 + \mu_1 \mu_2 \dots \dots \dots (36)$$

$$E[y_1 y_2 y_3] = \mu_{111} + \sigma_{12}^2 \mu_3 + \sigma_{13}^2 \mu_2 + \sigma_{23}^2 \mu_1 \dots (37)$$

となる。次に、4次、5次の中心モーメントを0と仮定すると、4次、5次のモーメントは、3次以下の中心モーメントで記述される。そこで、4次以上の中心モーメント打ち近似を、 $\langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ および $\langle A_i A_j A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ の記述に適用する。

$\mathbf{H}(t, \mathbf{A})$ の要素を $E[x_m x_n]$ で表わす。 $\mathbf{X}(t, \mathbf{A})$ の平均値は0と仮定しているので、

$$\{x_m\} = \{x_n\} = 0 \dots \dots \dots (38)$$

となる。ここに、 $\{ \}$ の記号は \mathbf{A} のみの平均値 $\langle \rangle$ と区別して、外力の確率過程と不確定要因を表わす確率変数 \mathbf{A} の両変数に関する平均を表わすものとする。4次、5次のモーメントは、

$$\begin{aligned} \{A_i A_j x_m x_n\} &= -\mu_i \mu_j \{x_m x_n\} + \mu_j \{A_i x_m x_n\} \\ &+ \mu_i \{A_j x_m x_n\} \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{A_i A_j A_k x_m x_n\} &= -2 \mu_i \mu_j \mu_k \{x_m x_n\} \\ &+ \mu_j \mu_k \{A_i x_m x_n\} + \mu_i \mu_k \{A_j x_m x_n\} \\ &+ \mu_i \mu_j \{A_k x_m x_n\} \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \{A_i x_m\} &= \{A_i x_n\} = \{A_j x_m\} = \{A_j x_n\} = \{A_k x_m\} \\ &= \{A_k x_n\} = 0 \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

不確定変量を有する動的系の非定常不規則応答

の関係を用いた。さらに、 μ_i, μ_j, μ_k は式 (26) で定義した

$$\mu_i = \langle A_i \rangle \dots \dots \dots (42)$$

で代表される不確定変量 \mathbf{A} の平均値である。

式 (39), (40) をベクトル表示することにより、次式を得る。

$$\langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle = -\mu_i \mu_j \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mu_j \langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mu_j \langle A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \dots \dots (43)$$

$$\langle A_i A_j A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle = -2 \mu_i \mu_j \mu_k \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mu_i \mu_k \langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mu_i \mu_k \langle A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mu_i \mu_j \langle A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \dots \dots (44)$$

b) 高次キュムラント打切り

n 次元確率変数ベクトルの特性関数は、

$$\phi(\mathbf{t}) = \int \exp(i\mathbf{t}^T \mathbf{y}) P(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \dots \dots \dots (45)$$

で定義²⁹⁾される。ここに、 \mathbf{t} は n 次元ベクトルであり、 i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ である。このとき、 $k_1 \dots k_n$ 次のキュムラントは、次式で定義される統計量²⁹⁾である。

$$K_{k_1 \dots k_n} = (i)^{-\sum k_i} \frac{\partial^{\sum k_i}}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}} \ln \phi(\mathbf{t}) |_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} \dots \dots (46)$$

次に、5 次までのキュムラントを示すが、記述の便宜上一般性を失うことなく、平均値を 0 としたものである。確率変数が平均値を有する場合は、平均値回りの変動 \hat{y}_i を $y_i - \mu_i$ に置き換えることにより、変換可能である。

(i) 1 次のキュムラント

$$K_1 = E[\hat{y}_1] = 0 \dots \dots \dots (47)$$

(ii) 2 次のキュムラント

$$K_{11} = E[\hat{y}_1 \hat{y}_1] = \sigma_{12}^2 \dots \dots \dots (48)$$

(iii) 3 次のキュムラント

$$K_{111} = \mu_{111} \dots \dots \dots (49)$$

(iv) 4 次のキュムラント

$$K_{1111} = \mu_{1111} - \mu_{1100} \mu_{0011} - \mu_{1010} \mu_{0101} - \mu_{1001} \mu_{0110} \dots \dots \dots (50)$$

(v) 5 次のキュムラント

$$K_{11111} = \mu_{11111} - \mu_{11100} \mu_{00011} - \mu_{11010} \mu_{01010} - \mu_{10011} \mu_{01100} - \mu_{01011} \mu_{10100} - \mu_{01101} \mu_{10010} - \mu_{00111} \mu_{11000} - \mu_{01110} \mu_{10001} - \mu_{10110} \mu_{01001} \dots \dots \dots (51)$$

4 次、5 次のキュムラントを切捨てることにより、4 次、5 次のモーメントは、3 次以下のモーメントで記述される。**a)** で用いた同じ条件、すなわち式 (38), (41) を用いて、4 次以上のキュムラント打切近似を $\langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$, および $\langle A_i A_j A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle$ の記述に適用する。その結果、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \{A_i A_j x_m x_n\} &= (\sigma_{ij}^2 - \mu_i \mu_j) \{x_m x_n\} \\ &+ \mu_j \{A_i x_m x_n\} + \mu_i \{A_j x_m x_n\} \dots \dots \dots (52) \\ \{A_i A_j A_k x_m x_n\} &= (\mu_{ijk} - 2 \mu_i \mu_j \mu_k) \{x_m x_n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (\sigma_{jk}^2 + \mu_j \mu_k) \{A_i x_m x_n\} + (\sigma_{ik}^2 + \mu_i \mu_k) \\ &\cdot \{A_j x_m x_n\} + (\sigma_{ij}^2 + \mu_i \mu_j) \{A_k x_m x_n\} \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

これをベクトル表示したものが、次式である。

$$\langle A_i A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle = (\sigma_{ij}^2 - \mu_i \mu_j) \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mu_j \langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \mu_i \langle A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \dots \dots (54)$$

$$\begin{aligned} \langle A_i A_j A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle &= (\mu_{ijk} - 2 \mu_i \mu_j \mu_k) \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \\ &+ (\sigma_{jk}^2 + \mu_j \mu_k) \langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + (\sigma_{ik}^2 + \mu_i \mu_k) \\ &\langle A_j \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + (\sigma_{ij}^2 + \mu_i \mu_j) \langle A_k \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \dots \dots (55) \end{aligned}$$

なお、 \mathbf{A} の統計量として、次の諸量を用いた。

$$\mu_i = \langle A_i \rangle \dots \dots \dots (56)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \langle (A_i - \mu_i)(A_j - \mu_j) \rangle \dots \dots \dots (57)$$

$$\mu_{ijk} = \langle (A_i - \mu_i)(A_j - \mu_j)(A_k - \mu_k) \rangle \dots \dots (58)$$

(2) 打切近似を用いた階層方程式

上述のように、高次中心モーメント打切および高次キュムラント打切いずれの場合でも、4 次および 5 次のモーメントは、3 次以下のモーメントで記述できる。しかし、式 (43), (44) から明らかなように、中心モーメント打切近似では、確率変数の変動が解析の中に組み込まない。したがって、本論文では高次キュムラント打切近似を用いる。

式 (31), (32) の階層方程式に、キュムラント打切近似の式 (54), (55) を代入すると、解析可能な閉じた形の連立方程式を得ることができる。これを整理して示したものが、次の式である。

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{H}}(t, \mathbf{A}) \rangle &= \mathbf{K}_{00} \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \mathbf{K}_{0i} \langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{A}) \rangle \dots \dots (59) \\ \langle A_k \dot{\mathbf{H}}(t, \mathbf{A}) \rangle &= \mathbf{K}_{k0} \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \mathbf{K}_{ki} \langle A_i \mathbf{H}(t, \mathbf{A}) \rangle + \langle A_k \mathbf{F}(t, \mathbf{A}) \rangle \dots \dots (60) \end{aligned}$$

ただし、係数行列および外力ベクトルは、次のとおりである。

$$\mathbf{K}_{00} = \mathbf{G}_0(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbf{G}_{ij}(t) (\sigma_{ij}^2 - \mu_i \mu_j) \dots \dots (61)$$

$$\mathbf{K}_{0l} = \mathbf{G}_l(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_{il}(t) \mu_i \dots \dots \dots (62)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k0} &= \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_i(t) (\sigma_{ki}^2 - \mu_k \mu_i) \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbf{G}_{ij}(t) (\mu_{ijk} - 2 \mu_i \mu_j \mu_k) \dots \dots (63) \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{kl} = \mathbf{G}_l(t) \mu_k + \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_{li}(t) (\sigma_{ik}^2 + \mu_i \mu_k) \dots \dots (64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{kk} &= \mathbf{G}_0(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_i(t) \mu_i \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbf{G}_{ij}(t) (\sigma_{ij}^2 + \mu_i \mu_j) + \mathbf{G}_k(t) \mu_k \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_{ik}(t) (\sigma_{ik}^2 + \mu_i \mu_k) \dots\dots\dots (65)$$

$$\langle \mathbf{F}(t, \mathbf{A}) \rangle = \mathbf{F}_0(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i(t) \mu_i$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbf{F}_{ij}(t) (\sigma_{ij}^2 + \mu_i \mu_j) \dots\dots\dots (66)$$

$$\langle A_k \mathbf{F}(t, \mathbf{A}) \rangle = \mathbf{F}_0(t) \mu_k + \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i(t) (\sigma_{ik}^2 + \mu_i \mu_k)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbf{F}_{ij}(t) (\mu_{ijk} + \sigma_{ij}^2 \mu_k$$

$$+ \sigma_{jk}^2 \mu_i + \sigma_{ki}^2 \mu_j) \dots\dots\dots (67)$$

なお、 $l=1, \dots, m$ および $k=1, \dots, m$ であり、 $\mathbf{G}_{ij}(t) = \mathbf{G}_{ji}(t)$ とする。

式 (59), (60) が、確率変量を有する系の非定常応答解析の基礎式である。方程式の係数は、確率変数の 3 次の統計量から構成されており、また確率変数の分布に関する制約は何ら付加されていない。非定常 r.m.s. 変位および速度応答の不確定変量による平均値の解析は、この微分方程式を直接解くことにより達成される。一方、定常 r.m.s. 変位および速度応答の平均値の解析では、形状関数 $\mathbf{g}(t)$ は定数であるので係数行列は定数行列となり、さらに、 $t \rightarrow \infty$ では初期条件の影響がなくなるので、式 (59), (60) の微分項は $\mathbf{0}$ となる。したがって、この解析は連立方程式の解法に帰着する。このように、本解法によれば、変位および速度の r.m.s. 応答の平均値解析に関して、非定常応答解析と定常応答解析は統一のとらえられる。

5. 解析に用いる統計量と数値解析モデル

一般性を失うことなく解析を単純化するために、動的系として、次のような 1 自由度系を考える。

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \dots\dots\dots (68)$$

この系において、ばね定数 k と質量 m をガウス確率変数と仮定し、減衰係数 c は確定量とする。なお **3.** の解析と対応させると、 $A_1=k, A_2=1/m$ となる。解析に必要な k, m の統計量を次のように定義する。

質量の平均値	$\langle m \rangle$	μ_m
ばね定数の平均値	$\langle k \rangle$	μ_k
質量の分散	$\langle (m - \mu_m)^2 \rangle$	σ_m^2
ばね定数の分散	$\langle (k - \mu_k)^2 \rangle$	σ_k^2
質量とばね定数の共分散	$\langle (m - \mu_m)(k - \mu_k) \rangle$	σ_{mk}^2
質量の変動係数	σ_m / μ_m	v_m
ばね定数の変動係数	σ_k / μ_k	v_k
質量とばね定数の相関係数	$\sigma_{mk} / (\mu_m \mu_k)^{1/2}$	r_{mk}

A_1 と A_2 に関する統計量について考える。まず、 $1/m$

Table 1 Statistics of uncertain properties.

$\langle k \rangle$	μ_k	μ_k
$\langle 1/m \rangle$	μ_m	$(1 + v_m^2 + 3 v_m^4) / \mu_m$
$\langle (k - \mu_k)^2 \rangle$	σ_k^2	σ_k^2
$\langle (1/m - \mu_m)^2 \rangle$	σ_m^2	$v_m^2 (1 + 8 v_m^2) / \mu_m^2$
$\langle (k - \mu_k)(1/m - \mu_m) \rangle$	σ_{k^2}	$-\mu_k v_m v_k r_{mk} (1 + 3 v_m^2) / \mu_m$
$\langle (1/m)^2 \rangle$	m_{02}	$(1 + 3 v_m^2 + 15 v_m^4) / \mu_m^2$
$\langle (1/m)^3 \rangle$	m_{03}	$(1 + 6 v_m^2 + 45 v_m^4) / \mu_m^3$
$\langle k/m \rangle$	m_{11}	$\mu_k \mu_m + \sigma_{k^2}$
$\langle k/m^2 \rangle$	m_{12}	$\mu_k \{1 + 3 v_m^2 + 15 v_m^4 - 2 v_m v_k r_{mk} (1 + 6 v_m^2)\} / \mu_m^2$
$\langle (k - \mu_k)^2 (1/m - \mu_m) \rangle$	μ_{21}	$2 \mu_k^2 v_m^2 v_k^2 r_{mk}^2 / \mu_m$
$\langle (k - \mu_k)(1/m - \mu_m)^2 \rangle$	μ_{12}	$-4 \mu_k v_k v_m^2 r_{mk} / \mu_m^2$

を確率変数 m で表現するために、 $1/m$ を m の平均値回りの変動 \tilde{m} で展開し、 \tilde{m} の多項式で表わす。

$$1/m = \sum_{i=1}^{\infty} (-\tilde{m})^{i-1} \langle m \rangle^{-i} \dots\dots\dots (69)$$

\tilde{m} は平均値 0 のガウス確率変数であるから、この n 次のモーメントは次式で与えられる³⁰⁾。

$$\langle (\tilde{m})^n \rangle = \begin{cases} 0 & (n = \text{奇数}) \\ 2^{n/2} \pi^{-1/2} \sigma_{\tilde{m}}^n \Gamma((n+1)/2) & (n = \text{偶数}) \end{cases} \dots\dots\dots (70)$$

したがって、 A_1 と A_2 に関する統計量は、変動係数 v_m および v_k を用いて、さらに変動係数の 4 次の項まで考慮することにより、Table 1 のようになる。

なお、確率変数がガウス確率変数でない場合、Table 1 は所定の確率分布に対応する統計的特性値となる。この諸量を用いると、確率変数がガウス確率変数でない場合の解析が可能である。

次に、数値解析モデルと解析の条件について説明する。数値解析の対象にした 1 自由度系の諸量は次のとおりである。

質量の平均値	μ_m	1	(kg·s ² /cm)
ばね定数の平均値	μ_k	$4 \pi^2$	(kg/cm)
減衰係数	c	$0.4 \pi, 0.04 \pi$	(kg·s/cm)
固有円振動数	$\omega_1 (v_k = v_m = 0)$	2π	(rad/s)
減衰定数	$h_1 (v_k = v_m = 0)$	0.2, 0.02	

非定常過程を構成する形状関数として、

$$g(t) = \exp(-0.25 t) - \exp(-0.625 t) \dots\dots\dots (71)$$

を用いる。この関数は、Fig. 1 のように表わされるものである。一方、定常過程としては、白色雑音過程と狭帯域過程の 2 種類を考えている。狭帯域過程は、

$$S(\omega) = S / \{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 h_0^2 \omega_0^2 \omega^2\} \dots\dots\dots (72)$$

の形のパワースペクトル密度を有するものとする。 ω_0 は、中心振動数であり、パラメータ h_0 としては、

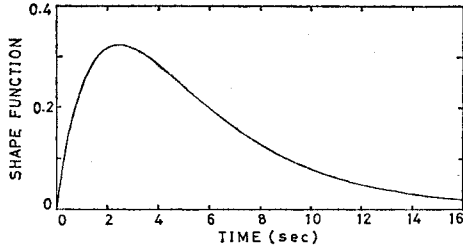


Fig. 1 Shape function.

0.02 を用いた. この定常過程は, フィルター方程式

$$\ddot{Z}(t) + 2h_0\omega_0\dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) = n(t) \dots\dots\dots (73)$$

の定常解過程で与えられる. なお, $n(t)$ はパワースペクトル密度 S を有する白色雑音過程である. この定常狭帯域過程の $Z(t)$ の分散は,

$$E[Z(t)^2] = S/4h_0\omega_0^3 \dots\dots\dots (74)$$

となる.

本論文では, 本解法の適用限界を検討するためにシミュレーションを行っている. このシミュレーションの概要は次のとおりである.

- ① 定常過程は, パワースペクトル密度の 0~4(Hz) 区間を 400 分割して, 三角級数モデルより合成した.
- ② 系の特性は, 各試行ごとに, 所定の確率特性を有するばね定数と質量を, 2次元ガウス乱数より発生させて実現する.
- ③ シミュレーションの結果は, 200 本の標本関数の平均である.

6. 数値解析と考察

(1) 白色雑音過程による r.m.s. 応答

減衰定数 h_1 が 0.2 で与えられる, 1 自由度系の解析モデルについて考える. 固有円振動数 ω_1 および減衰定数 h_1 は, 確率変量 (質量とばね定数) の変動が 0 のときの値を示すものとする. Fig. 2 (a) および Fig. 2 (b) は, それぞれ質量とばね定数の相関係数 r が 0 および 0.5 である場合, 解析解とシミュレーションによる定常 r.m.s. 変位応答の確率変量による変動の平均値を図示したものである. なお, 一般性を失うことなく, 確率変量の変動が応答に及ぼす影響について検討するために, 本論文の数値解析では, 質量とばね定数の変動係数は等しいものとした. 図において, 横軸は, 質量とばね定数の変動係数を表わしている. また, 縦軸は変動係数を増加させたときの定常 r.m.s. 変位応答の平均値 σ_V の変化を, 変動係数が 0 のときの定常 r.m.s. 変位応答 σ_0 で基準化した量である. 解析解とシミュレーション

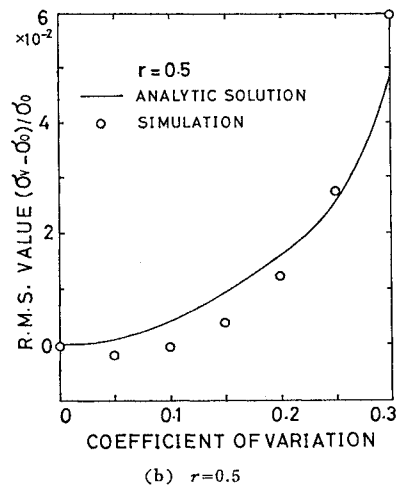
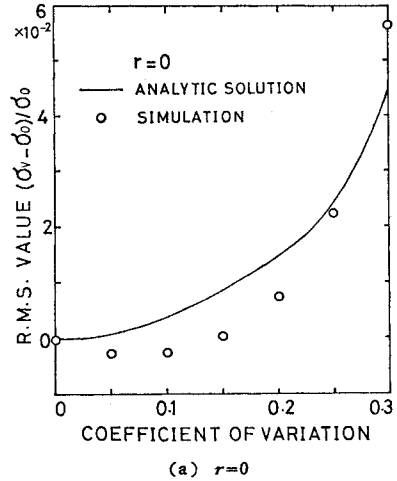


Fig. 2 Root mean square of stationary response versus coefficient of variation; white noise excitation.

の結果を比較すると, $r=0$ および $r=0.5$ いずれの場合でも, 両者の変動係数が, 0~0.3 の範囲で, よい一致を示している.

次に, 確率変量の変動と r.m.s. 応答の平均値の関係を見れば, 応答は変動係数が増加するのに伴って増加している. 変動係数 0.3 のときの応答の増加は, 約 6% 程度である. なお, 本論文では, r.m.s. 変位応答の不確定変量による変動の平均値を解析の対象としている. そこで, 以後, これを r.m.s. 応答の平均値と略記する.

Fig. 3 は, $r=0$ のとき, 変動係数をパラメータにした非定常 r.m.s. 応答解析の結果である. 図において縦軸は, 変動係数が 0 のときの非定常 r.m.s. 応答の最大値 $\sigma_0(t)_{max}$ で基準化した非定常 r.m.s. 応答の平均値 $\sigma_V(t)$ を示している. 定常応答と同じく, 変動係数の増加に伴って r.m.s. 応答の平均値は, わずかに増加している.

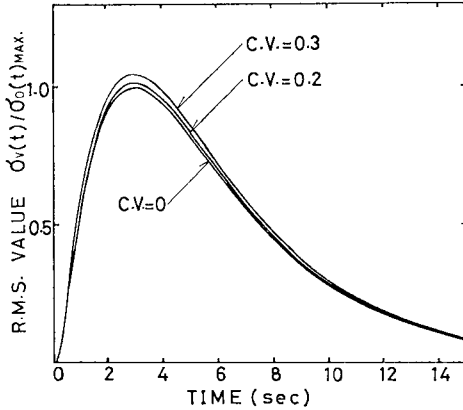


Fig. 3 Root mean square of nonstationary response; shaped white noise excitation.

(2) 狭帯域過程による定常 r.m.s. 応答

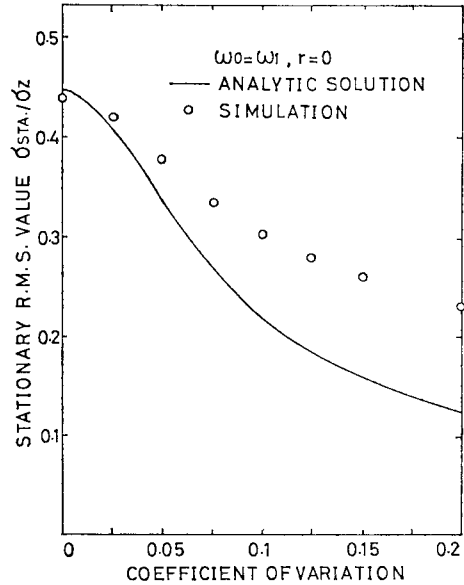
狭帯域過程を入力とする減衰の小さい1自由度系において、狭帯域過程の中心振動数と、系の固有振動数が接近する近傍では、質量とばね定数の変動は応答に敏感に反映することが予想される。そこで、1自由度系の減衰定数 h_1 を 0.02 とし、外力を狭帯域過程とするために、式 (73) のパラメーター h_0 を 0.02 とした。なお、狭帯域過程の中心振動数は、系の固有振動数と一致する場合 $\omega_0 = \omega_1$ と、これよりわずかに低い場合、 $\omega_0 = 0.8\omega_1$ について検討する。

Fig. 4 は、質量とばね定数の相関係数 $r=0$ である場合、変動係数に対する定常 r.m.s. 変位応答の平均値の変化を、解析解とシミュレーションにより示したものである。図において、横軸は質量、およびばね定数の変動係数である。縦軸は定常 r.m.s. 応答の平均値 $\hat{\sigma}_{sta}$ を、狭帯域過程の r.m.s. 値、すなわち式 (74) で与えられるフィルター系の r.m.s. 応答 σ_Z で基準化した量である。

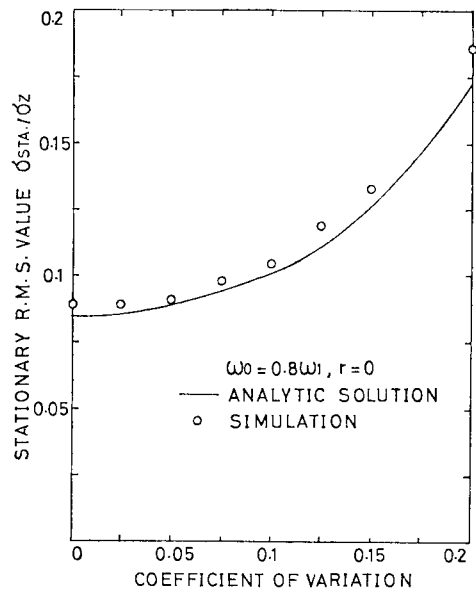
Fig. 4 (a) は、 $\omega_0 = \omega_1$ の結果である。r.m.s. 応答の平均値は、変動係数の増加に伴って減少するが、これは次のような理由によるものと考えられる。変動係数が増加するに従って固有振動数の変動が大きくなるので、共振状態でない標本が増加する。ゆえに、r.m.s. 応答の平均値は低下することになる。解析解とシミュレーションを比較すると、両者は同じ傾向で減少する。しかし、変動係数が増加するに伴って、解析解はシミュレーションに比べて減少する割合が大きくなる。したがって、本解法の適用できると考えられる変動係数の上限は 0.05~0.1 程度である。

Fig. 4 (b) は、 $\omega_0 = 0.8\omega_1$ の結果である。 $\omega_0 = \omega_1$ の場合とは逆に、変動係数の増加に伴って応答は増加している。すなわち、変動係数が増加するに従って狭帯域過

程の中心振動数に近い固有円振動数を有する系の標本が増加するので、r.m.s. 応答の平均値は増加することになる。変動係数が 0.2 に増加すると、解析解およびシミュレーションの結果は約 2 倍程度増加している。また、解析解は変動係数の 0~0.2 の範囲まで、シミュレーションとよい一致を示している。

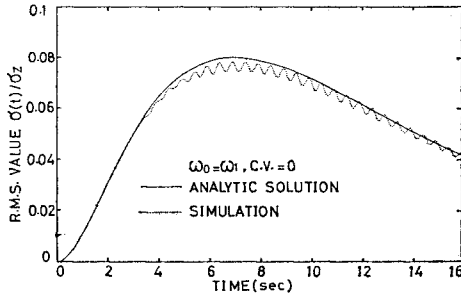


(a) $\omega_0 = \omega_1, r = 0$

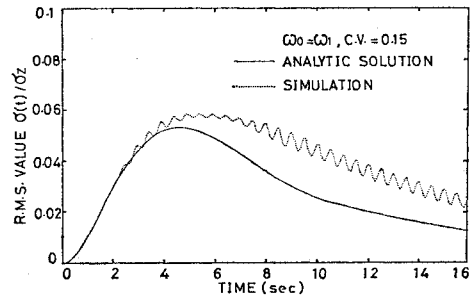


(b) $\omega_0 = 0.8\omega_1, r = 0$

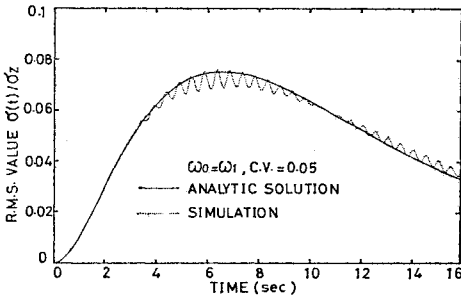
Fig. 4 Root mean square of stationary response versus coefficient of variation; narrow-band process excitation.



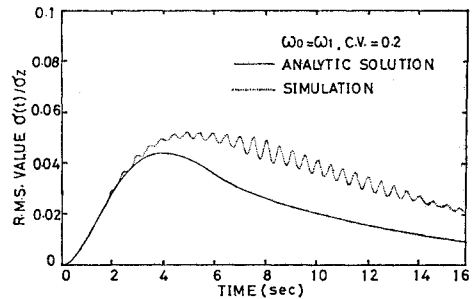
(a) C.V.=0



(d) C.V.=0.15

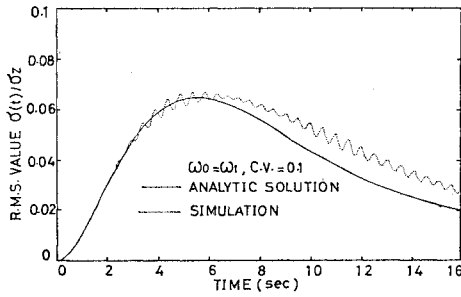


(b) C.V.=0.05



(e) C.V.=0.2

Fig. 5 Root mean square of nonstationary response; shaped narrow-band process excitation, $\omega_0 = \omega_1$.



(c) C.V.=0.1

Fig. 6 (a), (b), (c), (d), (e) は, $r=0$, $\omega_0=0.8\omega_1$ とした場合, それぞれ, 変動係数 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 に対する結果を示したものである. この条件では, シミュレーションと解析解は変動係数 0~0.2 の範囲でよく一致している. 変動係数の増加に伴って, 応答曲線の形状に著しい変化のみられなかった $\omega_0=\omega_1$ の場合に対して, $\omega_0=0.8\omega_1$ では, Fig. 6 (a), (b), (c) のように応答曲線の形状が変化している.

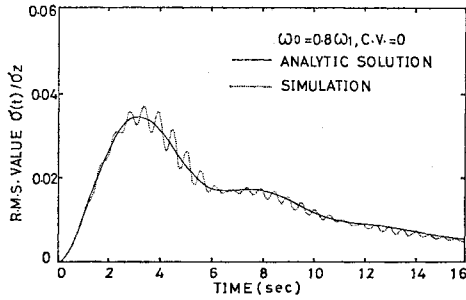
(3) 非定常狭帯域過程による非定常 r.m.s. 応答

Fig. 5 (a), (b), (c), (d), (e) は, $\omega_0=\omega_1$, $r=0$ の条件で, 変動係数をそれぞれ, 0, 0.05, 0.1, 0.15 および 0.2 と変化させた場合, 非定常 r.m.s. 応答の平均値を解析解とシミュレーションについて示したものである. Fig. 5 および 6 の縦軸は, 非定常 r.m.s. 変位応答の平均値 $\sigma(t)$ を, 狭帯域過程の分散値 σ_z で基準化した量である. 変動係数 0 および 0.05 では, 解析解とシミュレーションはよく一致している. 変動係数 0.1 では, 最大値は一致しているが, 応答の後半部で, 解析解はシミュレーションより小さな値となっている. 変動係数 0.15 および 0.2 では, 初期の立上がり部分を除いて, 解析解の値はシミュレーションより小さい. 以上の計算結果より, $\omega_0=\omega_1$ の場合, 本解法の適用限界は変動係数の上限が, 0.05~0.1 程度であると考えられる.

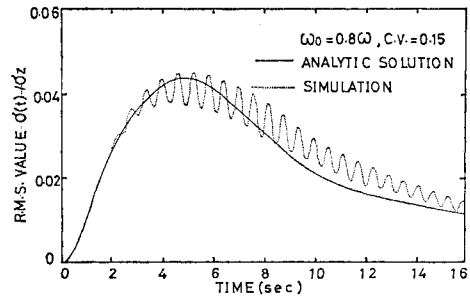
狭帯域過程が作用する減衰の小さい 1 自由度系を解析モデルとした場合, シミュレーションと比較の結果, 本解法は定常および非定常応答解析いずれの場合でも, $\omega_0=\omega_1$ では, 変動係数の上限が 0.05~0.1, $\omega_0=0.8\omega_1$ では 0.2 の範囲まで有効であることが検証できた. さらに, パラメーターを変化させた数値計算より, 狭帯域過程の中心振動数の近傍に固有振動数がある場合, 不確定変量の変動は応答に敏感に反映することが確認できた. したがって, このような系では, 不確定変量の変動は外力の変動と比べて小さな不確定変量と考えることはできない. さらに, 系の減衰が小さくなると, この傾向は強くなることが予想される.

(4) 相関係数による影響

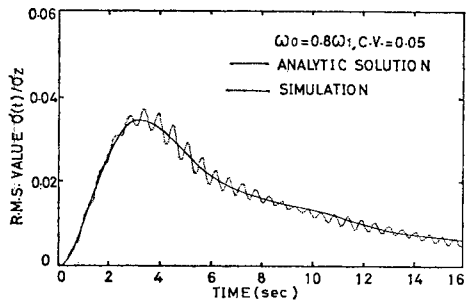
Fig. 7 は変動係数の増加に伴う定常 r.m.s. 変位応答の平均値の変化を, 相関係数 r をパラメーターに図示



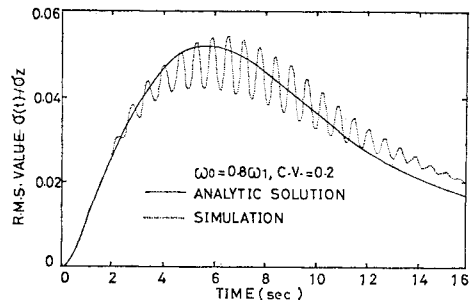
(a) C.V.=0



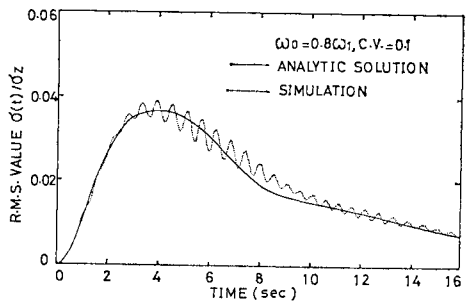
(d) C.V.=0.15



(b) C.V.=0.05



(e) C.V.=0.2



(c) C.V.=0.1

Fig. 6 Root mean square of nonstationary response; shaped narrow-band process excitation, $\omega_0 = 0.8 \omega_1$.

に変動は生じなく、r.m.s. 応答の平均値は変動係数の影響をほとんど受けない。一方、 $r = -1$ では、固有振動数の変動が最も大きくなり、変動係数の増大に伴って r.m.s. 応答の平均値は増加する。

Fig. 8 (a), (b) は、変動係数 0.1 のとき、それぞれ $\omega_0 = \omega_1$ および $\omega_0 = 0.8 \omega_1$ に対する非定常 r.m.s. 変位応答の平均値を、 r をパラメータに図示したものである。 $\omega_0 = \omega_1$ の場合、 $r = 1$ と $r = -1$ のときの最大応答を比較すると、後者は約 30% 程度減少している。一方、 $\omega_0 = 0.8 \omega_1$ では、 $r = 1$ に比べ $r = -1$ のときの最大応答は約 20% 程度増加している。また、応答曲線の形状は、 $\omega_0 = \omega_1$ の応答では、 r を変化させても著しい変化は認められないが、 $\omega_0 = 0.8 \omega_1$ の応答では、 r を変化させると、応答曲線の形状は異なった形状に移行している。

このように、相関係数が応答に及ぼす影響は大きく、数値計算に用いた 1 自由度系においては、変動係数と同程度の影響があることが明らかになった。また、相関係数が応答に及ぼす影響は、変動係数の増大に伴って大きくなるのがわかる。

7. おわりに

本論文では、変動が大きく、かつ確率分布がガウス分

したものである。**Fig. 7** (a) に、 $\omega_0 = \omega_1$ の結果を示した。 $r = -1$ では、変動係数の増加に伴って r.m.s. 応答の平均値は最も急激に変化するが、 $r = 1$ ではほとんど変化しない。この理由は次のように考えられる。すなわち、固有円振動数の平均値は、**Table 1** で示したように、

$$\langle k/m \rangle = \{ (1 + v_m^2 + 3v_m^4) - v_m v_k \bar{r}_{mk} (1 + 3v_m^2) \} \mu_k / \mu_m \dots (75)$$

となる。ここで、 $r = \bar{r}_{mk}$ としているので、 $r = 1$ のとき、 $\langle k/m \rangle = \mu_k / \mu_m$ となり、固有振動数は変動しない。これに対して、 $r = -1$ のとき、 $\langle k/m \rangle$ の値は $-1 \leq r \leq 1$ の中で最大となり、固有振動数の変動は最も大きくなる。ゆえに、変動係数による影響と同様に、 r の減少に伴って r.m.s. 応答の平均値は減少することになる。**Fig. 7** (b) は、 $\omega_0 = 0.8 \omega_1$ の結果を示したものである。 $r = 1$ では、変動係数を変化させても固有振動数

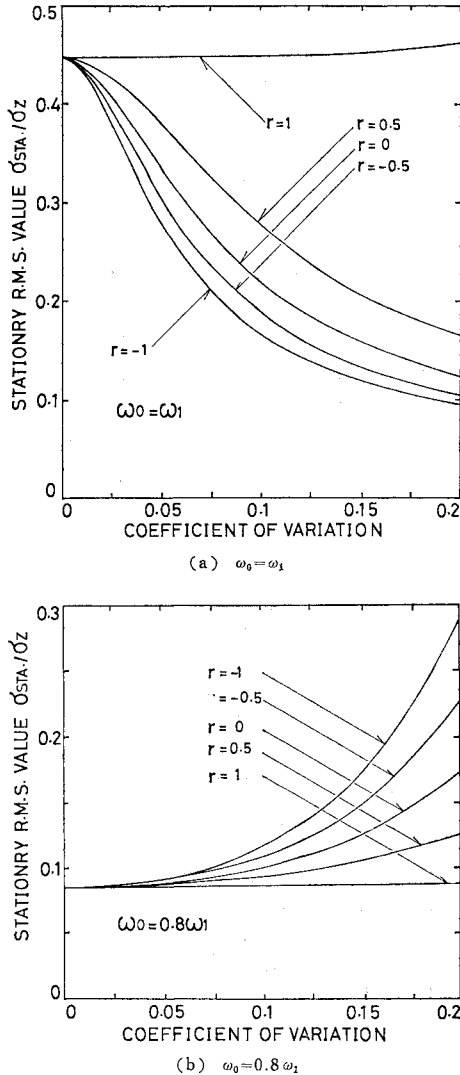


Fig. 7 Root mean square of stationary response; narrow-band process excitation.

布に制約されない確率変量を有する非定常不規則外力を受ける構造物系の解析モデルについて述べるとともに、非定常 r.m.s. 応答の確率変量による変動の平均値を得るための解析手法を提案した。数値計算では、質量とばね定数を相関のあるガウス確率変数とした 1 自由度系を解析の対象として、本解法の妥当性をシミュレーションにより検証した。さらに、確率変数の変動および相関係数が r.m.s. 変位応答の平均値に及ぼす影響について、詳細な検討を加えた。得られた結果を要約すると、次のとおりである。

(1) 本解法によれば、不確定変量を有する構造物系が不規則外力を受ける場合、応答の分散値の確率変量に対する平均値の時間的挙動は微分方程式で表現される。したがって、非定常不規則外力を受ける系の非定常

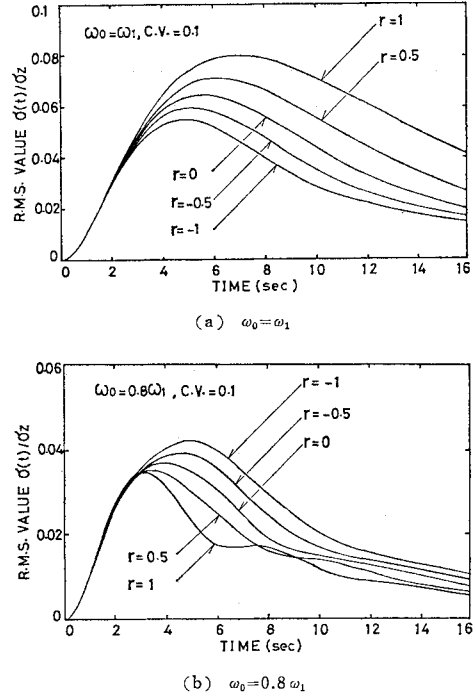


Fig. 8 Root mean square of nonstationary response; shaped narrow-band process excitation, C.V. = 0.1.

r.m.s. 応答解析は、微分方程式の解法に帰着する。さらに、定常 r.m.s. 応答解析は、この微分方程式に関連した連立方程式より統一的に解析される。

(2) 高次キュムラント打切近似を用いると、確率変量の 3 次の統計量まで解析の中に組み入れることができる。その結果、変動の大きな確率変量を有し、かつガウス確率変数以外の変量を有する系の解析が可能となった。

(3) 白色雑音過程を入力とする 1 自由度系では、シミュレーションによる検討の結果、変動係数が 0~0.3 程度の範囲まで、本解法は有効であることが確認できた。

(4) 狭帯域過程を入力とする減衰の小さい 1 自由度系でも、シミュレーションによる検討の結果、本解法では変動係数の上限が 0.1~0.2 程度まで適用可能であることが確認できた。

(5) 系の固有振動数が、狭帯域過程の中心振動数の近傍にあると、確率変量の変動は r.m.s. 応答に敏感に反映する。この r.m.s. 応答の変動は、外力による変動と比較しても、小さな変動と見なすことはできない。

(6) 狭帯域過程を入力とする減衰の小さい系では、質量とばね定数の相関係数は、変動係数と同程度の影響を応答に及ぼす。

謝 辞：本研究を遂行するにあたり、八代高専吉村虎蔵校長、九州大学 彦坂照助教授には常にご指導を賜

わり、さらに、広島大学 花井正実教授にはご助言を賜わり、ここに感謝の意を表します。なお、本研究の計算には、九州大学大型計算機センター計算機 (M 190)、および長崎大学計算機センター計算機 (FACOM 270/20) を使用したことを付記する。

補遺 (A) 共分散方程式の誘導²⁴⁾

確率微分方程式、式 (12) の解過程は、状態遷移行列 $\Phi_X(t, \tau)$ を用いて、次式で与えられる。

$$X(t) = \Phi_X(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi_X(t, \tau) B_X(\tau) dW_X(\tau) \quad \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

$X(t)$ の共分散行列 $R_X(t)$ は、(A・1) とウィナー過程の性質を用いると、

$$R_X(t) = \Phi_X(t, t_0) R_{X_0} \Phi_X(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t \Phi_X(t, \tau) B_X(\tau) Q_X B_X(\tau)^T \Phi_X(t, \tau)^T d\tau \quad \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

となる。

この両辺を t で微分して、状態遷移行列の性質を考慮すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{R}_X(t) &= A_X(t) \Phi_X(t, t_0) R_{X_0} \Phi_X(t, t_0)^T \\ &+ \Phi_X(t, t_0) R_{X_0} \Phi_X(t, t_0)^T A_X(t)^T \\ &+ \int_{t_0}^t A_X(t) \Phi_X(t, \tau) B_X(\tau) Q_X B_X(\tau)^T \Phi_X(t, \tau)^T d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi_X(t, \tau) B_X(\tau) Q_X B_X(\tau)^T \Phi_X(t, \tau)^T A(t)^T d\tau \\ &+ B_X(t) Q_X B_X(t)^T \quad \dots\dots\dots (A \cdot 3) \end{aligned}$$

ここで、(A・2) を代入すると、

$$\dot{R}_X(t) = A_X(t) R_X(t) + R_X(t) A_X(t)^T + B_X(t) Q_X B_X(t)^T \quad \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

が得られる。

補遺 (B) 数値解析に用いたベクトルとマトリックス

3., 4. の解析に対応させて、 $A_1=k, A_2=1/m$ とする。

(1) 白色雑音過程による応答

確率微分方程式、式 (12) の係数マトリックスと外力

$$G(t, A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k/m & -c/m & g(t)/m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2 h_0 \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 k/m & 0 & 0 & -2 c/m & 2 g(t)/m \\ 0 & 0 & -k/m & 0 & 0 & -c/m \\ 0 & 0 & 0 & -k/m & 0 & -\omega_0^2 & -(c/m + 2 h_0 \omega_0) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (B \cdot 12)$$

ベクトルは、次式で与えられる。

$$A_X(t, A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (B \cdot 1)$$

$$B_X(t, A) dW_X(t) = [0 \quad g(t) dw(t)/m]^T \quad \dots\dots\dots (B \cdot 2)$$

ここに、 $dw(t)$ はスカラーウィナー過程である。

共分散方程式、式 (29) の $G(t, A)$ および $F(t, A)$ は、

$$G(t, A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -k/m & -c/m & 1 \\ 0 & -2 k/m & -2 c/m \end{bmatrix} \quad \dots\dots (B \cdot 3)$$

$$F(t, A) = [0 \quad 0 \quad g(t)^2 S/m^2]^T \quad \dots\dots\dots (B \cdot 4)$$

となる。ゆえに、式 (30), (31) のマトリックスとベクトルは、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_0(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & G_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{bmatrix} \\ G_{12}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} & G_1(t) &= G_{11}(t) \\ & & & = G_{22}(t) = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (B \cdot 5)$$

$$\left. \begin{aligned} F_0(t) &= F_1(t) = F_2(t) = F_{11}(t) = F_{12}(t) = \mathbf{0} \\ F_{22}(t) &= [0 \quad 0 \quad g(t)^2 S] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (B \cdot 6)$$

(2) 狭帯域過程による応答

確率微分方程式、式 (23) の係数マトリックスと外力ベクトルは、次式で与えられる。

$$A_X(t, A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m & -c/m & g(t)/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2 h_0 \omega_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (B \cdot 7)$$

$$B_X(A) dW_X(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad dw(t)] \quad \dots\dots\dots (B \cdot 8)$$

狭帯域過程は定常であるから、フィルター系に関する共分散方程式、式 (19) より

$$E[Z_1^2] = S/4 h_0 \omega_0^3 \quad \dots\dots\dots (B \cdot 9)$$

$$E[Z_2^2] = S/4 h_0 \omega_0 \quad \dots\dots\dots (B \cdot 10)$$

$$E[Z_1 Z_2] = 0 \quad \dots\dots\dots (B \cdot 11)$$

が得られる。この結果を用いて、構造物-フィルター系に関する共分散方程式の未知数を減少させると、式 (28) の $G(t, A)$ および $F(t, A)$ は、次のようになる。

$$F(t, \mathbf{A}) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ g(t)S/4 h_0 \omega_0^3 m \ 0] \dots\dots\dots (B.13)$$

したがって、式 (30), (31) のマトリックスとベクトルは、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_0(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2h_0\omega_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2h_0\omega_0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2h_0\omega_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2h_0\omega_0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_{12}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_1(t) &= \mathbf{G}_{11}(t) = \mathbf{G}_{22}(t) = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B.14)$$

$$\left. \begin{aligned} F_0(t) &= F_1(t) = F_{11}(t) = F_{12}(t) = F_{22}(t) = \mathbf{0} \\ F_2(t) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ g(t)S/4 h_0 \omega_0^3 \ 0] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B.15)$$

補遺 (C) r.m.s. 加速度応答の不確定変量による平均

加速度応答を表わす方程式は、式 (3), (7) より、 $\dot{Y}(t) = \mathbf{A}_Y(t)Y(t) + \mathbf{A}_{YZ}(t)Z(t) \dots\dots\dots (C.1)$ で与えられる。 $\dot{Y}(t)$ の共分散 $\mathbf{R}_{\dot{Y}}(t)$ は、共分散の定義式 (17) より、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\dot{Y}}(t) &= \mathbf{A}_Y(t) \mathbf{R}_Y(t) \mathbf{A}_Y(t)^T \\ &+ \mathbf{A}_Y(t) \mathbf{R}_{YZ}(t) \mathbf{A}_{YZ}(t)^T \\ &+ \mathbf{A}_{YZ}(t) \mathbf{R}_{ZY}(t) \mathbf{A}_Y(t)^T \\ &+ \mathbf{A}_{YZ}(t) \mathbf{R}_Z(t) \mathbf{A}_{YZ}(t)^T \dots\dots\dots (C.2) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{R}_{YZ}(t)$ および $\mathbf{R}_{ZY}(t)$ は $Y(t)$ と $Z(t)$ の共分散行列であり、 $(m_1 \times m_2)$, $(m_2 \times m_1)$ 行列である。

係数行列が不確定変量を有する場合、係数行列 $\mathbf{A}_Y(t)$, $\mathbf{A}_{YZ}(t)$ は、次式で示される 3. の式 (29), (30) で行った不確定変量による展開が可能である。

$$A(t, \mathbf{A}) = A_0(t) + \sum_{i=1}^m A_i A_i(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i A_i A_j A_{ij}(t) \dots\dots\dots (C.3)$$

不確定変量を有する系の共分散を 2. (2) で示したように、 $\mathbf{R}(t, \mathbf{A})$ で表示し、不確定変量による平均操作を (C.2) に施す。加速度の分散の不確定変量による平均は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_{\dot{Y}}(t) \rangle &= \langle \mathbf{A}_Y(t, \mathbf{A}) \mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A}) \mathbf{A}_Y(t, \mathbf{A})^T \rangle \\ &+ \langle \mathbf{A}_Y(t, \mathbf{A}) \mathbf{R}_{YZ}(t) \mathbf{A}_{YZ}(t)^T \rangle \\ &+ \langle \mathbf{A}_{YZ}(t) \mathbf{R}_{ZY}(t) \mathbf{A}_Y(t)^T \rangle \\ &+ \langle \mathbf{A}_{YZ}(t) \mathbf{R}_Z(t) \mathbf{A}_{YZ}(t)^T \rangle \dots\dots\dots (C.4) \end{aligned}$$

この式の中には、 $\mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A})$ に関する $\langle \mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A}) \rangle$, $\langle A_i \mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A}) \rangle$, $\langle A_i A_j \mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A}) \rangle$, $\langle A_i A_j A_k \mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A}) \rangle$, $\langle A_i A_j A_k A_l \mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A}) \rangle$ のような統計量が含まれている。4. (1) b) で行ったように、 $\langle A_i A_j A_k A_l \mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A}) \rangle$ にキュムラント切近近似を適用し、これを 3 次以下のモーメントで表現する。 $\mathbf{R}_{YZ}(t, \mathbf{A})$ と $\mathbf{R}_Z(t, \mathbf{A})$ にも同様な操作を行う。 $\mathbf{R}_Y(t, \mathbf{A})$, $\mathbf{R}_{YZ}(t, \mathbf{A})$ および $\mathbf{R}_Z(t, \mathbf{A})$ に関する 3 次までのモーメントは、4. (2) の式 (59), (60) より求められているので、加速度応答の分散、および加速度と速度の共復散の不確定変量による平均値が得られる。

参考文献

- 1) Keller, J.B.: Wave Propagation in Random Media, Proc. Symp. Appl. Math., New York, Vol. 13, pp. 227~246, 1960.
- 2) Bogdanoff, J.L. and P.F. Chenea: Dynamics of Some Disordered Linear Systems, International Journal of Mechanical Science, Vol. 3, pp. 157~169, 1961.
- 3) Kozin, F.: On the Probability Densities of the Output of Some Random Systems, Trans. ASME, Jour. Appl. Mech., Vol. 28, pp. 161~165, 1961.
- 4) Hasselman, T.K. and G.C. Hart: Modal Analysis of Random Structural Systems, Proc. ASCE, Vol. 97, No. EM3, pp. 561~577, June, 1971.
- 5) Hoshiya, M. and H.C. Shah: Free Vibration of Stochastic Beam-Colum, Proc. ASCE, Vol. 97, No. EM 4, pp. 1239~1255, Aug., 1971.
- 6) Shinczuka, M. and C.J. Astill: Random Eigenvalue Problems in Structural Analysis, AIAA Journal, Vol. 10, No. 4, pp. 456~462, April, 1972.
- 7) Hoshiya, M.: Probabilistic Displacement Time History of a Single Degree of Freedom System, Proc. JSCE, No. 180, Aug., pp. 97~106, 1970.
- 8) Hoshiya, M.: Response of a Single Degree of Freedom System with Probabilistic Parameters, Proc. JSCE, No. 188, April, pp. 73~80, 1971.
- 9) Hoshiya, M. and H.C. Shah: Dynamic and Eigenvalue Analysis of a Rectangular Plate with Stochastic Properties, Proc. JSCE, No. 187, pp. 109~118, March, 1971.
- 10) Chen, P.C. and W.W. Storoka: Impulse Response of a Dynamic System with Statistical Properties, Jour. of Sound and Vib., Vol. 31, No. 3, pp. 309~314, 1973.

- 11) Chen, P.C. and W.W. Storoka : Multi-Degree Dynamic Response of a System with Statistical Properties, *Jour. of Sound and Vib.*, Vol. 37, No. 4, pp. 547~556, 1974.
- 12) 松島 豊 : 確率変数から成る振動系の地震応答量の変動, *日本建築学会論文報告集*, No. 210, pp. 5~10, 1973.8.
- 13) 山崎 裕 : 構造物の地震応答の問題における不確定量の取り扱いに関する研究, *日本建築学会論文報告集*, No. 240~243, 1976.2~1976.5.
- 14) 星谷 勝・千葉利晃 : 弾性せん断ばりの自由振動に与える不確定要因の影響, *土木学会論文報告集*, No. 234, pp. 23~31, 1975.2.
- 15) Keller, J.B. : Stochastic Equations and Wave Propagation in Random Media, *Proc. Symp. Appl. Math.*, Vol. 16, pp. 145~170, 1964.
- 16) Richardson, J.M. : The Application of Truncated Hierarchy Techniques in the Solution of Stochastic Linear Differential Equation, *Proc. Symp. Appl. Math.*, Vol. 16, pp. 290~302, 1964.
- 17) Boyce, W.E. : Random Eigenvalue Problems, *Probabilistic Methods in Applied Mathematics* (A.T. Bahrucha-Reid, ed.), Vol. 1, Academic Press, New York, pp. 1~73, 1968.
- 18) Hains, C.W. : Hierarchy Methods for Random Vibrations of Elastic Strings and Beams, *Jour. Engrg. Math.*, Vol. 1, pp. 293~305, 1967.
- 19) Amazigo, J.C. : Buckling under Axial Compression of Long Cylindrical Shells with Random Axisymmetric Imperfections, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 26, No. 4, pp. 537~566, 1969.
- 20) Nakagawa, N., I. Kawahara, T. Iwatsubo and R. Kawai : Random Vibration of Structures with Uncertain Properties, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 27, pp. 359~371, 1979.
- 21) Gersch, W. : Mean-Square Responses in Structural Systems, *Jour. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 41, No. 1, pp. 403~413, 1969.
- 22) Arnold, L. : Stochastic Differential Equation, Theory and Applications, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- 23) Scoong, T.T. : Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, New York, Chap. 5, pp. 115~136, 1975.
- 24) 榎木義一, ほか : 確率システム制御の基礎, 日新出版, pp. 22~24, 1975.
- 25) Bellman, R. : Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, pp. 237~239, 1970.
- 26) Chen, C.F. and L.S. Shieh : A Note on Expanding $PA + A^T P = -Q$, *IEEE, Trans. Automatic Control* (Correspondance), Vol. AC-13, pp. 122~123, 1968.
- 27) Ibrahim, R.A. : Stationary Response of a Randomly Parametric Excited Nonlinear System, *Trans. ASME, Jour. Appl. Mech.*, Vol. 45, pp. 910~916, 1978.
- 28) Wilcox, R.M. and R. Bellman : Truncation of Preservation of Moment Properties for Fokker-Planck Equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 32, pp. 532~542, 1970.
- 29) Stratonovich, R.L. : Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, Chap. 1, pp. 10~15, 1963.
- 30) Lin, Y.K. (森, ほか 4 名訳) : 構造動力学の確率論的方法, 培風館, pp. 71~72, 1972.

(1979.11.24・受付)