

動的解析における衝突のモデル化に関する一考察

AN ANALYTICAL MODEL OF CONTACT AND IMPACT IN DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS

川 島 一 彦*

By Kazuhiko KAWASHIMA

1. ま え が き

構造物の地震応答解析では、隣接した橋桁どうしの衝突、あるいは、近接した建物間の衝突のように構造系間の衝突が重要な役割を果たす場合が少なくない。質点系の剛体と剛体の衝突は、運動量の保存則に基づいて衝突前の互いに接近する相対速度と衝突後の互いに遠ざかる相対速度の比として定義されるはね返り係数を用いて簡単な運動方程式を立て、これを解くことができる。しかしながら、構造物を離散型のばね～質点系多自由度モデルに置換した変形法に基づく地震応答解析では、系が剛体ではないこと、系の一部の速度応答を外制約条件として規定するのが困難なこと等の理由によりこのような古典的な手法をそのまま解析に取り入れることは現実的ではない。

本小文では上記の観点から、衝突する構造物間に剛性の高いばね（以下、衝突ばねとよぶ）を挿入することにより衝突現象を近似する解析手法を示し、このような簡単なモデル化によりどの程度実際の衝突現象を近似できるかを試算により検討した結果について報告するものである。

2. 衝突のモデル化

衝突は一方の構造系ともう一方の構造系が非零の相対速度で接触した瞬間に生じ、両者が衝突前とは反対方向の相対速度を持ち得た瞬間に終了する。いま、衝突が両者の構造系のそれぞれ一部分で生じ、解析の目的が衝突部分周辺の詳細な挙動の解明ではなく、系の一部で衝突を生じた場合の系全体としての挙動の解明にある場合には、(i) 2つの構造系間の衝突時の力（衝撃力）を伝達

するとともに、(ii) 2つの構造系間の相対速度および相対変位の変化（衝突継続時間も含めて）を近似できるモデル化を用いることが必要とされる。

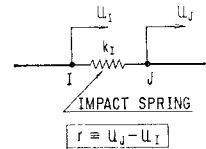


図-1 衝突のモデル化

このような衝突の影響を、いま、図-1 に示すように両者に衝突が生じている間だけ作動し、衝突が生じていないときには作動しないばね（衝突ばね）を設けることにより表示することにする。この場合には、図-1 に示した座標系を用いれば、I 点および J 点（I, J は座標上は同一点）に作用する衝撃力を F_I^I, F_J^I 、また、I 点および J 点の変位を u_I, u_J とすれば、I 点、J 点間の力と変位の関係は増分表示で次式で表わされる。

$$\Delta F^I = k^{IM} \Delta u \dots \dots \dots (1)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} F^I &= \{F_I^I, F_J^I\}^T, \quad \Delta F^I = \{\Delta F_I^I, \Delta F_J^I\}^T \\ u &= \{u_I, u_J\}^T, \quad \Delta u = \{\Delta u_I, \Delta u_J\}^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

いま、I, J 間の相対変位 r を次式で定義する。

$$r \equiv u_J - u_I \dots \dots \dots (3)$$

さらに、 r に対応する力 S を次のように定義すると、

$$S = F_J^I = -F_I^I \dots \dots \dots (4)$$

Δr と ΔS の関係を次式で与えるものとすれば、

$$\Delta S = \tilde{k} \Delta r \dots \dots \dots (5)$$

式 (2), (4) から式 (1) で定義した衝突をモデル化する剛性行列 k^{IM} は次式で与えられる。

$$k^{IM} = \begin{bmatrix} \tilde{k} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k} & \tilde{k} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (6)$$

ここで、図-1 に示した衝突のモデル化では、衝撃力 S は次式で与えられる。

$$S = k_I \langle r \rangle \dots \dots \dots (7)$$

ここで、 k_I は衝突ばねの剛性であり、 $\langle r \rangle$ は次式で定義する。

* 正会員 工修 建設省土木研究所地震防災部振動研究室主任研究員

$$\langle r \rangle \equiv \begin{cases} 1 & r < 0 \\ 0 & r \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

直接積分法を用いた地震応答解析において、微小な積分時間間隔 Δt の範囲内で r の符号が変化しないと仮定すると、式 (7) の増分表示から式 (5) で定義した \bar{k} は次式で与えられる。

$$\bar{k} = k_I \langle r \rangle \dots\dots\dots (9)$$

以上より、衝撃力を 図-1 に示す力学モデルにより表わした場合の剛性行列は式 (9) を式 (6) に代入することにより、また、これに対応する復元力ベクトル F は式 (4), (7) を式 (2) に代入することによって、それぞれ求めることができる。したがって、これらを適当な座標変換により局所座標系から全体座標系に変換することにより、任意の構造系のつり合い方程式に組み入れることができる。

3. 試算例

上述した解析モデルの試算例として、図-2 に示す等断面、等長の 2 本の棒が相向かう方向に同一の初速度 V_0 で進行し、衝突後、それぞれ反対方向にはね返っていくという場合を取り上げた。これは、上記のような単純な系の運動が最も衝突の影響を顕著に表わすため、2. の衝突モデルの精度を検討するためには都合がよいと考えたためである。

いま、2 つの棒の諸元を次のように仮定する。

- 弾性係数 $E=100$
- 断面積 $A=1$
- 単位体積質量 $\rho=0.1$
- 長さ $L=10$
- 初速度 $V_0=0.1$

ここで、上記諸元の単位は任意のディメンジョンにとることができる。

古典的な 1 次元の波動伝播理論によれば、棒の縦方向変位を u_x とした場合の運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ は棒内における縦波の伝播速度である。式 (10) の解は、周知のように次式で与えられる。

$$u_x = f(x - C_0 t) + g(x + C_0 t) \dots\dots\dots (11)$$

棒の速度および応力は、式 (11) を時間 t および距離 x によりそれぞれ微分することにより次のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E \frac{\partial u_x}{\partial x} = E [f'(x - C_0 t) + g'(x + C_0 t)] \\ v &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = C_0 [-f'(x - C_0 t) + g'(x + C_0 t)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

これより、波が一方だけに伝播する場合の応力 σ_x および衝突継続時間 T_I は次式で与えられる。

$$|\sigma_x| = \rho C_0 v \dots\dots\dots (13)$$

$$T_I = 2L/C_0 \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) は、波動が棒の長さの 2 倍の距離を伝播するのに必要な時間を表わしており、ここでは式 (14) により与えられる時間を無次元化して以下、0.2 単位時間とよぶことにする。

いま、図-2 に示した力学モデルにおいて、2 本の棒の接触面間の相対変位 r および相対速度 \dot{r} を次式で定義する。

$$r \equiv u^R - u^L, \dot{r} \equiv \dot{u}^R - \dot{u}^L \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 u^R, \dot{u}^R は右側の棒の接触面における変位および速度を、 u^L, \dot{u}^L は左側の棒の接触面における変位および速度を示す。式 (15) で定義する棒間の相対応答 r, \dot{r} を古典理論により求めると以下ようになる。すなわち、衝突前には相対速度 \dot{r} は -0.2 であり、衝突の瞬間に \dot{r} は 0 となる。 $\dot{r}=0$ の状態は衝突継続時間 $T_I=0.2$ 単位時間だけ続き、 $T_I=0.2$ になった瞬間に \dot{r} は 0.2 となって衝突は終了する。ここで、衝突の開始時および終了時には、棒の速度は理論上瞬時に V_0 から 0 あるいは 0 から V_0 に変化する。

上述した 2 本の棒の衝突を 2. に示した解析手法で解析するために、ここでは、衝突ばね定数 k_I の大きさ、積分時間間隔 Δt 、棒を離散型ばね-マス系に置換する場合の要素数 n の 3 者に着目した検討を行った。検討に用いた力学モデルは 2 本の棒をそれぞれ同数の等長の棒要素でモデル化し、両者の接触面間に衝突ばねを挿入したものである。また、運動方程式の逐次積分は一定加速度法を用い、不つり合い力のノルムと外力のノルムの比が $1/1000$ 以上となった場合にはイテレーション法⁴⁾により解の精度を高めた。

まず、 k_I の影響を検討するために、積分時間間隔 Δt を $0.001 T_I$ 、要素数 n を 10 とし、 k_I を 10^i ($i=$

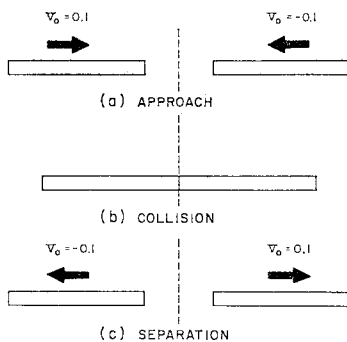


図-2 試算例

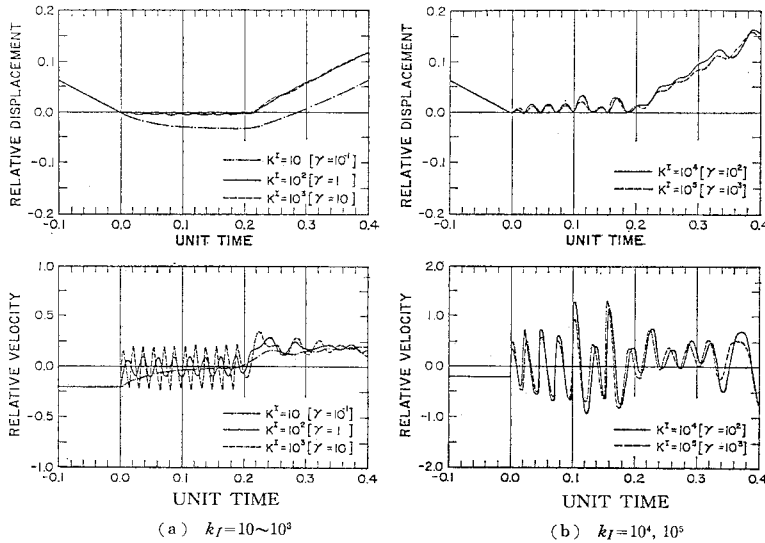


図-3 衝突ばね定数 k_I の影響

1, 2, ..., 5) と変化させた場合の計算結果を 図-3 に示す。この結果によれば、 k_I が 10 と小さい場合には、式 (15) で定義した相対変位 r が大きく 0 を割り、実際の衝突現象では物理的に起こり得ない棒と棒のオーバーラップが計算上顕著に現われるとともに、衝突継続時間 T_I も 0.2 単位時間を大きく超過することがわかる。また、この場合には相対速度 \dot{r} も緩やかにしか変化せず、この面からも衝突という現象を近似し得ないことがわかる。これに対して、 k_I をどんどん大きくとり、たとえば $k_I = 10^4$ あるいは 10^5 とした場合には、相対変位 r はほとんどマイナスとはならないかわりに、真の衝突継続時間 T_I の間で計算上接触と離反が何回も繰り返される。この場合、接触と離反が繰り返されること自体は、衝突現象を近似するうえで必ずしも不都合ではないが、これに伴って相対速度 \dot{r} が非常に大きく振動するため衝突が次々に生じるような場合には、解析精度が著しく低下する。したがって、相対変位 r ができるだけ 0 に近く、また、相対速度 \dot{r} の振動もそれほど著しくない $k_I = 10^2$ 程度の場合が衝突現象を近似するためには最も適当ということが出来る。なお、いま、衝突ばねの剛性 k_I と棒要素の伸び剛性 nEA/L の

比 r を次式で定義すれば、

$$r \equiv k_I L / nEA \quad \dots (16)$$

$k_I = 10^2$ は $r = 1$ の場合に相当する。したがって、衝突ばねの剛性 k_I は、隣接する棒要素の伸び剛性とおおむね同程度の値にしておくことが適当であると考えられる。

次に、要素数 n の影響を検討するため、衝突ばね k_I を上記のように 10^2 とし、要素分割数 n を 2, 10, 40 とした場合の応答を計算した。ここで積分時間間隔 Δt は $1/100 T_I$ とした。結果は 図-4 のとおりであり、これより、相対変位 r はいずれの場合も厳密解を比較的精度よ

く近似していることがわかる。しかしながら、要素数が 2 と極端に少ない場合には相対速度 \dot{r} は振動する傾向を示し、要素数をできる限り多くとることが相対速度 \dot{r} の振動を抑えるために有効であることを示している。

次に、積分時間間隔 Δt の影響を調べるために、 $k_I = 100$ ($r = 1$), $n = 10$ の条件で、 Δt を $0.5 T_I$, $0.05 T_I$, $0.01 T_I$ と変化させた場合の解析結果を 図-5 に示す。これによれば、 Δt を $0.01 T_I$ 、あるいは $0.05 T_I$ とした場合には相対変位 r 、相対速度 \dot{r} のいずれに対しても解析値は厳密解の特徴を比較的再現している。これに対して、 $\Delta t = 0.5 T_I$ とした場合には、衝突継続時間が長くなり過ぎ、相対変位 r 、相対速度 \dot{r} のいずれに対する近似度も低下している。上記ケース以外の Δt に対する

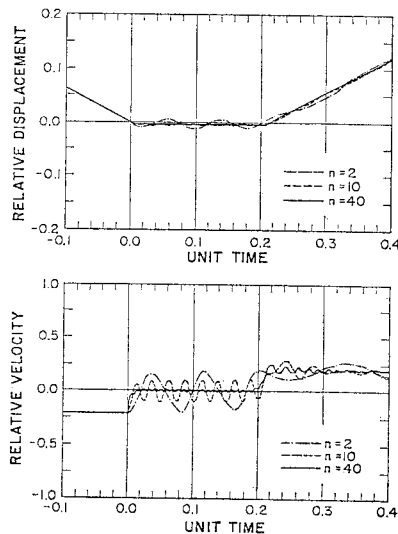


図-4 要素数 n の影響

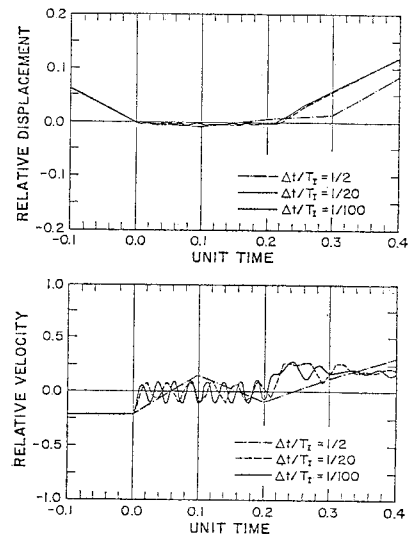


図-5 積分時間間隔 Δt の影響

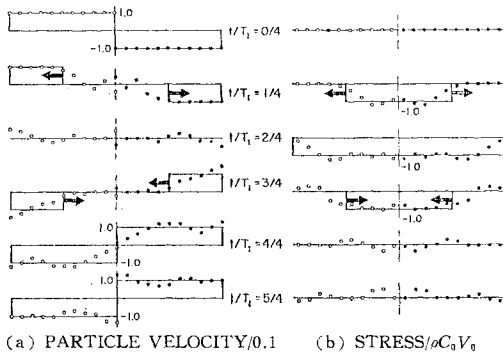


図-6 衝突による棒の速度および応力の変化

試算結果もあわせると、棒内における波動の伝播を追跡し得ない程度に Δt を大きくすると解析値がまったく無意味になる場合があること、したがって、一般に Δt を $0.05 T_I$ 程度以下にしないと解析値と厳密解の一致度がよくないことがわかった。

最後に、棒の速度および応力を衝突開始後の代表的な時間に対して計算した結果が図-6である。ここで、計算条件は $k_I=100$ ($r=1$)、 $\Delta t=0.05 T_I$ 、 $n=10$ であり、図中では2本の棒が衝突した瞬間を時刻 t の起点とし、 $t=0, 1/4 T_I, 2/4 T_I, 3/4 T_I$ の各時刻における速度および応力をそれぞれ棒の初速度 (V_0) および厳密解による応力 ($\rho C_0 V_0$) によって無次元化して示している。解析値を図中にあわせ示された厳密解と比較すると、波動が伝播する先頭部における応力および速度の近似度を除けば2.に示した解析モデルが2本の棒の全体としての速度および応力の時間的変化を比較的忠実に近似していることがわかる。なお、波動伝播問題において先頭部の応答を正しく求めることは、離散型の解析を行う際の最も難しい問題の一つであると考えられている²⁾。

4. 結 論

以上の結果より、衝突の影響を動的解析に取り入れるためには、本小文に示した衝突ばねを用いた力学モデルが以下の条件下で有効に使用し得ると考えられる。

(1) 衝突ばねの剛性が小さすぎると、実際の衝突現象では物理的に生じ得ない接触面間のオーバーラップが

計算上顕著に求められるとともに衝突継続時間も過大に評価されることから、衝突現象を近似するのに適当ではない。反対に、衝突ばねの剛性を非常に大きくすると、真の衝突継続時間の中でみかけの衝突と離反が何回も生じるとともに接触面間の相対速度が大きくなり振動し、精度よく衝突現象を近似し得ない。したがって、式(16)に定義する r が1前後、すなわち、衝突ばねの剛性を隣接する構造系の構成要素の伸び剛性とおおむね同程度にとった場合が全体として最もバランスよく、衝突現象を近似することができる。

(2) 積分時間 Δt を衝突によって生じる衝撃力の伝播を追跡し得ないほど大きくすると、計算結果が無意味となる場合がある。したがって、一般には Δt を衝突継続時間 T_I の $1/20$ 以下にとることが適当と考えられる。

(3) 要素分割は、細かくした方が接触面間の相対速度の振動が少なく、精度のよい解を得ることができる。

謝 辞：本小文は、著者がカリフォルニア大学地震工学研究センターに在外研究する機会を与えられた際に、J. Penzien 教授の指導のもとに行った研究成果の一部をまとめたものである。同センターの M.C. Chen 博士には、解析手法に関し種々ご討議いただいた。末尾ながら、ここに記し厚く御礼申し上げる次第である。

参 考 文 献

- 1) Goldsmith, W. : Impact, Edward Arnold, London, 1960.
- 2) Hugles, T.J., R.L. Taylor and J.L. Sackman : Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continuous Mechanics, UCSESM 74-8, University of California, Berkeley, 1974.
- 3) Kawashima, K. and J. Penzien : Correlative Investigation on Theoretical and Experimental Dynamic Behavior of A Model Bridge Structure, Report No. EERC 76-26, Earthquake Engineering Research Center, Univ. of California, Berkeley, July, 1976.
- 4) Bathe, K.J., H. Ozdemir and E.L. Wilson : Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis, Report No. UC SESM 74-4, Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley, 1974.

(1980.2.18・受付)