

境界要素法による線形粘弾性解析

LINEAR VISCOELASTIC ANALYSIS BY USING BOUNDARY
ELEMENT METHOD

三 井 康 司*・草 間 孝 志**・吉 田 俊 彌***

By Yasushi MITSUI, Takashi KUSAMA and Shun-ya YOSHIDA

1. ま え が き

境界要素法は有限要素法に比し小さい記憶容量ですむなどの利点のため、連続体の弾・塑性問題、破壊問題、波動、熱弾性問題、板、シェルなどの解析のほかに電気工学の領域など幅広い報告がなされている¹⁾。わが国でも、丹羽・小林らが早くから研究しており、最近では固有値、クラック問題などに適用している^{2),3)}。このように境界要素法は広い分野の解析手法として利用されているが、粘弾性解析に適用したものは少ないようで、筆者らの知る限りではわずかに金属クリープを扱った Kumar⁴⁾と、弾性-粘弾性の対応原理を用いて内圧を受ける粘弾性円筒を解析した Rizzo らの研究⁵⁾があるにすぎない。このうち、Rizzo らの方法は Laplace 像空間から実空間への数値 Laplace 逆変換に Schapery の提案した選点法⁶⁾を使用している。

筆者らは、先に、選点法による数値 Laplace 逆変換法の改良と、選点法による逆変換を精度よく行うための変換パラメーターの選択について報告した⁷⁾。

本文は、先の報告の継続研究として行ったものであり、文献 7) で提案した数値 Laplace 逆変換法を、境界要素法による線形粘弾性解析へ応用して、その適用を進展させようとしたものである。

2. 解析手順

弾性連続体に対する境界要素法の定式化は文献 1), 8) に詳述されている。本文では境界上の応力、変位を未知物理量とする直接法の定式化に従い、対応原理を用いて線形粘弾性体を解析する手順の概略のみを記述する。

* 正会員 工修 信州大学講師 工学部土木工学科

** 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科

いま多重連結領域を含む境界 Γ で囲まれた連続体 R が等方弾性体とし、物体力を無視すると Somigliana の恒等式といわれる次式が成立する¹⁾。

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x, y) g_j(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} T_{ij}(x, y) u_j(y) d\Gamma_y \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 u_j, g_j は変位、応力成分であり、 $x \in R, y \in \Gamma$ である。また U_{ij}, T_{ij} は連続体の支配方程式を満足する基礎解であり、通常使用されている Kelvin 解を用いると 2 次元連続体の平面ひずみに対してはおの次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U_{ij}(x, y) &= \frac{(1+\nu)}{4\pi E(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} \log\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,i} r_{,j} \right\} \\ T_{ij}(x, y) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) \{ n_i(y) r_{,j} - n_j(y) r_{,i} \} \right. \\ &\quad \left. + \{ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j} \} n_s(y) r_{,s} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 E, ν は弾性係数、ポアソン比、 δ_{ij} は Kronecker の δ であり、 n_j は外方向法線ベクトル成分、 $r = |x-y|$, $(,)$ は偏微分を示す。式 (1) は境界上のすべての u_j, g_j が既知となると R 内の任意点の変位 u_i が計算できることを示している。また境界上の変位に対しては $x \rightarrow \Gamma$ の極限操作により、

$$C_{ij}(x) u_i(x) + \int_{\Gamma} T_{ij}(x, y) u_j(y) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} U_{ij}(x, y) g_j(y) d\Gamma_y \dots (3)$$

が成立する。ここに、 $x, y \in \Gamma$ であり、滑らかな曲線に対しては $C_{ij}(x) = 1/2 \delta_{ij}$ となる。

ここで、境界 Γ を N 要素に分割して、要素区間内では u_j, g_j を一定とし、さらには、Laplace 変換パラメーターを s とし、Laplace 変換を表わす記号として (一) をつけ、弾性-粘弾性の対応原理を用いると式 (3) より、

$$\bar{u}_i(x, s) + 2 \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{u}_{ji}(y, s) \int_r \bar{T}_{ij}(x, y, s) d\Gamma_y - \bar{g}_{ji}(y, s) \int_r \bar{U}_{ij}(x, y, s) d\Gamma_y \right\} = 0 \quad (4)$$

が成立する。式(4)は Laplace 変換パラメーター s に、ある数値 ($s=r_k$) を与えると、像空間での \bar{u}, \bar{g} に関する連立方程式となり、これを解くと、 $s=r_k$ に対する像空間での解を得る。

いま、境界上の任意点における解 $u(t), g(t)$ を $y(t) = a_i + a_d t + f(t) \dots (5)$

の形で表わすと⁶⁾、過渡応答成分 $f(t)$ は近似的に Dirichlet 級数で、 $f(t) = \sum_{k=1}^n B_k \exp(-r_k t)$ と表わされ、すべての点の $\{f(t)\}$ は次のマトリックスの積で計算される⁷⁾。

$$\{f(t)\} = [\bar{f}(r)] [b]^* \{\exp(-r(t))\} \dots (6)$$

n 個の $r_k (k=1, 2, \dots, n)$ の選点には、既報⁷⁾のように、Laplace 像空間の解から得られる分布関数 $H(r)$

$$H(r) = \frac{1}{6\beta} \left[4 \frac{ds\bar{f}(s)}{d(\ln s)} - 5 \frac{d^2s\bar{f}(s)}{d(\ln s)^2} + \frac{d^3s\bar{f}(s)}{d(\ln s)^3} \right]_{s=r} \dots (7)$$

をもとに選点すれば精度のよい実空間での解を得ることができる^{注)}。

3. 数値計算例

本法の妥当性を検証するために厳密解の既知な問題を解析する。

(1) 内圧を受ける粘弾性厚肉円筒

厚肉円筒の粘弾性性状を体積変化に対しては弾性、せん断変形に対しては Kelvin 固体とし、それらの緩和弾性率を、

$$K(t) = K_0 \\ G(t) = G_0 \{1 + \tau \delta(t)\}$$

とする。ここに、 K_0, G_0 は定数、 $\delta(t)$ は Dirac の δ 関数、 τ は遅延時間である。これより、Laplace 像空間での弾性係数、ポアソン比に相当する値 $s\bar{E}(s), s\bar{\nu}(s)$ は、

$$s\bar{E}(s) = \frac{9s\bar{K}(s) \cdot s\bar{G}(s)}{3s\bar{K}(s) + s\bar{G}(s)} = 9K_0 \frac{\alpha(1+\tau s)}{3+\alpha(1+\tau s)} \\ s\bar{\nu}(s) = \frac{1}{2} \frac{3s\bar{K}(s) - 2s\bar{G}(s)}{3s\bar{K}(s) + s\bar{G}(s)} = \frac{1}{2} \frac{3-2\alpha(1+\tau s)}{3+\alpha(1+\tau s)}$$

となる。ここに、 $\alpha = G_0/K_0$ である。

注) 式(6)~(7)の詳細については文献7)を参照されたい。

図-1は、対称性を考慮して、構造全体の1/4部分に対する境界要素分割であり、要素数は28である。いま、 $t=0$ で一定な荷重が作用する平面ひずみ問題とし、 $\alpha = G_0/K_0 = 0.4$ とする。

図-2は内周、外周上の半径方向の変位に対する $\tau r \sim H(\tau r)$ 関係であ

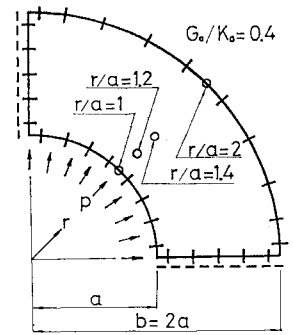


図-1 粘弾性厚肉円筒の境界要素分割

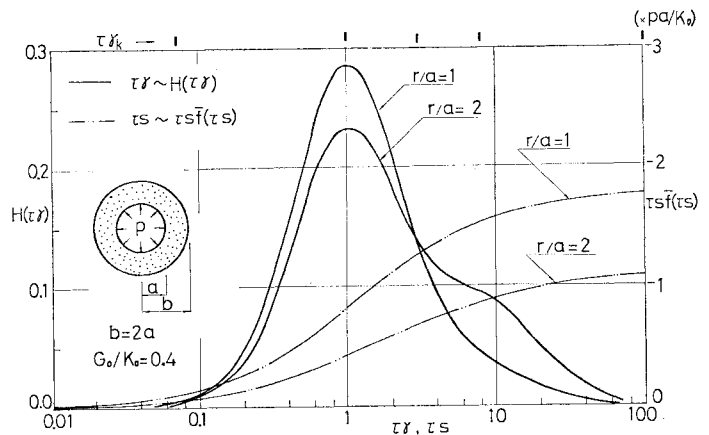


図-2 $\tau r \sim H(\tau r)$ 関係と $\tau s \sim \tau s \bar{f}(\tau s)$ 関係

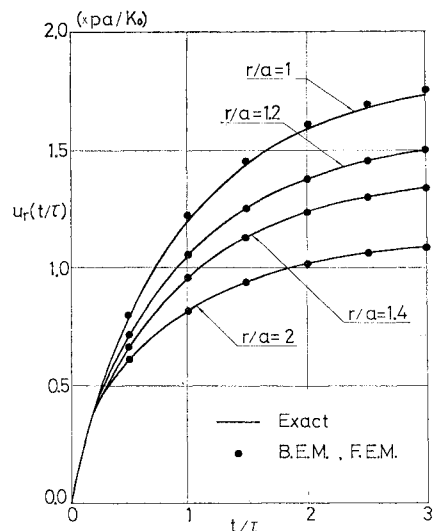


図-3 半径方向変位の経時変化

表-1 逆変換に用いた τr_k

Case	選点数	τr_k					
1	5	0.07	1.0	3.0	9.0	100.0	
2	2		1.0	9.0			

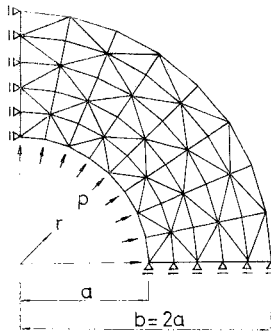


図-4 粘弾性厚肉円筒の有限要素分割

いる。

なお、境界内部の離散化をも必要とする F.E.M. による計算値と比較するために、図-4 に示すような三角形定ひずみ要素による計算もあわせて行った。同図は厳密解とほぼ一致するような分割であり、節点数は 54、要素数は 80 である。この例では有限要素解析での節点数は境界要素による場合の約 2 倍を要している。計算結果は図-3 に示すように、両解法ともほとんど同じ値であり、計算時間も同程度であった。

Rizzo ら⁵⁾ は外周の補強された厚肉粘弾性円筒を境界要素法で解析する際、Schapery⁶⁾ の方法によって、 $s\bar{f}(s)$ (図-2 では $\tau s\bar{f}(\tau s)$ で示した) がほぼ一定となる s の範囲から、 $s(=\tau_k)$ を等比級数、 $\tau_{k+1}/\tau_k=一定$ 、として選点し、数値逆変換を行っており、 τ_{k+1}/τ_k が 10 と 2 の間では、一般に比が小さいほどよい結果が得られるとしている。しかしながら、Schapery の数値逆変換法は、もともと、任意に選点できるのが利点であり、必ずしも等比級数に選点する必要はない。また、あまり密

る。この曲線より $H(\tau\tau)$ は $\tau\tau \approx 1.0$ で卓越し、 $\tau\tau$ が 7~10 にも 1 つの山があることがわかる。この値を重視して、表-1 の Case 1 に示す 5 個の $\tau\tau_k$ の値を用いて数値 Laplace 逆変換を行った。図-3 は半径方向の変位の経時変化を厳密解と比較したものであり、両者はよく一致して

に選点しすぎると、未定係数を決定するための連立方程式が特異性もち、桁落ちによる誤差が生ずる。

図-2 より明らかなように、 $\tau s \sim \tau s\bar{f}(\tau s)$ 曲線から選点するよりも、 $\tau\tau \sim H(\tau\tau)$ 曲線から選点の方が容易であり、かつ合理的である。たとえば、表-1 の Case 2 に示す、わずか 2 点を選点しても表-2 のように、かなり精度のよい結果を得ることができる。

(2) 円開口部を有する粘弾性無限平板

粘弾性無限平板中の円開口部が、ステップ関数の内圧を受けるときの開口部周辺の挙動を平面ひずみ問題として解析する。この問題に対しては、境界要素法は有力な方法であると思われる。いま、平板の材料特性

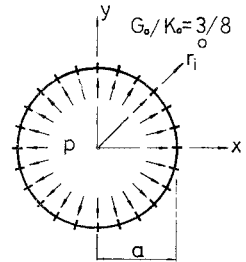


図-5 円開口部を有する粘弾性無限平板の境界要素分割

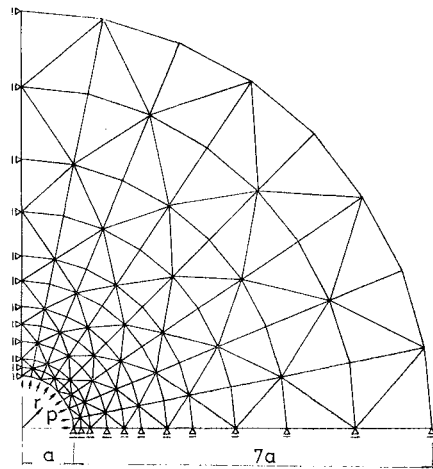


図-6 円開口部を有する粘弾性無限平板の有限要素分割

表-2 半径方向変位の経時変化 ($\times pa/K_0$)

t/τ	r/a	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.0	Exact	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	Case 1	0.0002	0.0004	0.0006	0.0007	0.0009	0.0010
	Case 2	0.0033	0.0030	0.0033	0.0036	0.0036	0.0037
0.2	Exact	0.0845	0.0792	0.0768	0.0762	0.0768	0.0783
	Case 1	0.0850	0.0788	0.0769	0.0766	0.0771	0.0778
	Case 2	0.0866	0.0802	0.0782	0.0780	0.0784	0.0791
0.5	Exact	0.1602	0.1441	0.1343	0.1284	0.1251	0.1236
	Case 1	0.1632	0.1448	0.1351	0.1294	0.1257	0.1235
	Case 2	0.1635	0.1450	0.1353	0.1296	0.1259	0.1237
1.0	Exact	0.2401	0.2109	0.1917	0.1787	0.1700	0.1642
	Case 1	0.2451	0.2120	0.1926	0.1797	0.1703	0.1642
	Case 2	0.2443	0.2114	0.1920	0.1791	0.1696	0.1636
3.0	Exact	0.3461	0.2992	0.2674	0.2450	0.2289	0.2172
	Case 1	0.3518	0.2995	0.2669	0.2444	0.2272	0.2159
	Case 2	0.3516	0.2993	0.2668	0.2442	0.2271	0.2158
10.0	Exact	0.3627	0.3131	0.2793	0.2554	0.2381	0.2255
	Case 1	0.3684	0.3131	0.2785	0.2544	0.2361	0.2239
	Case 2	0.3683	0.3131	0.2785	0.2544	0.2361	0.2239

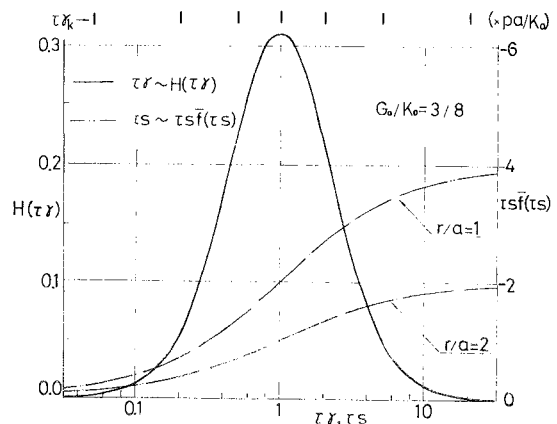


図-7 $\tau\tau \sim H(\tau\tau)$ 関係と $\tau s \sim \tau s\bar{f}(\tau s)$ 関係

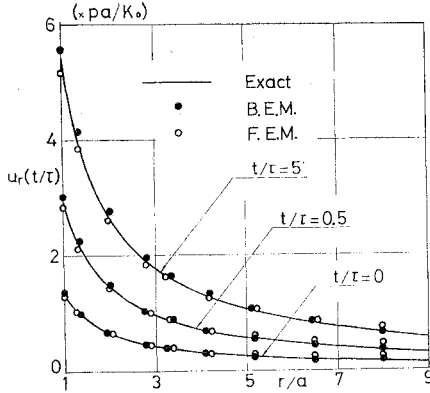


図-8 半径方向変位の経時変化

表-3 両解析法の計算ディテール

	節点数	要素数	計算時間 (s)
境界要素法	24	24	64.823
有限要素法	108	176	119.942

(HITAC 8800/8700 computer)

を

$$K(t) = K_0$$

$$G(t) = G_0 \{0.25 + 0.75 \exp(-4t/\tau)\}$$

とする。

計算に用いた境界要素分割を 図-5 に示す。図-7 は $\tau r \sim H(\tau r)$ 関係であり、この場合、位置に関係なく図示のように、 $\tau r = 1$ の軸に対して左右対称に得られた。このことは $\log(\tau r_k)$ が $0(\log 1)$ に対して対称となるように τr_k を選点すればよいことを示しており、ここでは、図の上部に印したように、 $\tau r_k = 0.05, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 20$ の 7 点を選点して数値逆変換を行った。半径方向の変位の計算結果を 図-8 に示す。なお、図中の○印は 図-6 の分割による有限要素法による計算値である。表-3 は両解析法による計算ディテールでありこの場合には、開口部周辺の解析に限定しても、有限要素法は境界要素法に比べ、約 4 倍の節点数を必要とし、計算時間も約 2 倍かかることがわかる。

4. あとがき

以上、境界要素法を用いた数値 Laplace 逆変換法に

よる線形粘弾性解析について述べたが、境界要素法は比較的小さい容量の計算ですむなどの利点があり、特に無限領域の解析には他の数値解法に比して有利である。

また、既報⁹⁾の Laplace 逆変換法、ならびに分布関数による Laplace 逆変換パラメーターの選点方法は、対応原理により、境界要素法を用いて線形粘弾性体を解析する場合にも適用することができ、かつ十分な精度で解を得ることが可能であることがわかった。

Banerjee⁹⁾ は構造物と土との相互作用問題には有限要素法と境界要素法との併用がよく、その応用が最近研究されつつあると述べている。その場合、本法は土の粘性的性質を考慮した解析に役立つであろう。

なお本文の計算はすべて倍精度で行い、計算機は信州大学計算機センターを経由して、東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 を使用した。

参考文献

- 1) Banerjee, P.K. and R. Butterfield (ed.): Developments in Boundary Element Methods-1, Applied Science Publishers, 1979.
- 2) 丹羽・小林・北原: 弾性固有値問題の積分方程式による解法, 土木学会論文報告集, 第 285 号, pp. 17~28, 1979.
- 3) 小林・西村: 積分方程式法による表面クラック周辺の応力解析, 土木学会論文報告集, 第 288 号, pp. 57~65, 1979.
- 4) Kumar, V. and S. Mukherjee: A boundary-integral formulation for time-dependent inelastic deformation in metals, Int. J. Mech. Sci., Vol. 19, pp. 713~724, 1977.
- 5) Rizzo, F.J. and D.J. Shippy: An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory, SIAM J. Applied Mathematics, Vol. 21, No. 2, pp. 321~330, 1971.
- 6) Schapery, R.A.: Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis, Proceeding of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 1075~1085, 1962.
- 7) 草間・三井・吉田: 数値ラプラス逆変換法による線形粘弾性解析, 土木学会論文報告集, 第 292 号, pp. 41~52, 1979.
- 8) Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method in Engineers, Pentech Press, 1978.
- 9) Banerjee, P.K.: Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape, Int. J. Mech. Sci., Vol. 18, pp. 293~303, 1976.

(1980.5.15・受付)