

動吸振器による可撓性構造物の振動抑制について

VIBRATIONAL BEHAVIOR OF FLEXIBLE STRUCTURES WITH DYNAMIC VIBRATION ABSORBERS

高橋 龍夫*・倉西 茂**

By Tatsuo TAKAHASHI and Shigeru KURANISHI

1. 序 論

従来より、橋梁や塔等の可撓性構造物の振動抑制や耐震のために、“動吸振器”あるいは“ダイナミックダンパー”とよばれる装置が用いられている。松本、佐藤、西岡、塩尻らにより、歩道橋の有害な振動を防止する方法として“吸振器”を用いることが報告されており¹⁾、アメリカ合衆国においては、かなり以前より高層建築物の振動を“Tuned Mass Damper”(T.M.D.)を用いて抑制する試みがなされている²⁾。前者は、歩行者が歩道橋に与える狭い周波数帯域の振動を“吸振器”により調和させ、歩調の振動数に近い歩道橋の固有振動数を共振しにくい振動数帯域に移動させる効果を期待するものである。後者は、主として、風による高層建築物に生じる有害な振動をT.M.D.を用いて防止しようとするものであり、建築物の中に備えつけられている水槽が、T.M.D.の一部として働くように設計されたものもある。また、諸々の機械振動が、支持台あるいは設置家屋に与える影響を緩和するために動吸振器を用いている例は多い³⁾。しかし、いずれの場合においても、付加されるダイナミックダンパーの質量が構造物等本体の質量に比較してさほど小さいとはいえず、歩道橋の場合には1/20～1/50であり、機械振動防止用の吸振器においては1/10以上のものもある。

一方、解析にあたっては、主振動系を等価な1自由度の振動系に置き換え、図-1に示されるような2自由度の振動系に置換している。

筆者らは、すでに吊橋等の振動防止のために種々のオイルダンパーを用いることを提唱している⁴⁾。また、基礎的な研究として、はりに粘性ダンパーを付加した場合の振動性状の解析を行っており^{5)~6)}、これらダンパーに

よる振動制御の有効性について述べてきた。本論文は、主として、粘性抵抗を有する動吸振器による可撓性構造物のたわみ振動の性状変化の検討を行い、特に、動吸振器の質量を小さくした場合(質量比1/100以下)について、振動抑制に最も効果のある動吸振器のばね係数、および粘性係数について考察を加えている。対象構造物としては、橋梁あるいは高層建築物を想定して、単純支持ばり、および片持ばりに動吸振器を取りつけた場合の、たわみ振動の解析を行っている。これらの解析結果より、動吸振器による歩道橋あるいは高層建築物の振動抑制のための資料を提出している。

2. 基礎運動方程式と解析

図-2に示されるように、はりの断面は一様とし、動吸振器は任意の位置に取りつけられるものとする。はりの曲げ振動、および動吸振器の両者の連立運動方程式は、デルタ関数を用いて次のように表示される。ただし、外力は、 $P_i(x, t)$ で表わし、式中の下つきの文字

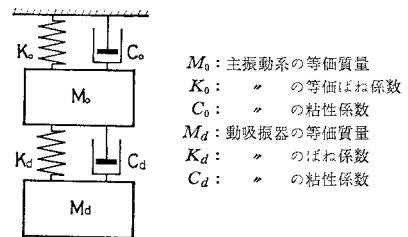


図-1

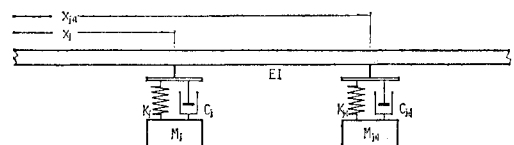


図-2

* 正会員 東北工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

j は、 x_j 位置での動吸振器を意味している。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{rA}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n C_j \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{d\eta_j}{dt} \right\} \cdot \delta(x-x_j) + \sum_{j=1}^n K_j \{y-\eta_j\} \delta(x-x_j) = \sum_{k=1}^n P_k(x, t) \dots\dots\dots (1)$$

$$M_j \frac{d^2 \eta_j}{dt^2} + C_j \left\{ \frac{d\eta_j}{dt} - \frac{dy_{xj}}{dt} \right\} + K_j (\eta_j - y_{xj}) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

- $y(x, t)$: はりの曲げ振動変位
- EI : はりの曲げ剛性
- $rA/g=m$: はりの単位長さ当たりの質量
- $\eta_j(t)$: j 番目の動吸振器の振動変位
- M_j : j 番目の動吸振器の質量
- K_j : j 番目の動吸振器のばね係数
- C_j : j 番目の動吸振器の粘性係数

式 (1) および式 (2) を次の初期条件、および境界条件を用いてラプラス変換を行うと次式を得る。

$$y(x, 0) = y_0$$

$$\partial y(x, 0) / \partial t = y_1$$

$$\eta_j(0) = \eta_{j0}$$

$$d\eta_j(0) / dt = \eta_{j1}$$

$$y(0, t) = \varphi_0$$

$$\partial y(0, t) / \partial x = \varphi_1$$

$$\partial^2 y(0, t) / \partial x^2 = \varphi_2$$

$$\partial^3 y(0, t) / \partial x^3 = \varphi_3$$

$$L_t[y(x, t)] = Y_{\bar{i}}(x, s) = Y_{\bar{i}}$$

$$L_t[\eta_j(t)] = \eta_{j\bar{i}}(s) = \eta_{j\bar{i}}$$

$$L_x[Y_{\bar{i}}(x, s)] = Y_{\bar{i}\bar{x}}(u, s) = Y_{\bar{i}\bar{x}}$$

$$L_t[\varphi_0] = \phi_0$$

$$L_t[\varphi_1] = \phi_1$$

$$L_t[\varphi_2] = \phi_2$$

$$L_t[\varphi_3] = \phi_3$$

$$Y_{\bar{i}}(x_j, s) = Y_{ix_j}$$

$$L_x[y_0] = y_{0\bar{x}}$$

$$L_x[y_1] = y_{1\bar{x}}$$

$$L_{tx}[P(x, t)] = P_{\bar{i}\bar{x}}$$

$$\eta_{j\bar{i}} = \frac{1}{s^2 + n_j s + k_{j0}} [s\eta_{j0} + \eta_{j1} + (n_{j0}s + k_{j0}) \cdot Y_{ix_j} - n_{j0}s y_{0x_j}] \dots\dots\dots (3)$$

$$Y_{\bar{i}\bar{x}} = \frac{1}{u^4 - \beta^4} \left[u^3 \phi_0 + u^2 \phi_1 + u \phi_2 + \phi_3 + \frac{1}{b^2} \cdot \{s y_{0\bar{x}} + y_{1\bar{x}} - \sum_{j=1}^n (n_j s + k_j) Y_{ix_j} e^{-x_j u} + \sum_{j=1}^n (n_s + k) \eta_{j\bar{i}} \cdot e^{-x_j u} - \sum_{j=1}^n (n_j y_{0x_j} - \eta_{j0}) e^{-x_j u} + \sum P_{\bar{i}\bar{x}} \} \right] \dots\dots\dots (4)$$

ここで、

$$\beta^4 = -\frac{s^2}{b^2}, \quad b^2 = \frac{EI}{m}, \quad n_j = \frac{C_j}{m}, \quad k_j = \frac{K_j}{m}$$

$$n_{j0} = \frac{C_j}{M_j}, \quad k_{j0} = \frac{K_j}{M_j}$$

式 (3) を用いて式 (4) を表わし、 u について逆変換を行い $Y_{\bar{i}}$ を求め、はりの他端の境界条件を用いて、 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ を定める。さらに、 $Y_{\bar{i}}$ の s についての逆変換を行い、 $y(x, t)$ が得られる。

3. 片持ばりについての解

ここでは、片持ばりにおける動吸振器の効果を評価するために、図-3 に示されるような変位を与えた場合の片持ばりの強制振動を取り扱う。取りつけられる動吸振器の数は1台とする。運動方程式 (1) および (2) は、この場合、次のように表わされる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{rA}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{d\eta}{dt} \right\} \cdot \delta(x-x_0) + K(y-\eta) \delta(x-x_0) = 0 \dots\dots (5)$$

$$M \frac{d^2 \eta}{dt^2} + C \left\{ \frac{d\eta}{dt} - \frac{dy_{x_0}}{dt} \right\} + K(\eta - y_{x_0}) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここで用いる初期条件、および境界条件は次のとおりである。

$$y(x, 0) = 0, \quad \partial y(x, 0) / \partial t = 0,$$

$$\eta(0) = 0, \quad d\eta(0) / dt = 0,$$

$$y(0, t) = \varphi_0, \quad \partial y(0, t) / \partial x = \varphi_1,$$

$$\partial^2 y(0, t) / \partial x^2 = 0, \quad \partial^3 y(0, t) / \partial x^3 = 0,$$

$$y(l, t) = A \sin \omega t = F_1(t), \quad \partial y(l, t) / \partial x = 0.$$

これらの諸条件を用いて、式 (4) に相当する $Y_{\bar{i}\bar{x}}$ を求めると次の式が得られる。

$$Y_{\bar{i}\bar{x}} = \frac{1}{u^4 - \beta^4} \left[u^3 \phi_0 + u^2 \phi_1 - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{f_2(f_4 - f_3)}{f_4} \cdot Y_{ix_0} e^{-ux_0} \right] \dots\dots\dots (7)$$

$$f_2 = ns + k, \quad f_3 = n_0s + k_0, \quad f_4 = s^2 + n_0s + k_0.$$

式 (7) を u について逆変換し、 $Y_{\bar{i}}$ を求めると次式を得る。

$$Y_{\bar{i}} = \frac{L_t[F_1(t)]}{D} \left[D_0 (\cosh \beta x + \cos \beta x) - D_1 (\sinh \beta x + \sin \beta x) - \frac{1}{2 \beta^3 b^2} \cdot \frac{f_2(f_4 - f_3)}{f_4} \right]$$

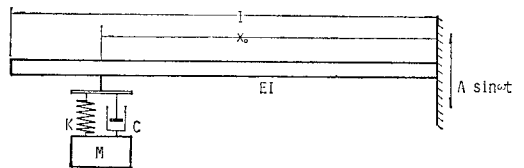


図-3

$$\begin{aligned} & \cdot \{D_0(\cosh \beta x_0 + \cos \beta x_0) \\ & - D_1(\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0)\} \\ & \cdot \{\sinh \beta(x-x_0) - \sin \beta(x-x_0)\} \dots (8) \end{aligned}$$

ただし, $x \leq x_0$ において,

$$\begin{aligned} \sinh \beta(x-x_0) &= 0, \quad \sin \beta(x-x_0) = 0 \\ D &= 2(1 + \cosh \beta l \cdot \cos \beta l) - \frac{1}{2\beta^3 b^2} \cdot \frac{f_2(f_4 - f_3)}{f_4} \\ & \cdot \{(\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0)(\cosh \beta l + \cos \beta l) \\ & \cdot (\cosh \beta(l-x_0) - \cos \beta(l-x_0)) \\ & + (\cosh \beta x_0 + \cos \beta x_0)(\sinh \beta(l-x_0) \\ & - \sin \beta(l-x_0))(\cosh \beta l + \cos \beta l) \\ & - (\cosh \beta x_0 + \cos \beta x_0)(\sinh \beta l + \sin \beta l) \\ & \cdot (\cosh \beta(l-x_0) - \cos \beta(l-x_0)) \\ & - (\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0)(\sinh \beta(l-x_0) \\ & - \sin \beta(l-x_0))(\sinh \beta l - \sin \beta l)\} \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 &= \cosh \beta l + \cos \beta l - \frac{f_2(f_4 - f_3)}{2\beta^3 b^2 f^4} \\ & \cdot (\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0)(\cosh \beta(l-x_0) \\ & - \cos \beta(l-x_0)) \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \sinh \beta l - \sin \beta l - \frac{f_2(f_4 - f_3)}{2\beta^3 b^2 f^4} \\ & \cdot (\cosh \beta x_0 + \cos \beta x_0)(\cosh \beta(l-x_0) \\ & - \cos \beta(l-x_0)) \dots (11) \end{aligned}$$

式(8)における分母項 D を 0 とおいた式, $D=0$ が特性方程式であり, 動吸振器が取り付けられていない場合には, $f_2=0$ ($\because n=0, k=0$) となり, 特性方程式は次式となる.

$$1 + \cosh \beta l \cdot \cos \beta l = 0$$

すなわち, 片持ばりの振動数方程式になる. いま, 特性方程式の根を, $\beta l = R + iI$ とすれば, s は次のように表示できる.

$$s = -2pRI \pm ip(I^2 - R^2) \dots (12)$$

ここで,

$$p = b/l^2 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

である. したがって, 特性方程式の根を求めることにより, 動吸振器による制振効果は式(12)より計算される減衰定数を用いることにより評価できる.

式(8)の右辺の逆変換は, 特性方程式の根の留数の和より求められる.

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \left[\frac{A \cdot \omega \bar{D} e^{st}}{d(s^2 + \omega^2)} \mathbf{D} \right]_{s=\pm i\omega} \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A \omega \bar{D} e^{st}}{(s^2 + \omega^2) \frac{dD}{ds}} \right]_{s=-2pR_r I_r \pm ip[R_r^2 - I_r^2]} \dots (13) \end{aligned}$$

式(13)右辺の第1項は, 強制振動に対する定常振動解

であり, 第2項は減衰振動解である. 第2項の指数より, 各次の減衰自由振動の円振動数 ω_{dr} は次の式で表わされる. ただし, 式(13)中の \bar{D} は, 式(8)右辺の大かっこの中の各項の和を表わすものとする.

$$\omega_{dr} = \frac{b}{l^2} |R_r^2 - I_r^2| = \frac{|R_r^2 - I_r^2|}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \dots (14)$$

一方, 片持ばりの固有円振動数 ω_{or} は,

$$\omega_{or} = \frac{\alpha_r^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (\alpha_r = 1.8751, \dots, 4.6941, \dots) \dots (15)$$

であり, 両者の振動数比は次の式で表わされる.

$$\frac{\omega_{dr}}{\omega_{or}} = \frac{\frac{|R_r^2 - I_r^2|}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}}{\frac{\alpha_r^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}} = \frac{|R_r^2 - I_r^2|}{\alpha_r^2} \dots (16)$$

減衰自由振動における対数減衰率 δ_r は次の式より計算される.

$$\delta_r = \frac{4\pi R_r I_r}{|R_r^2 - I_r^2|} \dots (17)$$

いま, 動吸振器の制振効果を評価するために次の3個のパラメーターを用いる.

$$(1) \quad \tilde{\mu} = \frac{nl}{b} = \frac{Cl}{\sqrt{mEI}}$$

$$(2) \quad \tilde{k} = \frac{kl^3}{b^2} = \frac{KI^3}{EI}$$

$$(3) \quad \tilde{m} = \frac{ml}{M}$$

パラメーター $\tilde{\mu}$ は動吸振器の粘性係数とはりの諸元(長さ, 質量, 曲げ剛性)との関係を表わし, \tilde{k} は動吸振器のばね係数とはりのたわみ剛度との関係を表わすものであり, \tilde{m} ははりと動吸振器との質量比を表わし, それぞれ, 粘性係数パラメーター, ばね係数パラメーターおよび質量比パラメーターとよぶ. 図-4に示される1質点系の振動において, 粘性係数が $C_d = 2\sqrt{M_d K_d}$ の大きさの値をもつとき, この振動系は臨界減衰の状態にある. はりに付加されている動吸振器の臨界減衰における粘性係数を C_{dc} とすれば, このときの粘性係数パラメーター(臨界粘性パラメーター) $\tilde{\mu}_c$ は次の式で表わされる.

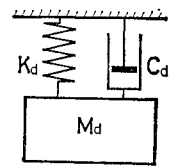


図-4

$$\tilde{\mu}_c = \frac{C_{dc} l}{\sqrt{mEI}} = 2\sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = 2\frac{\alpha_r^2}{\tilde{m}} \left(\frac{\bar{\omega}_{dr}}{\omega_{or}} \right) \dots (18)$$

式(18)中, $\bar{\omega}_{dr}$ は, はりの r 次の振動防止用に調整された動吸振器の円振動数であり, 動吸振器とはりとの振動数比を q_r とおけば, 式(18)は次のように書き換えられる.

$$\tilde{\mu}_c = 2\frac{\alpha_r^2}{\tilde{m}} q_r \dots (19)$$

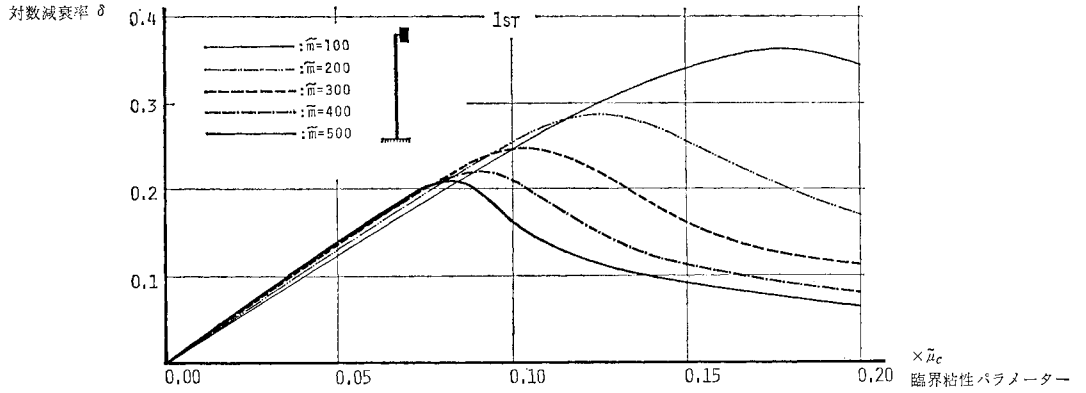


図-5 片持ばりの1次の減衰振動における対数減衰率-粘性係数関係図

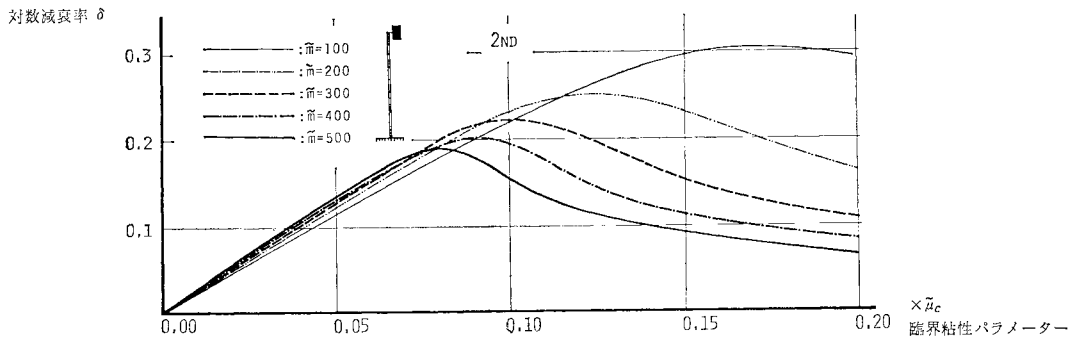


図-6 片持ばりの2次の減衰振動における対数減衰率-粘性係数関係図

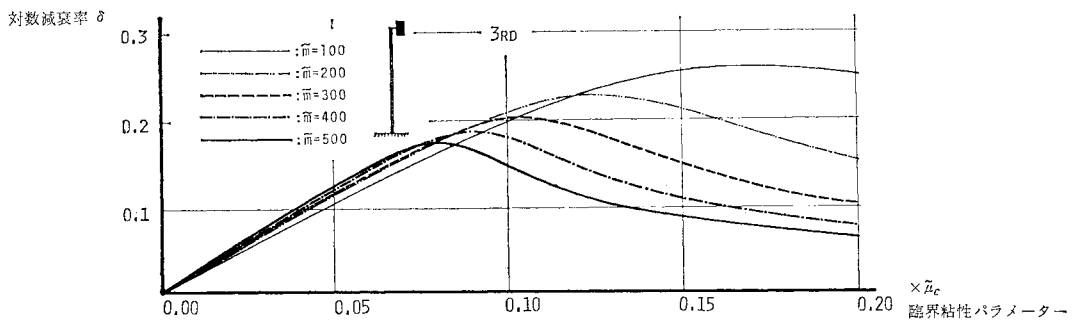


図-7 片持ばりの3次の減衰振動における対数減衰率-粘性係数関係図

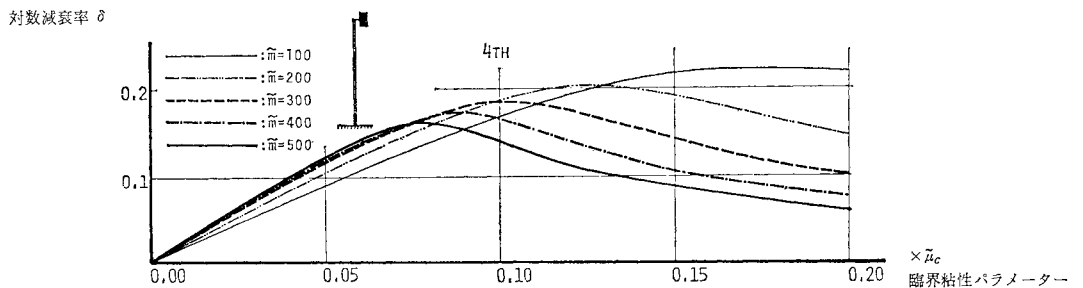


図-8 片持ばりの4次の減衰振動における対数減衰率-粘性係数関係図

同様にばね係数パラメーター k を変形して、振動数比 q_r を用いて表わすと次式を得る。

$$\tilde{k} = \frac{\alpha_r^4}{\tilde{m}} \left(\frac{\bar{\omega}_{dr}}{\omega_{or}} \right)^2 = \frac{\alpha_r^4}{\tilde{m}} q_r^2 \dots (20)$$

図-5~8 は、片持ばりの自由端に動吸振器を1台取りつけた場合 ($x_0=l$) の減衰自由振動における対数減衰率 δ と動吸振器の粘性係数との関係を示した図である。横軸に表示されている数字は、臨界粘性パラメーターの大きさを示しており、この値は式(18)より算出される。また、式(19)からもわかるように、臨界粘性パラメーターは、質量比 \tilde{m} 、振動の次数 r および動吸振器とはりとの振動数比 q_r により変化するものであり、振動数比 q_r を1になるように動吸振器が調整された場合の臨界粘性係数は、表-1により与えられる。

図-5 は1次振動、図-6 は2次振動、図-7 は3次振動、図-8 は4次振動の各場合の計算値であり、質量比は100, 200, 300, 400 および500の5ケースについて示され、いずれの場合においても $q_r=1.0$ とした。各図においてみられるように、対数減衰率は、質量比の増加に伴って減少してゆくが、その減少の割合は著しくない。たとえば、1次振動の場合において、質量比100で最大対数減衰率はおおよそ0.36であり、質量比500で最大対数減衰率はおおよそ0.21である。質量比の増加分5倍に対して、最大対数減衰率の減少分は1/1.71である。いずれの場合においても、振動は、急速に減衰してゆくことを示している。

対数減衰率は、粘性係数の増加に伴い増加してゆくが、粘性係数の一定値を越すと減少してゆく。すなわち、動吸振器の粘性係数には、最適粘性係数あるいは有効粘性係数というべき値が存在することを示している。1次から4次までの振動において、質量比 $\tilde{m}=100$ で $\mu_c=0.17\sim 0.18 \tilde{\mu}_c$ 、 $\tilde{m}=200$ で $\mu_c=0.12\sim 0.13 \tilde{\mu}_c$ 、 $\tilde{m}=300$ で $\mu_c=0.10\sim 0.11 \tilde{\mu}_c$ 、 $\tilde{m}=400$ で $\mu_c=0.08\sim 0.09 \tilde{\mu}_c$ 、 $\tilde{m}=500$ で $\mu_c=0.75\sim 0.8 \tilde{\mu}_c$ であり、これらの値を用いて、制振効果が最も大きくなると考えられる動吸振器の粘性係数(有効粘性係数)を算出すると表-2を得る。なお、対数減衰率はなだらかな曲線を描いて変化をしているので、粘性係数の若干の変化だけでは減衰性状の大きな変動はないように思われる。

図-9 は、質量比 $\tilde{m}=100$ 、粘性係数 $C=7.032 \times 10^{-3} \sqrt{mEI}/l$ の動吸振器が片持ばりの自由端に

取りつけられた場合の1次振動の共振曲線を示し、図-10 は同じケースで $\tilde{m}=200$ 、 $C=3.516 \times 10^{-3} \sqrt{mEI}/l$

表-1

質量比 次数	$\tilde{m}=100$	$\tilde{m}=200$	$\tilde{m}=300$	$\tilde{m}=400$	$\tilde{m}=500$
1st	7.032×10^{-2}	3.516×10^{-2}	2.344×10^{-2}	1.758×10^{-2}	1.406×10^{-2}
2nd	4.407×10^{-1}	2.203×10^{-1}	1.469×10^{-1}	1.102×10^{-1}	8.814×10^{-2}
3rd	1.234	6.169×10^{-1}	4.133×10^{-1}	3.084×10^{-1}	2.467×10^{-1}
4th	2.418	1.209	8.059×10^{-1}	6.044×10^{-1}	4.835×10^{-1}

(片持ばりにおける臨界粘性パラメーター表, $q_r=1.0, C=\frac{\sqrt{mEI}}{l} \tilde{\mu}$)

表-2

質量比 振動次数	$\tilde{m}=100$	$\tilde{m}=200$	$\tilde{m}=300$	$\tilde{m}=400$	$\tilde{m}=500$
1st	1.231×10^{-2}	4.395×10^{-3}	2.461×10^{-3}	1.494×10^{-3}	1.089×10^{-3}
2nd	7.712×10^{-2}	2.753×10^{-2}	1.542×10^{-2}	9.367×10^{-3}	6.827×10^{-3}
3rd	2.159×10^{-1}	7.711×10^{-2}	4.339×10^{-2}	2.621×10^{-2}	1.911×10^{-2}
4th	4.231×10^{-1}	1.511×10^{-1}	8.461×10^{-2}	5.137×10^{-2}	3.747×10^{-2}

(片持ばりにおける有効粘性係数, $\times \frac{\sqrt{mEI}}{l}, q_r=1.0, x_0=l$)

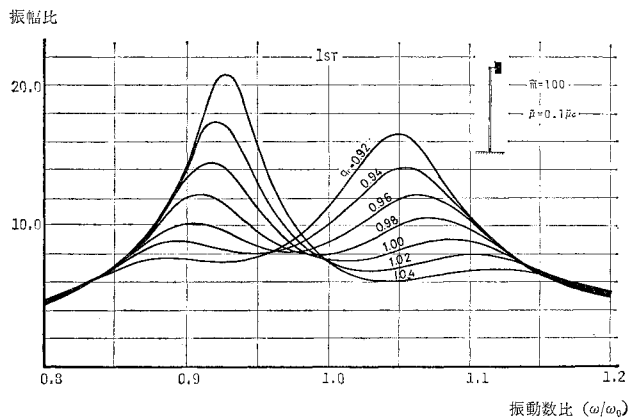


図-9 1次振動の共振曲線 ($\tilde{m}=100, C=7.032 \times 10^{-3} \sqrt{mEI}/l$)

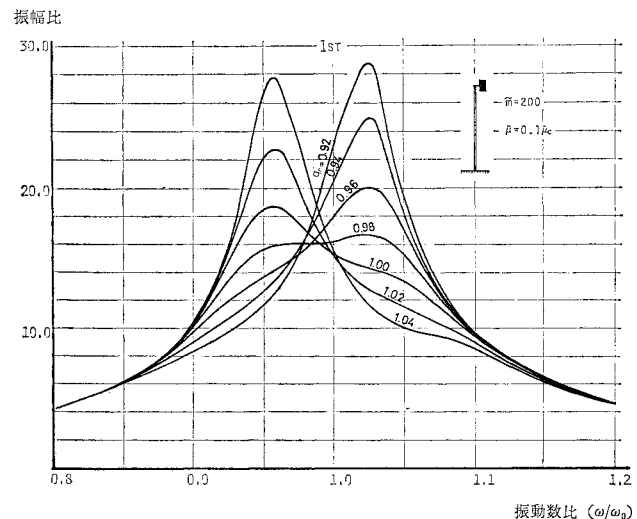


図-10 1次振動の共振曲線 ($\tilde{m}=200, C=3.516 \times 10^{-3} \sqrt{mEI}/l$)

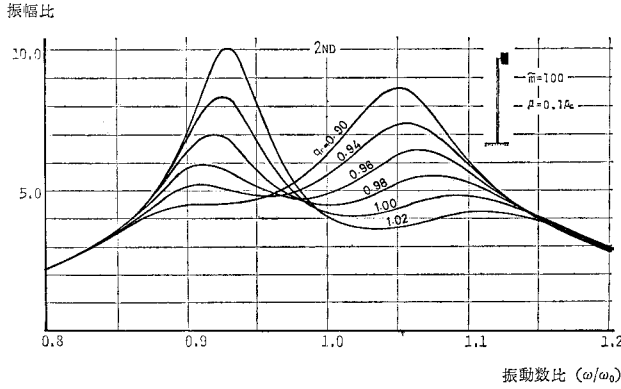


図-11 2次振動の共振曲線 ($\bar{m}=100, C=4.407 \times 10^{-2} \sqrt{mEI/l}$)

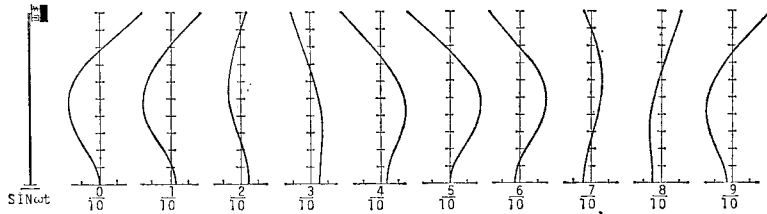


図-13 片持ばりの2次の定常振動モード
($\bar{m}=100, C=4.407 \times 10^{-2} \sqrt{mEI/l}, \omega/\omega_0=1.0$)

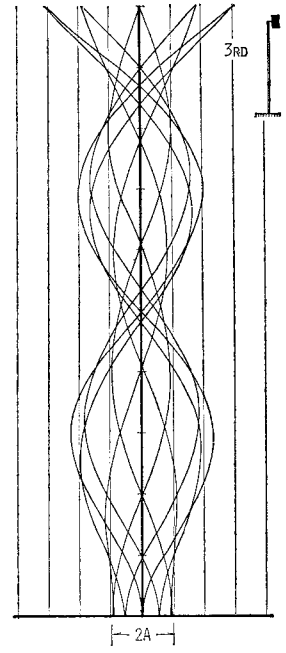


図-12 片持ばりの3次の定常振動モード
($\bar{m}=100, C=1.234 \times 10^{-1} \sqrt{mEI/l}, \omega/\omega_0=0.96$)

の場合の共振曲線であり、図-11は、 $\bar{m}=100, C=4.407 \times 10^{-2} \sqrt{mEI/l}$ の動吸振器を取りつけた場合の2次振動の共振曲線である。図中の数字は、動吸振器とはりとの固有振動数比 ($C=0$ の場合)を示す。縦軸は強制変位(固定端)に対する倍率であり、横軸は、外力とはりとの振動数比がとってある。ばね係数を変化させ、動吸振器の固有振動数を変えてゆくと、共振点がわずかに移動し、最大振幅値が増減する。

図-12は、質量比 $\bar{m}=100$, 粘性係数 $C=1.234 \times 10^{-1} \sqrt{mEI/l}$ で、動吸振器と片持ばりとの固有振動数比を0.96にした場合の3次の共振振動の状態を同一図上に描いたものであり、図-13は、質量比 $\bar{m}=100$, 粘性係数 $C=4.407 \times 10^{-2} \sqrt{mEI/l}$, 固有振動数比1.0の動吸振器を取りつけた場合の2次の共振振動の状態を1振動周期の1/10の間隔で列記したものであり、位相遅れの影響を受けた振幅の変化がよくわかる。

なお、片持ばりについての計算値は、すべて動吸振器が自由端に取りつけられた場合についてのものである。

4. 単純ばりに対する解

単純ばりにおける動吸振器の効果を評価するために、図-14に示されるような正弦形の集中力による強制振動を取り扱う。式(1)および(2)に相当する運動方程式は次のように表わされる。

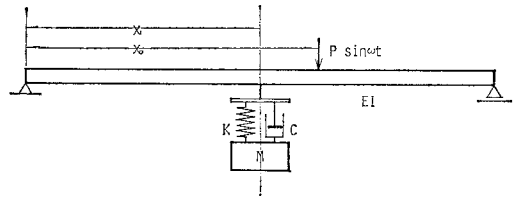


図-14

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{rA}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{d\eta}{dt} \right\} \delta(x-x_1) + K(y-\eta) \delta(x-x_0) = P \sin \omega t \cdot \delta(x-x_0) \dots\dots\dots(21)$$

$$M \frac{d^2 \eta}{dt^2} + C \left\{ \frac{d\eta}{dt} - \frac{dy_{x_1}}{dt} \right\} + K(\eta - y_{x_0}) = 0 \dots\dots\dots(22)$$

初期条件、および境界条件を次のとおりとし、3.の場合と同様の計算を行い、特性方程式を求める。

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= 0, \quad \partial y(x, 0) / \partial t = 0 \\ \eta(0) &= 0, \quad d\eta(0) / dt = 0 \\ y(0, t) &= 0, \quad \partial y(0, t) / \partial x = \phi_1 \\ \partial^2 y(0, t) / \partial x^2 &= 0, \quad \partial^3 y(0, t) / \partial x^3 = \phi_3 \\ y(l, t) &= 0, \quad \partial^2 y(l, t) / \partial x^2 = 0 \\ Y_{i\bar{x}} &= \frac{1}{u^4 - \beta^4} \left[u^2 \phi_1 + \phi_3 + \frac{L_t [P \sin \omega t]}{b^2} e^{-x_2 u} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{f_2(f_4 - f_3)}{f_4} Y_{i\bar{x}_0} e^{-x_0 u} \right] \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

$$Y_{\bar{i}} = \frac{L_t [P \sin \omega t]}{2 \beta^3 b^2} \left[\frac{1}{D} \{ D_1 (\sinh \beta x + \sin \beta x) + D_3 (\sinh \beta x - \sin \beta x) \} \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \beta^3 b^2} \cdot \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{f_4} [D_1 (\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0) + D_3 (\sinh \beta x_0 - \sin \beta x_0)] \right. \\ \left. \times \{ \sinh \beta (x - x_0) - \sin \beta (x - x_0) \} + \{ \sinh \beta (x - x_0) - \sin \beta (x - x_0) \} \right] \dots \dots \dots (24)$$

式 (24) での D, D_1 および D_3 は次の式で与えられる. f_2, f_3, f_4, β, b は式 (8) の場合と同じである.

$$D = 4 \sinh \beta l \cdot \sin \beta l - \frac{1}{2 \beta^3 b^2} \cdot \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{f_4} [(\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0) (\sinh \beta l + \sin \beta l) (\sinh \beta (l - x_0) \\ - \sin \beta (l - x_0)) + (\sinh \beta x_0 - \sin \beta x_0) (\sinh \beta l + \sin \beta l) (\sinh \beta (l - x_0) + \sin \beta (l - x_0)) \\ - (\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0) (\sinh \beta l - \sin \beta l) (\sinh \beta (l - x_0) + \sin \beta (l - x_0)) \\ - (\sinh \beta x_0 - \sin \beta x_0) (\sinh \beta l - \sin \beta l) (\sinh \beta (l - x_0) - \sin \beta (l - x_0))] \dots \dots \dots (25)$$

$$D_1 = (\sinh \beta l - \sin \beta l) (\sinh \beta (l - x_0) \\ + \sin \beta (l - x_0)) - (\sinh \beta l + \sin \beta l) \\ \cdot (\sinh \beta (l - x_0) - \sin \beta (l - x_0)) \dots \dots (26)$$

$$D_3 = (\sinh \beta l - \sin \beta l) (\sinh \beta (l - x_0) \\ - \sin \beta (l - x_0)) - (\sinh \beta l + \sin \beta l) \\ \cdot (\sinh \beta (l - x_0) + \sin \beta (l - x_0)) \dots \dots (27)$$

ただし, $x_p = x_0$ とした.

式 (24) において, $x = x_0$ とおき, $Y_{i x_0}$ を求めると次式を得る.

$$Y_{i x_0} = \frac{L_t [P \sin \omega t]}{2 \beta^3 b^2} \cdot \frac{1}{D} [D_1 (\sinh \beta x_0 + \sin \beta x_0) \\ + D_3 (\sinh \beta x_0 - \sin \beta x_0)] \dots \dots \dots (28)$$

動吸振器がはりの中央に取りつけられている場合には, $x_0 = l/2$ であり, 外力の円振動数が単純ばりの偶数次の振動数 (逆対称の振動数) に一致する場合, $D_1 = D_3 = 0$ であり, $Y_{i x_0} = 0$ となることを示している. したがって, 動吸振器の変位の像関数 $\eta_{\bar{i}}$ は次式で与えられるので,

動吸振器は作動しないことを示している.

$$\eta_{\bar{i}} = \frac{f_3}{f_4} Y_{i x_0} \dots \dots \dots (29)$$

逆対称振動の吸振を行うためには, 動吸振器を中央に 1 台のみ取りつけるのではなく, 図-15 に示されるように 2 台の動吸振器の設置が望まれる. この場合には, 連立運動方程式の数が 3 になるほかは, 前記とまったく同一の方法で解析される. 取り付けられている 2 台の動吸振器が同一のものとするれば, 特性方程式の左辺 D は次のように表わされる.

$$D = E_1 E_2 - E_3 E_4 \dots \dots \dots (30)$$

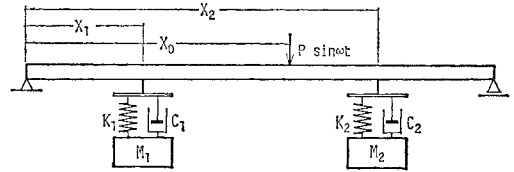


図-15

$$E_1 = (\sinh \beta l + \sin \beta l) - \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \{ (\sinh \beta x_1 + \sin \beta x_1) (\sinh \beta (l - x_1) - \sin \beta (l - x_1)) \\ + (\sinh \beta x_2 + \sin \beta x_2) (\sinh \beta (l - x_2) - \sin \beta (l - x_2)) \} + \left\{ \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \right\}^2 \\ \times (\sinh \beta x_1 + \sin \beta x_1) (\sinh \beta (x_2 - x_1) - \sin \beta (x_2 - x_1)) (\sinh \beta (l - x_2) - \sin \beta (l - x_2)) \dots \dots \dots (31)$$

$$E_2 = (\sinh \beta l + \sin \beta l) - \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \{ (\sinh \beta x_1 - \sin \beta x_1) (\sinh \beta (l - x_1) + \sin \beta (l - x_1)) \\ + (\sinh \beta x_2 - \sin \beta x_2) (\sinh \beta (l - x_2) + \sin \beta (l - x_2)) \} + \left\{ \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \right\}^2 \\ \times (\sinh \beta x_1 - \sin \beta x_1) (\sinh \beta (x_2 - x_1) - \sin \beta (x_2 - x_1)) (\sinh \beta (l - x_2) + \sin \beta (l - x_2)) \dots \dots \dots (32)$$

$$E_3 = (\sinh \beta l - \sin \beta l) - \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \{ (\sinh \beta x_1 + \sin \beta x_1) (\sinh \beta (l - x_1) + \sin \beta (l - x_1)) \\ + (\sinh \beta x_2 + \sin \beta x_2) (\sinh \beta (l - x_2) + \sin \beta (l - x_2)) \} + \left\{ \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \right\}^2 \\ \times (\sinh \beta x_1 + \sin \beta x_1) (\sinh \beta (x_2 - x_1) - \sin \beta (x_2 - x_1)) (\sinh \beta (l - x_2) + \sin \beta (l - x_2)) \dots \dots \dots (33)$$

$$E_4 = (\sinh \beta l - \sin \beta l) - \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \{ (\sinh \beta x_1 - \sin \beta x_1) (\sinh \beta (l - x_1) + \sin \beta (l - x_1)) \\ + (\sinh \beta x_2 - \sin \beta x_2) (\sinh \beta (l - x_2) - \sin \beta (l - x_2)) \} + \left\{ \frac{f_2 (f_4 - f_3)}{2 \beta^3 b^2 f_4} \right\}^2 \\ \times (\sinh \beta x_1 - \sin \beta x_1) (\sinh \beta (x_2 - x_1) - \sin \beta (x_2 - x_1)) (\sinh \beta (l - x_2) - \sin \beta (l - x_2)) \dots \dots \dots (34)$$

図-16 は、動吸振器を1台、単純ばりの中央に取りつけた場合の1次の減衰自由振動における対数減衰率と臨界粘性パラメーターの関係を示した図であり、質量比は100~500の5種類について計算されている。図-17は同一の動吸振器が2台取り付けられた場合の2次の減衰自由振動における対数減衰率と粘性係数パラメーターの関係図である。2台の動吸振器は $x_1=0.3l$, $x_2=0.7l$ の位置に取りつけた。図-18 は、動吸振器が1台の場合と2台の場合の比較図であり、質量比 \bar{m} は100と200の2ケースについて計算

されている。いずれの場合においても振動はすみやかに減衰してゆくと思われる。表-3 は、単純ばりにおける臨界粘性パラメーターを表わしたものである。1次~4次までの振動について質量比5ケースが示されている。

表-3

質量比 振動次数	$\bar{m}=100$	$\bar{m}=200$	$\bar{m}=300$	$\bar{m}=400$	$\bar{m}=500$
1st	1.974×10^{-1}	9.869×10^{-2}	6.579×10^{-2}	4.935×10^{-2}	3.948×10^{-2}
2nd	7.895×10^{-1}	3.948×10^{-1}	2.631×10^{-1}	1.974×10^{-1}	1.579×10^{-1}
3rd	1.776	8.882×10^{-1}	5.921×10^{-1}	4.444×10^{-1}	3.553×10^{-1}
4th	3.158	1.579	1.053	7.896×10^{-1}	6.317×10^{-1}

(単純ばりにおける臨界粘性パラメーター表, $q_r=1.0$)

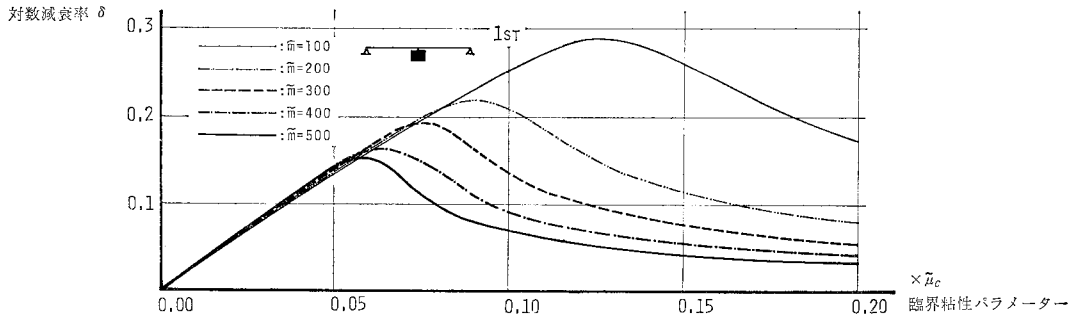


図-16 単純ばりの1次の減衰振動における対数減衰率-粘性係数関係図(動吸振器1台の場合)

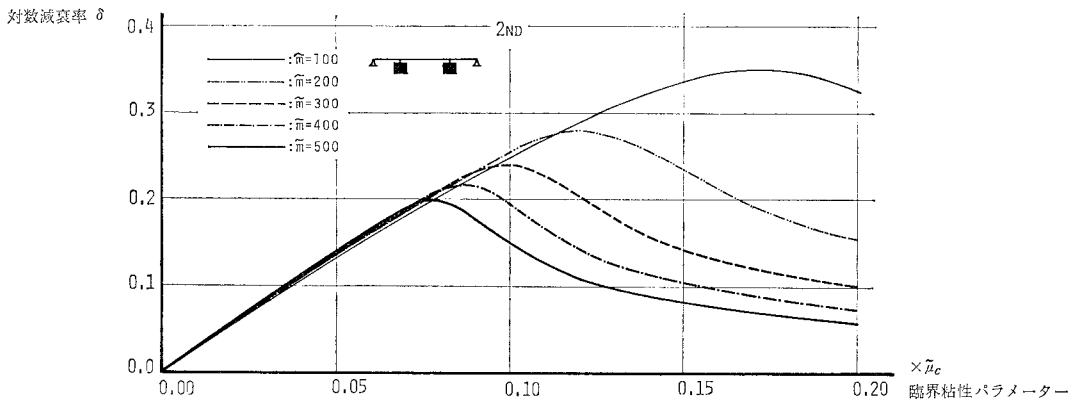


図-17 単純ばりの2次の減衰振動における対数減衰率-粘性係数関係図(動吸振器2台の場合)

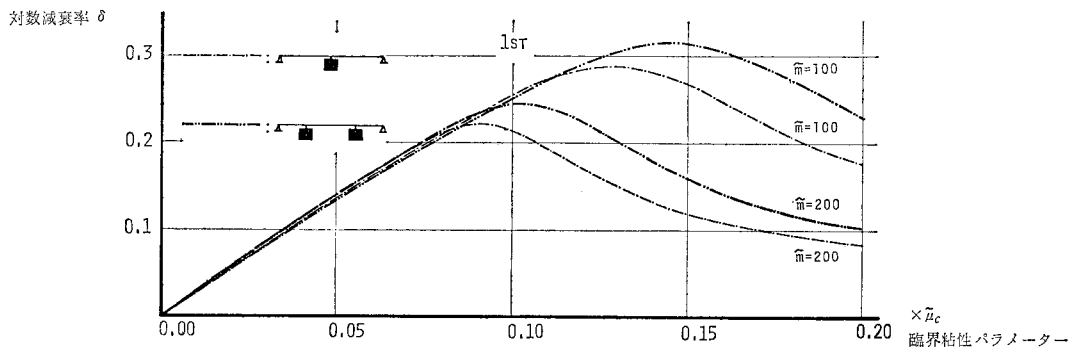


図-18 動吸振器1台の場合と2台の場合との対数減衰率-粘性係数関係における比較(1次振動の場合)

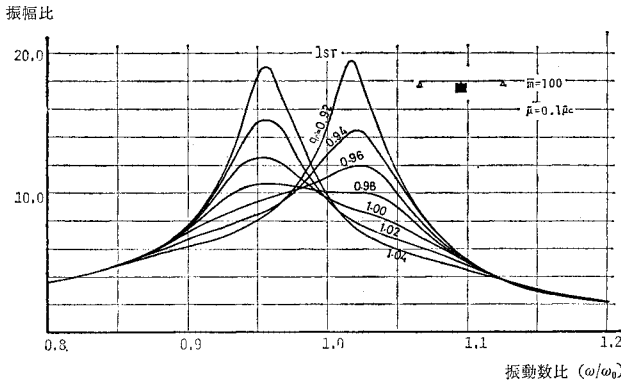


図-19 単純ばり 1 次振動の共振曲線
($\bar{m}=100, C=1.974 \times 10^{-2} \sqrt{mEI/l}$)

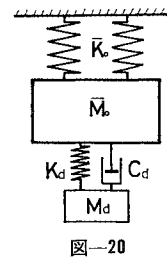


図-20

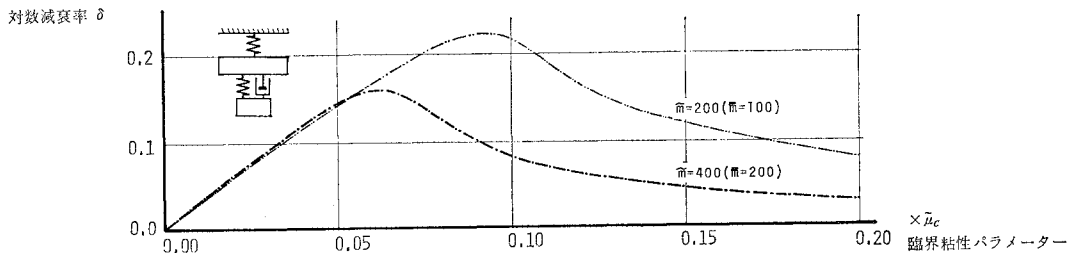


図-21 等価 2 質点系における対数減衰率-粘性係数関係図

図-19 は、動吸振器が 1 台、中央に取りつけられた場合の 1 次のはり中央点の変位の共振曲線であり、質量比 $\bar{m}=100$ 、粘性係数パラメーター $\bar{c}=0.1 \bar{c}_c$ ($C=1.974 \times 10^{-2} \sqrt{mEI/l}$) の場合である。縦軸は、集中荷重 P が中央に载荷された場合のため $Pl^3/48EI$ に対する倍率がとってある。横軸は、外力の振動数と単純ばりの固有振動数比である。

単純ばりの振動に対する動吸振器の効果は、片持ばりの場合と同様に、質量比の大小にかかわらず顕著であることがわかる。ただし、片持ばりの自由端のように、振動の次数には関係なく、動吸振器の吸振作用が大きいと考えられる取り付け位置がなく、振動の次数により位置と個数の検討が必要となる。ある振動次数に調整された動吸振器は、他の次数の振動に対してほとんど吸振作用をもたないが、この場合、質量比 \bar{m} が大きければ、これら動吸振器が、はりの振動性状に与える影響は小さいものと考えられ、複数個の動吸振器の取り付けができる。

5. 本論で用いた解析方法による計算結果と 2 質点系置換法による計算値との比較

動吸振器をもつはりの振動解析のための 1 つの簡易方

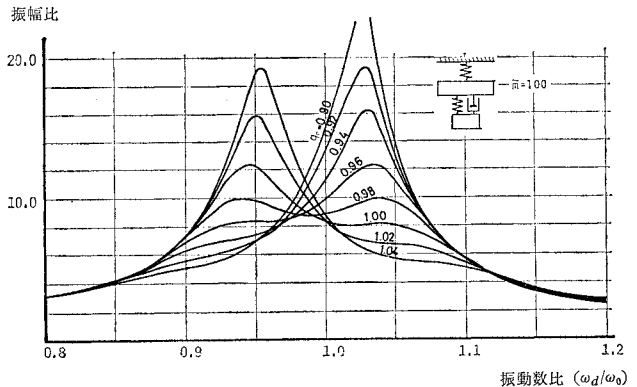


図-22 等価 2 質点系の共振曲線 ($\bar{m}=100, C=7 \times 10^{-3} \sqrt{mEI/l}$)

法として、図-20 に示されるような等価な 2 質点系の振動に置換することが通常行われている。はりと同様な質点系を作るには種々の考え方があるが、今回は、単純ばりの 1 次振動に対する等価質点系の換算ばね係数 \bar{K}_0 、および換算質量 \bar{M}_0 を次の値とする。

$$\bar{K}_0 = \frac{48 EI}{l^3}, \bar{M}_0 = \frac{48 ml}{\pi^4} (\approx 0.5 ml)$$

等価 2 質点系の計算に用いるばね係数パラメーター、粘性係数パラメーター、および質量比パラメーターをそれぞれ $\bar{k}, \bar{c}, \bar{m}$ とすれば、これらパラメーターと単純ばりの計算に用いた各パラメーターの間には次の関係が

ある。

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_c &= \frac{2\sqrt{48}}{\pi^2} \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}} = 1.404 \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}} = 1.404 \bar{\mu}_c \\ \bar{k} &= \frac{Kl^3}{EI} = \bar{k} \\ \bar{m} &= \frac{\bar{M}_0}{M_d} = \frac{48}{\pi^4} \bar{m}\end{aligned}$$

図-21 は等価 2 質点振動系において質量比 $\bar{m}=100$ ($\bar{m}=200$)、および $\bar{m}=200$ ($\bar{m}=400$) としたときの対数減衰率と粘性係数との関係を表わしたものであり、横軸の粘性係数パラメータは $\bar{\mu}_c$ を $\bar{\mu}_c$ に修正して表わしてある。この計算値と 図-16 における $\bar{m}=200$ 、および $\bar{m}=400$ の値と比較してみると、両者はかなりよく一致した値であることがわかる。図-22 は、 $\bar{m}=50$ ($\bar{m}=100$) の場合の共振曲線であり、これらの値も、若干の相違はあるが、図-19 における単純ばりの共振曲線に一致していることがわかる。しかし、等価 2 質点系置換法は最低次の振動の場合についてのみ有効な手段であることに注意すべきであろう。

6. 結 論

構造物の防振、あるいは、機械等の防振のために取り付けられるダイナミックダンパーは、振動する本体との質量比が大きくなればなるほどその効果は著しいと考えられている。しかし、橋梁等においては、一般に付加質量を大きくすると構造物に及ぼす諸影響は無視することはできなくなるであろう。著者らは、構造物、特に可撓性の高い構造物の防振策として、振動エネルギーをダッシュポット機構等により吸収し、熱エネルギーに変換し発散させる方式を提唱してきた。本論文においては、動吸振器の付加質量をでき得る限り小さい範囲にとどめ、ダッシュポットの粘性係数の最適値を選ぶことにより、防振効果を高め得ることを示している。計算式の誘導および計算結果より、次の結論が得られた。

(1) 動吸振器をもつはりの振動性状、および動吸振器の防振効果を解析するにあたり、等価な簡易振動系に置換することなく、比較的容易に計算できる式が導かれている。本方法によれば、位相遅れ、振動モードの変化、減衰性状等、高次の振動に対しても同様の計算式により解析される。

(2) 本論文で述べたような動吸振器の付加質量は、適当な粘性抵抗力とばねを備えることにより、防振効果を著しく減少させることなく、ある程度小さくすることができる。

(3) 動吸振器の粘性係数には、質量比に応じて、最も防振効果が大きいと考えられる値が存在し、その大きさは動吸振器自体の臨界減衰時の粘性係数のほぼ 10~

20% の範囲にあると考えられる。

(4) はりの各次の振動に対しては、それぞれの次数に同調 (tuned) された動吸振器が必要であり、一般には、ある次数に同調された動吸振器は、他の次数に対して防振効果を有しない。したがって、防振のためには構造物の振動特性に合わせて、複数個の動吸振器の用いる必要がある。

(5) 動吸振器の設置により、はり自体の振動数、振動モードに変化が生じるが、計算に用いた質量比 (1/100 以下) においては、その変化量は実用上無視できるものである。

(6) この種の動吸振器の実用化にあたっては、所定の弾性係数をもつばねを作る場合、ばねの長さ等において、設計上の制限があり、すべての可撓性構造物の防振のための動吸振器の実用化は難しいと思われる。

なお、本論文で述べた動吸振器の作成、その効果、および実構造物への適用例については、文献 (10)、(11) において、その一部を報告しているので参照されたい。

参 考 文 献

- 1) 松本嘉司・西岡 隆・松崎恵一：歩道橋に取り付けた吸振器の効果について、土木学会論文報告集，第 261 号，1977 年 5 月。
- 2) 松本嘉司・佐藤秀一・西岡 隆・塩尻弘雄：歩行者の特性を考慮した歩道橋の動的設計に関する研究，土木学会論文報告集，第 205 号，1972 年 9 月。
- 3) 倉西 茂：ダンパーによる吊橋のたわみ振動の制御について，土木学会論文報告集，第 142 号。
- 4) 倉西 茂・高橋龍夫：ダンパーをもつはりのたわみ振動，土木学会論文報告集，第 187 号，1971 年 3 月。
- 5) Kuranishi, S. and T. Takahashi: Vibrational Characteristics of Bridges with Damping Devices, Proceedings of U.S.-JAPAN Seminar on Earthquake Engineering Research with Emphasis on Lifeline System, pp. 119, 1976.
- 6) Kuranishi, S., T. Takahashi and S. Echigo: Dynamic Behavior of Suspension Bridges with Dampers, The Technology Reports of the Tohoku Univ. Vol. 38, No. 1, pp. 11~35, July, 1973.
- 7) 大亦絢一郎：はり状機械台の振動防止に関する研究，日本機械学会論文集，621-572，43 巻 365 号，pp. 140~150，昭和 52 年 1 月。
- 8) Robert J. McVamara: Tuned Mass Dampers for Buildings, Journal of the Structural Division, ASCE, No. ST 4, pp. 1785~1797.
- 9) P. Mahmoodi: Structural Dampers, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST 8, Proc. Paper, pp. 1661~1672, August, 1969.
- 10) 高橋龍夫・山田俊次：動吸振器による吊橋の制振効果について，土木学会東北支部技術研究発表会，昭和 54 年 3 月。
- 11) 高橋龍夫・松山正将・山田俊次：吸振動 (D.V.D システム) による橋梁の制振について，土木学会東北支部技術研究発表会，昭和 53 年 3 月。

(1979.12.28・受付)