

正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析

TIME RESPONSE ANALYSIS OF A CABLE UNDER HARMONIC EXCITATION

山口 宏樹*・宮田 利雄**・伊藤 学***
By Hiroki YAMAGUCHI, Toshio MIYATA and Manabu ITO

1. ま え が き

引張材としての機能を極度に活用するケーブルは、近年構造物の大型化に伴い、その使用性、経済性、美観等の面から、各種の工学的構造物に多岐にわたって使用されている。ケーブルの力学的特徴の主たるものとして、剛性が小さく、幾何学的非線形性を有することが挙げられるが、このためにケーブルの力学的挙動は独特、かつ複雑である。したがって、構造工学上からはその非線形挙動を十分に理解することが重要であるが、静的問題についてはすでに多くの研究がなされているものの、動的分野の研究では未着手の問題が多々認められ、非線形動的応答特性に至ってはほとんど解明されていないのが現状である。しかし、引張材としてのケーブルの機能を極度に活用するという点で、ケーブル構造は大スパンに対して有利である反面、剛性が小さくなることから、その動的問題が設計上相当な重みを占めると考えられ、ケーブルの動的非線形挙動の把握は、工学上重要な課題であるといえる。

一般に、任意外力を受ける非線形系の動的応答を問題とすると、系が非線形であるために解の重ね合わせが適用できず、基本的には個々の場合についての応答を検討する必要がある。さらにケーブルの場合、最も重要な外力の1つである風、潮流などによる流体力はそれ自体の動特性とは無関係に表現され得ないものであることもあって、ケーブルの非定常応答、つまり時間応答を知ることが問題となる。電子計算機の進歩により数値計算の容易になった今日、構造物の工学的信頼性を高めるためにも非線形理論による時間応答解析が行われるべきであるが、従来の有限要素法等による解析法¹⁾では計算時間

の増大が著しく、実用上、適用できないことが少なくないことから、ケーブルの時間応答解析に適用され得る合理的な解析法の開発が望まれる。

一方、数値計算が容易になったとはいえ、非線形式を数値的に解くことは労力が多く、しかも実際の設計を対象とする限り線形解で十分であろうと思われる場合も少なくない。したがって問題とすべきことは、線形理論では現われないような非線形挙動がどのような場合に現われるかを明らかにしておくことであるといえよう。そのための一方法として、簡単な外力による非線形時間応答を数値実験により求め、ケーブルの基本的な非線形動特性を明確にすることが考えられるが、上述の解析法の問題もあって、そのような研究はほとんど行われていないのが現状である。

このような観点から、本論文ではまず、任意外力を受けるケーブルの時間応答解析法として、初期状態での基準座標を一般化変位とした運動方程式を直接積分する方法を提案し、弱非線形問題に適用した場合の有用性を示す。次にこの解析法を用い、正弦波外力を受けるケーブルの時間応答についての数値実験を行い、ケーブルの基本的な非線形時間応答特性を明らかにする。

なお、ケーブルの有する非線形性には非抗圧縮性からくる材料非線形性もある²⁾が、本研究では扱っていない。

2. ケーブルの運動方程式

(1) 連続体としての運動方程式

完全可撓性を仮定し、伸張性を考慮したケーブルの変位表示の運動方程式は次式で与えられる³⁾。ただし、ケーブルは長さに沿って等分布質量を有し、初期状態において鉛直 $x-y$ 面内に静止しているものとする(図-1)。また、微小ひずみを仮定している。

* 正会員 工博 東京大学講師 工学部土木工学科

** 正会員 工博 横浜国立大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

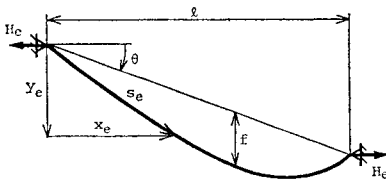


図-1 ケーブル初期形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{X}{\rho_0} = 0 \quad (1 \cdot a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{Y}{\rho_0} = 0 \quad (1 \cdot b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial w}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right] - \frac{Z}{\rho_0} = 0 \quad (1 \cdot c)$$

ここで、 $\{x_e, y_e, 0\}$ は初期形状を表わし、 u はケーブル面内水平変位、 v はケーブル面内鉛直変位、 w はケーブル面外変位である。また、

$$c_0 (= \sqrt{H_e/\rho_0}), c_1 (= \sqrt{EA/\rho_0}) \quad (1 \cdot d, e)$$

はそれぞれ、単位長さ当り質量 ρ_0 、伸び剛性 EA 、水平張力 H_e の弦の横波、縦波伝播速度である。 t は時間座標、 s_e は初期状態でのケーブルに沿う長さで定義する曲線座標であり、 $'$ は s_e に関する常微分を意味する。

さらに $\{X, Y, Z\}$ は分布外力である。

この方程式はケーブルを連続体として扱う場合の厳密な定式化から得られたもので、いわゆる分布パラメータ系としてのケーブル一般の支配方程式であるが、非線形の連立偏微分方程式となっており、解析解を得ることは困難である。

(2) 基準座標を一般化変位とした運動方程式

連続体としてのケーブルの運動方程式 (1・a~c) の解を、初期状態での線形系の基準関数 (固有モード) を使い、それを試行関数とした有限級数で近似する。初期

状態において鉛直面内に静止しているケーブルの基準関数は面内、面外の2種に分けられる³⁾から、近似解として次式を考える。

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N p_n(t) \begin{Bmatrix} \xi_n(s_e) \\ \eta_n(s_e) \end{Bmatrix} \quad (2 \cdot a)$$

$$w_a = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} q_{\bar{n}}(t) \zeta_{\bar{n}}(s_e) \quad (2 \cdot b)$$

ここで、 $[\xi_n(s_e) \eta_n(s_e)]$ は面内 n 次固有モード、 $\zeta_{\bar{n}}(s_e)$ は面外 \bar{n} 次固有振動モードであって、初期状態を基準に線形化された系に固有の基準関数である。また、 $p_n(t), q_{\bar{n}}(t)$ は対応する面内基準座標、面外基準座標である。すなわち、面内運動の近似解として u_a, v_a を一般化変位 p なる一変数で表わし、面外運動の近似解として w_a を一般化変位 q で表わしている。したがって、空間3方向に自由度を有する系から、面内、面外方向にのみ自由度を有する系に変換して自由度を落としていることになる。

式 (2・a, b) を式 (1・a~c) に代入し、Galerkin 法を適用する。つまり、残差をそれぞれ、 R_x, R_y, R_z で表わせば、

$$\int_0^{l^*} \{ R_x(u_a, v_a, w_a) \xi_i(s_e) + R_y(u_a, v_a, w_a) \eta_i(s_e) \} \cdot ds_e = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (3 \cdot a)$$

$$\int_0^{l^*} R_z(u_a, v_a, w_a) \zeta_{\bar{i}}(s_e) ds_e = 0 \quad (\bar{i}=1, \dots, \bar{N}) \quad (3 \cdot b)$$

とすることにより、 s_e と t とを独立変数とした連立偏微分方程式である支配方程式 (1・a~c) を、一般化変位としての基準座標 $p_i, q_{\bar{i}}$ についての、 t のみを独立変数とした連立常微分方程式に変換する。部分積分等を用いて整理し、適当な無次元化を行えば、最終的に次式が得られる。

$$m_i^* \ddot{p}_i^* + \sum_{j=1}^N K_{ij}^* p_j^* + \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{N}} K_{i\bar{j}}^* q_{\bar{j}}^* = f_i^* \quad (i=1, \dots, N) \quad (4 \cdot a)$$

$$m_{\bar{i}}^* \ddot{q}_{\bar{i}}^* + \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{N}} K_{\bar{i}\bar{j}}^* q_{\bar{j}}^* = f_{\bar{i}}^* \quad (\bar{i}=1, \dots, \bar{N}) \quad (4 \cdot b)$$

ただし、 $p_i^*, q_{\bar{i}}^*$ は $p_i, q_{\bar{i}}$ をスパン長 l で無次元化した一般化変位；

$$p_i^* = \frac{p_i}{l}, q_{\bar{i}}^* = \frac{q_{\bar{i}}}{l} \quad (5 \cdot a, b)$$

であり、 $^{\circ}$ は実時間 t を弦の基本周期で無次元化した無次元時間；

$$t^* = \frac{\pi}{l} c_0 \sqrt{\cos \theta} \cdot t \quad (6)$$

に関する2階微分を意味する。また、

$$K_{ij}^* = \frac{1}{8 \tau^*} \left[k_{ij}^* + k^2 \sum_{n=1}^N k_{ijn}^* p_n^* + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N k_{ijnm}^* p_n^* p_m^* \right]$$

$$+ \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} \sum_{m=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{j}n\bar{m}}^* q_n^* q_m^* \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$K_{i\bar{j}}^* = \frac{1}{8\tau^*} \left[\frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{j}n} q_n^* \right] \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$K_{i\bar{j}}^* = \frac{1}{8\tau^*} \left[k_{i\bar{j}}^* + k^2 \sum_{n=1}^N k_{i\bar{j}n}^* p_n^* + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N k_{i\bar{j}n\bar{m}}^* p_n^* p_m^* + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} \sum_{m=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{j}n\bar{m}}^* q_n^* q_m^* \right] \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

であり、式中、 τ^* 、 k は重量-水平張力比 ($\rho_0 g l / 8 H_0$)、伝播速度比 (c_1 / c_0) であり、いずれもケーブルの動特性を支配する無次元パラメーターである³⁾。また、 m_i^* 、 $m_{\bar{i}}^*$ 、 k_{ij}^* 、 $\dots\dots k_{i\bar{j}n\bar{m}}^*$ は Galerkin 法による積分項であり、ケーブルの初期形状、および固有モードに依存する無次元量である (補遺)。

さらに式 (4・a, b) 右辺の一般化外力 f_i^* 、 $f_{\bar{i}}^*$ は、分布外力をケーブル単位長さ当りの重量 $\rho_0 g$ で無次元化した無次元分布外力 X^* 、 Y^* 、 Z^* に依存した無次元量で、同じく補遺に示す。

m_i^* 、 $m_{\bar{i}}^*$ 、 k_{ij}^* 、 \dots 、 f_i^* 、 $f_{\bar{i}}^*$ はこのように、いずれも Galerkin 法を用いたことによる積分項で、一般には解析的に積分することができない。そこでこれを数値積分により評価し、無次元係数として決定するものとするれば、式 (4・a, b) は面内、面外運動の一般化変位 p_i^* 、 q_i^* に関する非線形の運動方程式として確定されることになる。

さらに一般的に減衰をも考慮し、初期状態での各固有振動について定義されたモード減衰定数 h_i 、 $h_{\bar{i}}$ が与えられるものとして、マトリックス表示すれば、次式を得る。

$$[M^*]\{\ddot{r}\} + [C^*]\{\dot{r}\} + [K^*(r)]\{r\} = \{F^*\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\{r\}$ は次式で表わされる一般化変位ベクトルである。

$$\{r\}^T = [p_i^* ; q_i^*] \dots\dots\dots (9)$$

また、 $[M^*]$ 、 $[C^*]$ 、 $[K^*(r)]$ 、 $\{F^*\}$ は一般化変位ベクトル $\{r\}$ に対する質量、減衰、剛性各マトリックス、および一般化外力ベクトルであり、剛性マトリックスは一般化変位の関数となつて、幾何学的非線形性が反映される。

$$[M^*] = \begin{bmatrix} m_i^* & 0 \\ 0 & m_{\bar{i}}^* \end{bmatrix} \\ [C^*] = \begin{bmatrix} h_i \omega_i^* m_i^* & 0 \\ 0 & h_{\bar{i}} \omega_{\bar{i}}^* m_{\bar{i}}^* \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10 \cdot a, b)$$

$$[K(r)] = \begin{bmatrix} K_{ij}^* & K_{i\bar{j}}^* \\ 0 & K_{\bar{j}\bar{i}}^* \end{bmatrix}, \{F^*\} = \begin{bmatrix} f_i^* \\ f_{\bar{i}}^* \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10 \cdot c, d)$$

ただし、 ω_i^* 、 $\omega_{\bar{i}}^*$ は面内、面外各無次元固有振動数である。

(3) 接線剛性マトリックス

式 (8) で表わされる任意時刻のつり合い状態から作用外力の微小増分を考え、それによるつり合い状態の変化を表わす線形化された増分形方程式を考える。微小増分量を δ を付して表わせば、式 (8) から増分形支配方程式として次式が得られる。

$$[M^*]\{\delta\ddot{r}\} + [C^*]\{\delta\dot{r}\} + [K^*(r)]\{\delta r\} + [\delta K^*(r)]\{r\} = \{\delta F^*\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、左辺第 4 項は幾何剛性による復元力項であつて、剛性の増分 $[\delta K^*(r)]$ が変位増分 δr による剛性変化として $[K^*(r, \delta r)]$ と表わせることから、変位増分で整理することにより次式のようになる。

$$[\delta K^*(r)]\{r\} = [K^*(r, \delta r)]\{r\} = [K^g(r)]\{\delta r\} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $[K^g(r)]$ は幾何剛性マトリックスであつて、式 (7・a~c)、(9)、(10・c) を用いて式 (12) の演算を行えば、次のように求められる。

$$[K^g(r)] = \begin{bmatrix} K_{ij}^g & K_{i\bar{j}}^g \\ K_{\bar{j}\bar{i}}^g & K_{\bar{j}\bar{i}}^g \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$K_{ij}^g = \frac{k^2}{8\tau^*} \left[\sum_{n=1}^N k_{ijn}^* p_n^* + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N k_{ijnm}^* p_n^* p_m^* \right] \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$K_{i\bar{j}}^g = \frac{k^2}{8\tau^*} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{j}n}^* q_n^* + \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{j}n\bar{m}}^* p_n^* q_{\bar{m}}^* \right] \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

$$K_{\bar{j}\bar{i}}^g = \frac{k^2}{8\tau^*} \left[\sum_{n=1}^{\bar{N}} k_{\bar{i}\bar{j}n}^* q_n^* + \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} k_{\bar{i}\bar{j}n\bar{m}}^* p_n^* q_{\bar{m}}^* \right] \dots\dots\dots (14 \cdot c)$$

$$K_{\bar{j}\bar{i}}^g = \frac{k^2}{8\tau^*} \left[\sum_{n=1}^{\bar{N}} \sum_{m=1}^{\bar{N}} k_{\bar{i}\bar{j}n\bar{m}}^* q_n^* q_m^* \right] \dots\dots\dots (14 \cdot d)$$

このとき、接線剛性マトリックス $[K^t(r)]$ は次式で与えられる。

$$[K^t(r)] = [K^*(r)] + [K^g(r)] \dots\dots\dots (15)$$

3. 時間応答解析

初期つり合い状態での基準座標を一般化変位とした運動方程式 (8) について、接線剛性を用いた Argyris の時間積分アルゴリズム⁴⁾ を適用し、任意外力を受けるケ

ープルの時間応答を解析することを考える。

運動方程式の直接積分法については種々のアルゴリズムが提案され、おのおのの有効性について比較検討がなされている⁹⁾が、ここではケーブルネットの非線形振動に応用して成功を取めた Argyris の高精度アルゴリズムを採用する。これは、他の方法が積分公式に低次の近似式を用いているのに対し、慣性力の時間ステップ内分布を Hermite の多項式で近似する高精度アルゴリズムであって、いわゆる period elongation (周期の増大)、および algorithmic damping (振幅の減小) が問題とならないとされている。

(1) 本解析法の特徴

多自由度非線形系の時間応答解析を行う場合、精度よく、しかも短時間の計算で応答を追えることが望ましい。しかし、精度上、基本的には各時間ステップごとに繰り返し収束計算を用いた直接積分を行うべきであり、計算時間の増大は否めない。前述のように直接積分法についてはかなり研究されており、計算時間の短縮を図るには自由度の低減が最も有効であると思われるが、自由度の低減は直接、精度に関係することが多く、注意を要する。線形系であれば、動的解析に特有な計算法としてのモーダルアナリシスがあり、実用上、重要性の少ない高次振動を省略し、ある程度の精度を保持しつつ、自由度を落とすことが可能である。そこでこれを非線形系に拡張し、線形系での基準座標を一般化変位として扱えば、合理的に自由度の低減ができ、Clough ら⁹⁾もその有効性を指摘している。

2.(2) で示した基準座標を一般化変位とした運動方程式は、この考え方をもとに Galerkin 法を適用して求めたものであり、ケーブルの場合、基準関数が簡単に求められる⁹⁾ため、有限要素法で同様のことを考えた場合より有効な方法といえる。またケーブルの初期つり合い状態での基準関数は面内、面外の 2 種にまとめられるため、空間 3 方向を独立に扱う一般の場合に比べてより自由度が低減できる。さらに応答を低次モードに限定しているため、系の最小固有周期から決定される直接積分法での時間間隔が拡大されるという利点をも有する。

このように、基準座標で表わした運動方程式を時間積分するという本解析法は、ケーブルの非線形時間応答を比較的精度よく、短時間で追跡できるものである。しかしあくまでも次のような仮定に基づくものであり、適用範囲に十分注意せねばならない。

- ④ 非線形応答の変形パターンが線形系のそれとあまり違わないような、いわゆる弱非線形問題であること。
- ⑤ 本質的な動的応答が低次数個のモード形状に含ま

れること。

④ は線形系 (初期状態) での固有モードを数個用いた近似を採用することから生ずるもので、本解析法の最大の制約条件である (後述)。また ⑤ については、外力分布が極端に複雑であるか、あるいは時間変化が重要である高次成分を含むものを除けば、一般には問題とならない。

(2) 解の精度

一般に線形系の基準関数は完備な直交関数列をなす。したがって、ケーブルの初期つり合い状態での基準関数を試行関数とした級数近似解 (2・a, b) は、その項数 N , \bar{N} を無限個とすれば厳密解に収束することは数学的に明らかであり、前節で述べた制約条件 ④ は理論的には不要のものである。しかし、合理的に自由度を低減することが本解析法のねらいであるから、 N , \bar{N} を数個に限定することになる。一般に関数解析において項数が限定された場合、解の精度を左右するのは試行関数であり、物理現象を十分理解したうでの決定が必要である。したがって、応答が線形系に近いものであれば (弱非線形問題)、基準関数を試行関数として選ぶことは有意であり、ケーブルの動特性を考慮に入れた合理的方法といえる。反面、応答が線形系から大きく離れてしまえば (強非線形問題)、線形系で定義された基準関数そのものが物理的意味を失い、解が実現現象とまったく掛け離れてしまうことになる。

図-2 はサグ比 r が 0.1 のケーブルについて、面内対称 1 次固有周期と同じ周期を有する外力が、面内鉛直方向に作用したときのケーブル中央点の時間応答を、級数項数 N (以下の計算例ではすべて $N=\bar{N}$ としている) をパラメーターに比較したものである。縦軸はスパン長 l で無次元化した鉛直変位 w^* である。これをみると項数が多いほどケーブルの非線形性が応答に反映されていることがわかる。このときの $N=5$ の場合を、有限要素法¹⁾で離散化したケーブル (10 等分割) を Argyris のアルゴリズムを用いて直接積分した応答と比較したものが図-3 である。図にはケーブルの $1/10 \cdot l$ 点, $3/10 \cdot l$ 点, 中央点の各応答を示したが、どれもよい一致を示しており、本解析法でケーブルの非線形応答を追い得ている

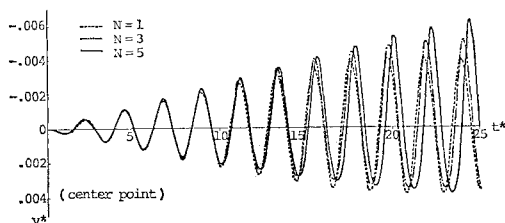


図-2 級数項数による応答の比較 ($r=0.1$, 面内加振)

ことがわかる。しかも、本解析法による計算時間は有限要素法のそれに比べ、1/2~1/3程度に短縮されている。

しかし、外力の大きさを図-3で示した場合の10倍にし、非線形性の大きく現われる応答を比較すると(図-4)、変位が大きくなって非線形性が強くなった場合、変位が抑えられて非線形応答が追えていない。ただし波形は比較的似ており、ある程度の非線形応答は表わしているといえよう。

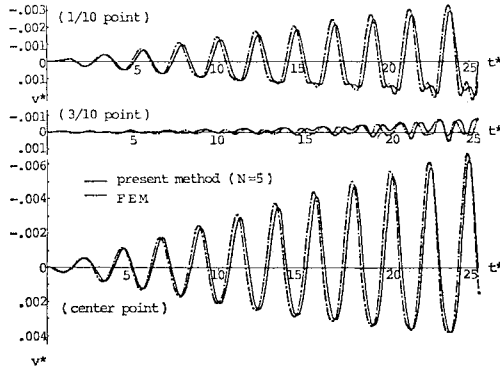


図-3 有限要素法との比較 ($\gamma=0.1, F^*=0.1$)

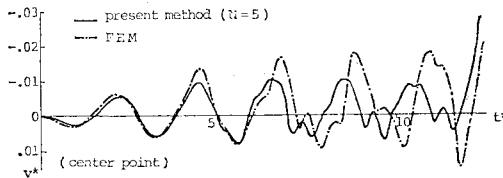


図-4 有限要素法との比較 ($\gamma=0.1, F^*=1.0$)

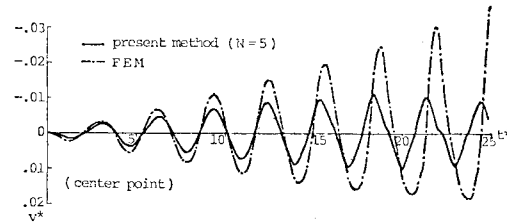


図-5 有限要素法との比較 ($\gamma=0.69$)

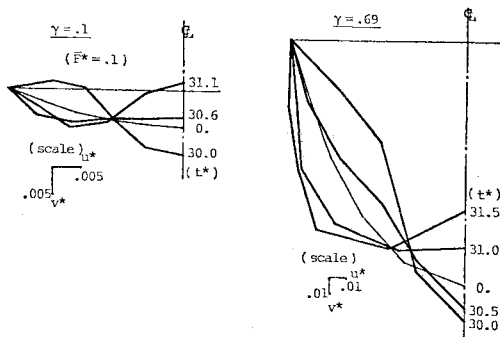


図-6 非線形応答モード (有限要素法)

また、図-5はサグ比が0.69の場合の同様の応答比較であるが、サグ比が0.1の場合に追いついた非線形性、つまり正負の応答振幅の大きさが異なるという特性が、変位が大きいかもあって追えていない。これは $\gamma=0.1$ の場合の応答モードが振動中にほとんど変化していないのに対し、 $\gamma=0.69$ の場合にその有意な変化が認められ(図-6)、非線形応答の変形パターンが線形系のそれから離れたためであると考えられる。

このように、本解析法は弱非線形問題に適用した場合に十分な精度の解が得られるものの、非線形性が強くなるとともに誤差が大きくなる。

4. ケーブルの非線形時間応答特性

3.で論じた解析法を用いて数値実験を行い、ケーブルの非線形時間応答特性を調べる。任意外力に対して応答解析が可能であるが、ケーブルの基本的な動特性を扱うものとし、外力は初期状態での低次固有振動数に等しい振動数を有する正弦波外力を考えた。

ケーブルの3次元線形自由振動特性³⁾からして、ケーブルの時間応答は面内振動の対称モード、逆対称モード、および面外振動でその性質を異にするであろうことが考えられる。そこで外力としては面内対称加振(中央点集中載荷)、面内逆対称加振(3/10・l点集中載荷)、面外加振(等分布載荷)を考え、代表的な応答例を示して考察を加えることにする。

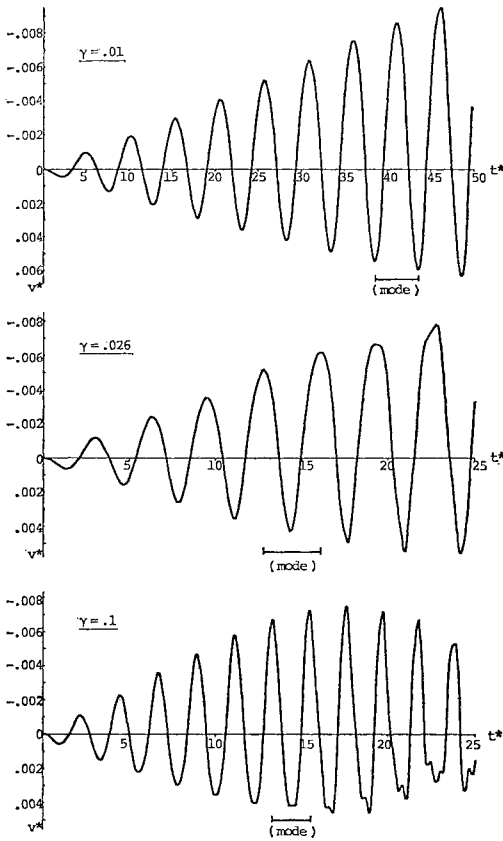
また、ケーブルの動特性を支配するパラメーターとしては、形状パラメーターとしてのサグ比 γ 、支点間傾斜角 θ と材料パラメーターとしての伝播速度比 k があるが、線形自由振動特性等からサグ比が最も支配的なパラメーターであると考えられる³⁾。そこで本論文ではいくつかのサグ比についての計算例を示し、比較考察するが、前述の解の精度上の問題もあって、ケーブルの実用範囲と考えられる $\gamma=0.1$ 以下のサグ比を対象とした。

なお、計算は $N=\bar{N}=5$ としており、結果は式(6)で定義される無次元時間 t^* 、およびスパン長 l で無次元化された動変位 $u^*(=u/l)$ 等を用いて示してある。また、 $\theta=0^\circ, k^2=900$ であり、減衰は考慮していない。

(1) 面内外力によるケーブルの時間応答

a) 面内対称振動

初期状態での面内対称1次固有振動数と同じ振動数をもつ正弦波外力を、ケーブル中央点に集中載荷したときの時間応答を示したものが図-7であり、ケーブル中央点での無次元鉛直変位 v^* の時間応答を、サグ比 $\gamma=0.01, 0.026, 0.1$ の場合について示してある。これをみるとどのサグ比の場合も鉛直下方向(正)の変位に比べ



図一七 面内外力によるケーブル中央点の時間応答 (対称加振)

て上方向(負)の変位の方が大きくなっており、面内対称変形の場合にサグを有するケーブルの幾何剛性が運動方向によって異なることを示している。つまり、サグを有するケーブルが振動するとき、全体的には、静止位置から下方に向かう場合には剛性が増加し、いわゆる hardening⁷⁾ が生じ、上方に向かう場合には剛性が減少する softening⁷⁾ が起こる傾向のあることを表わしているといえる。

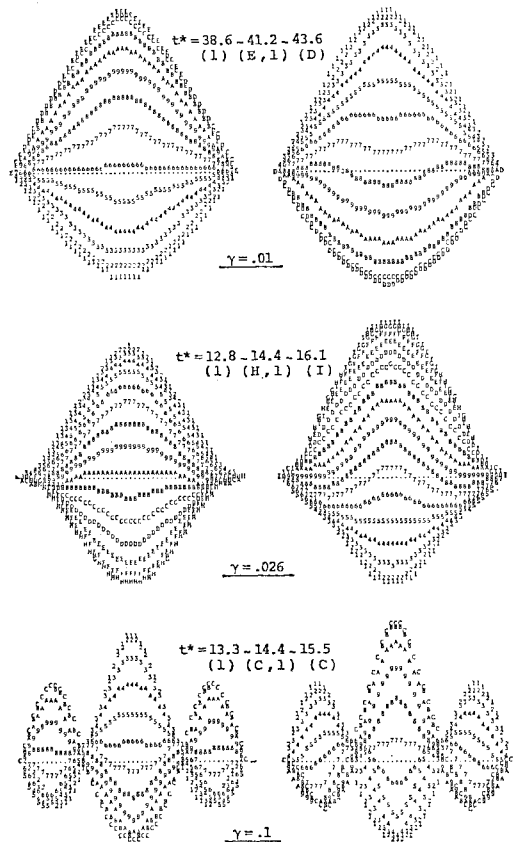
時間応答の1周期中に hardening と softening が混在するため、全体的な応答周期は、変位が大きく、非線形性が強くなっても外力周期とあまり変わらず、変位が増大し続けている。ただし、サグ比の大きな $r=0.1$ の例では、変位が大きくなるにつれて高次振動成分が顕著になり、応答波形が崩れて、それ以後、変位が減少する方向に向かっている。これは、サグ比の大きなケーブルほど、下方に変位したときの全体的な hardening の度合が大きくなることによるといえる。

高次振動成分が顕著になり、応答波形が乱れ始めるときの変位の大きさは、サグ比が小さいほど大きく、 $r=0.01$ の例では波形の乱れがほとんど認められない。ま

たその位置は、 $r=0.1$ の場合に最下点付近であるのに対し、 $r=0.026$ では最上点付近である。そのことと関連して、 $r=0.1$ の応答波形において最上点での曲率が小さく、最下点で大きくなっているのに対し、 $r=0.026$ では逆に最下点での曲率が小さくなっている。さらに小さなサグ比 $r=0.01$ の例ではその差ははっきりしていない。

このようなサグ比による差異は固有振動特性からくるもので、対称1次固有振動数と逆対称1次固有振動数とが一致する $r=0.026$ を中心に固有モードが大きく変化するというモード遷移現象⁹⁾ が非線形特性に反映されているといえる。つまり、ケーブル中央点の応答に対する局所的な hardening と softening の効果が応答モードと関連して現われるため、サグ比によって波形に差異が生ずるということである。

図一7 に示した各サグ比に対する時間応答で、その代表的な応答モードを示したものが図一8 である。図には、波形に乱れがなく、しかも非線形性が明確であるような時間応答1周期(図一7 の“mode”)を、半周期に分けて英数字で示した。時間の進行に対し、1, 2, 3, ..., 9, A, B, C, ... と続く応答モードの変化を示している。



図一八 非線形応答モード (面内対称加振)

これを見ると固有モードそのものの違いもあるが、非線形性による応答モードの変化が、各時刻により、またサグ比によって異なっており、ケーブル中央点の時間応答波形の差異が理解できよう。たとえば、応答波形の端部で曲率が小さく尖った波形を示しているときの応答モードは、 $r=0.026$ の場合は後半周期（右側）の“1”であり、 $r=0.1$ の場合は前半周期（左側）の“1”であって、それらはともに固定端近傍で変形が大きくなっており、局所的に hardening が強まっていると理解できる。

また、どのサグ比の場合にも、ケーブル中央点の上昇時半周期と下降時半周期とでその応答モード変化がかなり異なっていることは興味深い。これはサグを有するケーブルの剛性が、面内対称変形をする場合に方向性を有することから生ずる非線形特性といえる。

b) 面内逆対称振動

面内逆対称モードに対応する固有振動数は本論文で対象とするサグ比の範囲ではほとんど変化しない³⁾ことから、弱非線形応答においてもサグ比による有意な差はないと思われる。そこで、計算例としてはサグ比 $r=0.1$ の場合のみを 図-9 に示す。荷重は逆対称 1 次固有振動数と同じ振動数を有する正弦波外力を $3/10 \cdot l$ 点に集中

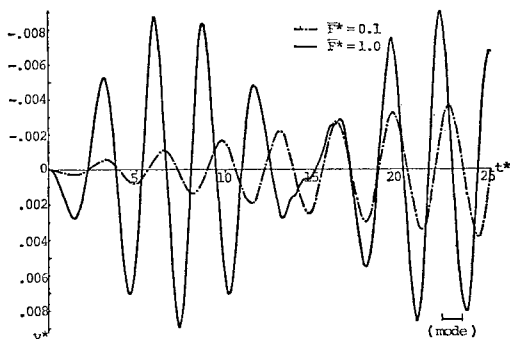


図-9 面内外力によるケーブル $3/10 \cdot l$ 点の時間応答 (逆対称加振)

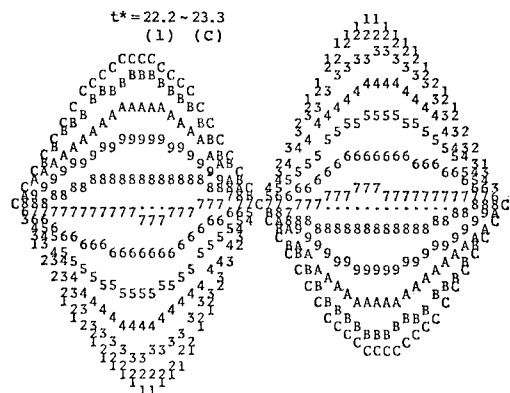


図-10 非線形応答モード (面内逆対称加振)

載荷しており、2種の外力振幅 $F^*=0.1, 1.0$ に対する時間応答を図に示した。

これを見ると、外力の大きい $F^*=1.0$ の場合に、変位が大きくなるとともに応答周期が短くなり、うなりを生じている。これは hardening だけを伴う、いわゆる硬化型ばねを有する非線形振動系に特有の現象である。したがって、サグを有するケーブルでも逆対称振動の場合には、対称振動で認められた方向性が存在せず、上下どちらに変位しても剛性が増加し、hardening のみが起こることになる。

また、このときの応答モードの一例を 図-10 に示したが、変位が大きく、非線形性が強くとともに応答モードは固有モードによく似ている。このことと線形自由振動の場合の面内逆対称モードが張力変化を伴わない振動である³⁾ということを考え合わせれば、上述の現象が理解されよう。つまり、線形系で張力変化のない逆対称モードで振動し、振幅が増大すれば、張力が増加することは明らかであり、それによって hardening だけが起こると理解できる。

(2) 面外外力によるケーブルの時間応答

連続体としてのケーブルの運動方程式 (1・a~c) において面内運動の支配方程式 (1・a, b) にのみ着目すれば、 $(\partial w / \partial s_e)^2 x_e'$, $(\partial w / \partial s_e)^2 y_e'$ という項、つまり面外変位 w については 2 次の非線形項であるが面内変位 u, v については 0 次の項が存在している。したがって面外運動 w が存在すれば、この項が面内 2 方向に付加的な外力として作用することになり、面外運動と面内運動とが必ず連成する。しかも、この付加的な外力項が面外変位の 2 次項であるため、面外変位が振動数 ω で変動する場合には静的な外力、および 2ω の振動数を有する動的な外力が面内方向に作用することになり、 2ω が面内固有振動数に一致し、しかも面内、面外の固有モードが似ている場合に面内運動の共振を引き起こすことになる。一方、ケーブルの 3 次元線形自由振動特性として、面内の対称 1 次固有振動数と逆対称 1 次固有振動数とが一致するケーブルでは、面内対称 1 次の固有振動数が面外対称 1 次の固有振動数の 2 倍となり、しかもモード形にあまり差異がないことがわかっている³⁾。したがって、この場合に相当する $r=0.026$ 近くのサグ比を有するケーブルでは、面外外力による面内共振の可能性があると見える。

以上の考察に基づき、 $r=0.026$ のケーブルを中心に、面外対称 1 次固有振動数と同じ振動数の分布正弦波外力を面外方向に作用させた場合の応答計算を行った。ケーブル中央点の変位応答を 図-11 に、また、その点のケーブル軸直角面内におけるリサージュを 図-12 に示す。

図-11 をみると、面外変位と同程度に面内変位が生じているのは $r=0.026$ の場合だけであるが、それに近い $r=0.02, 0.03, 0.04$ の場合にも有意な面内変位が生じている。それに対し、 $r=0.01, 0.1$ の場合には面内変位は生じているものの、面外変位に比較すれば大変に小さく、無視できるものといえる。このことはリサージュ

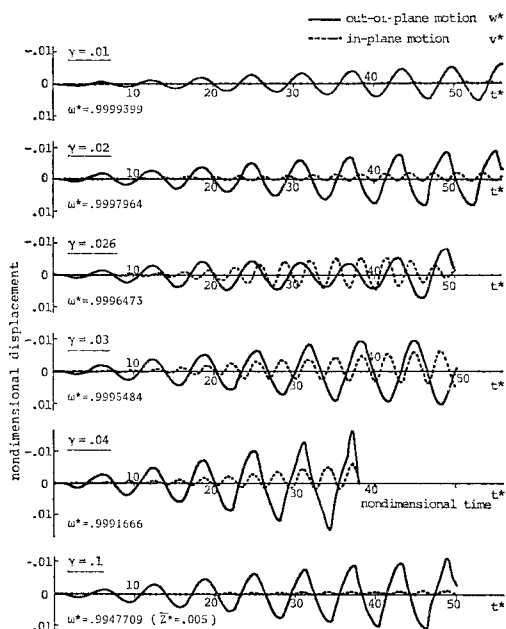


図-11 面外外力によるケーブル中央点の時間応答

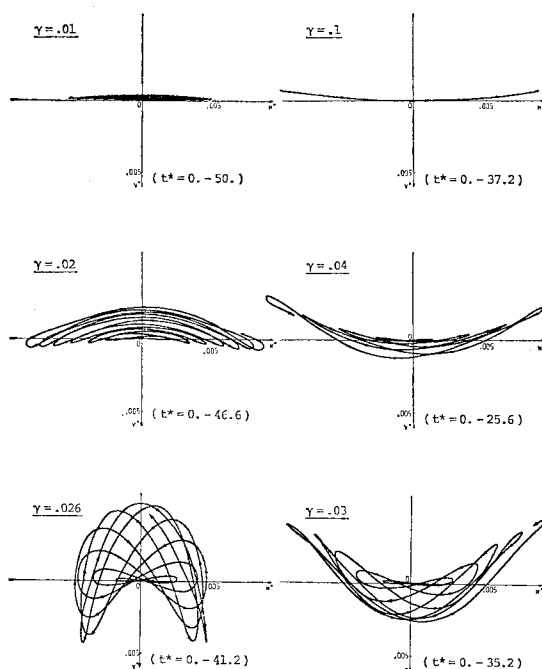


図-12 面外外力によるケーブル中央点のリサージュ図

(図-12) をみればいっそう、明らかとなる。したがって、面外外力によるケーブルの応答を考える場合、上述の $r=0.026$ というようなサグ比に近いサグを有するケーブルでは面内運動も考慮する必要があるといえる。

また、図-12 において、 $r=0.026$ を境にリサージュの形状が変化していることは興味深い。これは面外応答波形と面内応答波形との位相差の差異によるもので、やはりサグを有するケーブル固有の動特性といえる。

さらに、図-13 には応答モードの例を示したが、面内モードが上方に偏っており、ケーブルの端部では上方方向に変位しているだけでほとんど振動していないことがわかる。これは最初に考察したように、面外周期運動によって面内方向の静的付加外力が作用することを意味している。また面外応答モードに着目すれば、 $r=0.02$ の場合に、最大変位位置から中心にもどるときにケーブル中央部が先行している。これは、図-11 の時間応答で波形が鋸歯状波に似た形となっているところに相当する。他のサグ比の場合でも変位が大きくなって非線形性が強まると同様の現象が現われており、面内非線形応答とは異なった面外応答固有の非線形特性といえる。

(3) 時間応答特性に関するまとめ

サグのない弦の場合、対称、逆対称によらず、変位が生ずれば必ず張力が増大し、いわゆる hardening が起こるが、サグをもつケーブルでは、逆対称振動の場合に方向性をもたずに hardening のみ起こるのに対し、対称振動の場合では上下に方向性もち、hardening と softening が混在するといった、まったく異なる性質を呈する。また、同じく方向性をもたない面外運動の場合

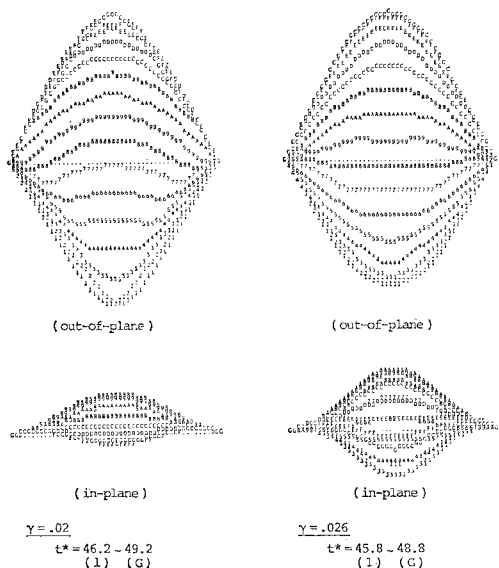


図-13 非線形応答モード (面外加振)

でも面内逆対称振動とは違った非線形挙動を示す。その他、ケーブルの非線形時間応答特性につき、面内対称、逆対称、面外の各振動に分けて考察を加えたが、それらの特性は総じて、ケーブルがサグを有するがための特性であり、サグ比が最も重要なパラメーターの1つであることが確認できたといえる。特に、面外外力が作用する場合に、面内運動の無視し得ないような応答を生ずるサグ比が、ある範囲をもって存在し、比較的小さな変位に対しても3次元解析の必要性があることには注意を要する。

5. 結 論

任意外力を受けるケーブルの時間応答解析法として、初期状態での基準座標を一般化変位とした運動方程式を直接積分する方法を提案し、弱非線形問題に適用した場合の有用性を示した。

また、この解析法を用いて数値実験を行い、正弦波外力によるケーブルの時間応答計算例から基本的時間応答特性を調べた。その結果、次のようなことが明らかにされた。

(1) サグを有するケーブルでは、面内対称振動、面内逆対称振動、および面外振動によってその非線形時間応答特性を大いに異にする。

(2) 上記の各振動においても、その非線形特性はサグ比によって異なる。

(3) 面外外力によって有意な面内運動が励起されるという連成応答が、あるサグ比の範囲で存在する。そのような場合には、変位が小さくとも3次元解析の必要がある。

補遺 Galerkin 法による積分項

$$m_i^* = \frac{\pi^2 \cos \theta}{8 \gamma^*} \int_0^{\sigma_1} (\xi_i'^2 + \eta_i'^2) d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

$$m_{\bar{i}}^* = \frac{\pi^2 \cos \theta}{8 \gamma^*} \int_0^{\sigma_1} \zeta_{\bar{i}}'^2 d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

$$k_{ij}^* = \int_0^{\sigma_1} \left\{ \left(\frac{1}{x_e^{*'} } + k^2 x_e^{*'} \right) \xi_j' \right. \\ \left. + k^2 x_e^{*'} y_e^{*'} \eta_j' \right\} \xi_i' d\sigma \\ + \int_0^{\sigma_1} \left\{ \left(\frac{1}{x_e^{*'} } + k^2 x_e^{*'} \right) \eta_j' \right. \\ \left. + k^2 x_e^{*'} y_e^{*'} \xi_j' \right\} \eta_i' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 3)$$

$$k_{ijn}^* = \int_0^{\sigma_1} \left(\frac{3}{2} x_e^{*'} \xi_j' \xi_n' + y_e^{*'} \eta_j' \xi_n' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x_e^{*'} \eta_j' \eta_n' \right) \xi_i' d\sigma \\ + \int_0^{\sigma_1} \left(\frac{1}{2} y_e^{*'} \xi_j' \xi_n' + x_e^{*'} \xi_j' \eta_n' \right. \\ \left. + \frac{3}{2} y_e^{*'} \eta_j' \eta_n' \right) \eta_i' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

$$k_{ijnm}^* = \int_0^{\sigma_1} (\xi_n' \xi_m' + \eta_n' \eta_m') (\xi_j' \xi_i' + \eta_j' \eta_i') d\sigma \\ \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

$$k_{ij\bar{n}\bar{m}}^* = \int_0^{\sigma_1} (\xi_j' \xi_i' + \eta_j' \eta_i') \zeta_{\bar{n}}' \zeta_{\bar{m}}' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

$$k_{i\bar{j}\bar{n}}^* = \int_0^{\sigma_1} (x_e^{*'} \xi_i' + y_e^{*'} \eta_i') \zeta_{\bar{j}}' \zeta_{\bar{n}}' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 7)$$

$$k_{i\bar{j}}^* = \int_0^{\sigma_1} \frac{1}{x_e^{*'} } \zeta_{\bar{j}}' \zeta_{\bar{i}}' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 8)$$

$$k_{i\bar{j}\bar{n}}^* = \int_0^{\sigma_1} (x_e^{*'} \xi_n' + y_e^{*'} \eta_n') \zeta_{\bar{j}}' \zeta_{\bar{i}}' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 9)$$

$$k_{i\bar{j}\bar{n}m}^* = \int_0^{\sigma_1} (\xi_n' \xi_m' + \eta_n' \eta_m') \zeta_{\bar{j}}' \zeta_{\bar{i}}' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 10)$$

$$k_{i\bar{j}\bar{n}\bar{m}}^* = \int_0^{\sigma_1} \zeta_{\bar{n}}' \zeta_{\bar{m}}' \zeta_{\bar{j}}' \zeta_{\bar{i}}' d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 11)$$

$$f_i^* = \int_0^{\sigma_1} (X^* \xi_i + Y^* \eta_i) d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 12)$$

$$f_{\bar{i}}^* = \int_0^{\sigma_1} Z^* \zeta_{\bar{i}} d\sigma \dots\dots\dots (A \cdot 13)$$

ここで、 x_e^* 、 y_e^* はスパン長 l で無次元化された初期位置、 σ は l で無次元化された曲線座標、 σ_1 は無次元ケーブル長である。

参 考 文 献

- 1) Henghold, W.M. and J.J. Russell : Equilibrium and natural frequencies of cable structures, Computers & Structures, Vol. 6, pp. 267~271, 1976.
- 2) Ma, David, J. Leonard and K.H. Chu : Slack-elastoplastic dynamics of cable systems, Proc. of ASCE, Vol. 105, No. EM 2, pp. 207~222, Apr., 1979.
- 3) 山口宏樹・伊藤 学 : 単一ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文報告集, 第286号, 1979年6月.
- 4) Argyris, J.H., P.C. Dunne and T. Angelopoulos : Non-linear oscillations using the finite element technique, Comp. Methods in Appl. Mech. Engng., Vol. 2, pp. 203~250, 1973.
- 5) たとえば, Adeli, H., J.M. Gere and W. Weaver, Jr. : Algorithms for nonlinear structural dynamics, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST 2, pp. 263~280, Feb., 1978.
- 6) Clough, R.W. and J. Penzien : DYNAMICS OF STRUCTURES, McGraw-Hill, 1975.
- 7) Nayfeh, A.H. and D.T. Mook : NONLINEAR OSCILLATIONS, John Wiley & Sons, 1979.

(1980.3.10・受付)