

球殻の等温弾性問題ならびに熱応力 問題の一解法について

ON A METHOD SOLVING ISOTHERMAL ELASTIC PROBLEMS AND
THERMAL STRESS PROBLEMS OF A HOLLOW SPHERE

奥 村 勇*

By Isamu OKUMURA

1. 緒 言

球殻の非軸対称問題は、応用数学あるいは工学の分野における興味ある課題として、前世紀の中期から、多くの研究者によって取り上げられ、さまざまな視点より、いろいろな接近が試みられ、多くの解法が見受けられる。しかしながら、それらに見受けられる解法は、数学的興味に偏したため、非常に煩雑であり、工学的な実際目的に適した解法とはいいがたく、簡明でしかも数値計算に適した解法は、現時点でもあまり見当たらないようであり、また、非軸対称問題としての球殻の熱応力問題に関する研究も見当たらないようである。

等温弾性問題としての球殻の非軸対称問題の研究は、Lamé¹⁾にはじまるようである。Lamé¹⁾は、球座標系で表わされたつり合い方程式より直接変位成分を求め、球殻の表面で応力が規定された問題を解いているが、変位成分を求めるまでの過程は非常に複雑であり、論文の大半の部分をそのために当てている。その後、Thomson²⁾は、直角座標系におけるつり合い方程式より直接変位成分を求め、球座標系に変換して解を求めているが、先に境界条件が規定されなければ、変位および応力成分の陽な表現が得られない解法である。そのため、境界条件として変位が規定された場合と応力が規定された場合とでは、解の表現が異なっており、後者の場合が前者の場合に比較して煩雑となっている。続いて、Somigliana³⁾、Chree⁴⁾ および Cerruti⁵⁾らの研究が見受けられる。Chree⁴⁾の解法は、球座標系で表わされたつり合い方程式より直接変位成分を求める方法であるが、Thomson²⁾の解法に類似したところがあり、先に境界条件が規定されなければ変位成分の陽な表現が得られない解法である。中実球の表面において、境界条件として、半径方向の変位成分のみ、あるいは、半径方向の応力成分のみが

値をもち、他の2つの成分が0の場合に関してのみ変位成分の陽な表現が得られている。

今世紀の初頭には、Tedone⁶⁾の研究、また、中期には、Fichera⁷⁾、Aquaro⁸⁾ および Sternberg ら⁹⁾の研究が見受けられる。Tedone⁶⁾は、Green 関数および球調和関数を用いて直角座標系で解を求めており、形式的には変位成分の陽な表現が得られているが、Thomson²⁾の解法と同様の性質を有している。Fichera⁷⁾の研究は、軸対称問題に属するが、Legendre 変換により、つり合い方程式より直接変位成分を陽な表現で求め、表面において応力が規定された球殻の問題を厳密に解いている。Aquaro⁸⁾の解法は、Fichera⁷⁾の解法を非軸対称問題に拡張したものであるが、逆変換ができておらず、変位成分の陽な表現は得られていない。Sternberg ら⁹⁾の研究も軸対称問題に属するが、変位ポテンシャルを導入した解法として特徴があるように思われる。その研究においては、直角座標系における Boussinesq の第1および第3基本解を球座標系に変換して変位および応力成分の陽な表現を求めているが、2つの基本解から変位および応力成分を求めた後、2つの解の1次結合を作って独立な新しい解を求めて使用している。このような、最初の基本解からさらに別な解を求めて用いる方法は、巧妙な方法ではあるが、弾性論的にみれば、少々煩雑なようにも思われる。

その後、軸対称問題に関しては、Lur'e¹⁰⁾あるいは Little¹¹⁾の著書に詳述されているように、完全球殻の等温弾性問題については、理論的にほぼ解決されているように思われる。これらの著書においては、Papkovitch-Neuber の解を球座標系における解として取り扱い、変位ポテンシャルも球座標系における成分として求め、解の独立性に検討を加えて、ベクトルポテンシャルに含まれる2つの項のうち1つの項を落として使用している。

一方、非軸対称問題に関する研究は、今世紀の中期以降あまり見受けられなくなったようである。1世紀にわ

* 正会員 工修 北見工業大学助教授 工学部土木工学科

たつて興盛をきわめてきた研究がなぜ急に行われなくなったのか、その原因は明確ではないが、数学的興味と工学的な実際面での興味との間に1つの切れ目があったように思われる。Lur'e¹⁾は、非軸対称問題に関しても述べているが、その解法は、本質的には Thomson²⁾の解法に従うものであり、Thomson²⁾の解法と同種の性質を有している。また、直角座標系における Boussinesq の第1, 第2, および第3基本解を球座標系に変換した解¹²⁾を用いる解法においては、厳密な級数解は得られず境界条件を満たすために、境界条件に関係した応力あるいは変位成分を球面調和関数に展開することが必要となり、数学的困難さ、あるいは数値計算上の困難さなどがあると考えられる。

以上述べた既往の研究は、球殻の等温弾性問題に関するものであり、非軸対称問題としての球殻の熱応力問題に関する研究はあまり見当たらないようである。

本報告は、球殻の非軸対称問題を解析する際に有用と思われる1つの解を提示し、それに基づいて、非軸対称問題としての球殻の等温弾性問題ならびに熱応力問題の解法について述べたものである。また、球殻の膜理論がどの程度の肉厚をもった球殻に正確に適用できるのかという検討は、非軸対称問題についてはあまりなされていないようであるので、数値計算例を示して検討した。本報告においては、解を最初より球座標系における解として取り扱い、変位ポテンシャルを球座標系における微分方程式より直接求める方法を採用している。解法における特徴は以下のとおりである。

(1) 変位ポテンシャルの導出が容易であり、変位および応力成分が、変位ポテンシャルを媒介して、簡単な数学的取り扱いにより得られている。

(2) 等温弾性問題の解は、温度に関する特殊解を付加することにより、熱応力問題の解析に発展しやすい形で求められている。

(3) 変位および応力成分は、陽な表現で求められており、応力あるいは変位で規定された境界条件に応じて厳密な級数解が得られる形で求められている。

(4) 軸対称問題の解を、その解の特別な場合として包含している。

(5) 数値計算が容易な形で解が求められている。

2. ひずみ・応力成分およびつり合い方程式

球座標系 (r, θ, φ) におけるひずみ成分は、 r, θ および φ 方向の変位成分をそれぞれ u_r, u_θ および u_φ で表わすと次式となる¹³⁾。

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

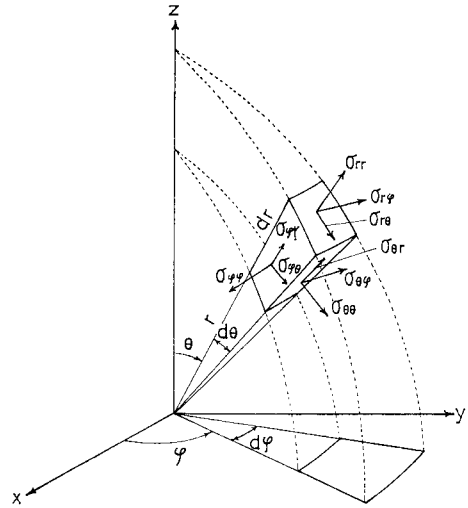


図-1 座標系および応力成分

$$\left. \begin{aligned} e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{r} u_\theta + \frac{u_r}{r} \\ e_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right\} \\ e_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial (u_\varphi \operatorname{cosec} \theta)}{\partial \theta} \right\} \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

応力成分とひずみ成分との関係は、応力成分を 図-1 に示したように表わし、温度を T で表わすと次式のようにである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left(e_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2G \left(e_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \left(e_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \sigma_{r\varphi} &= 2G e_{r\varphi} \\ \sigma_{\theta\varphi} &= 2G e_{\theta\varphi} \\ \sigma_{r\theta} &= 2G e_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 G, E, ν および α は、それぞれ、せん断弾性係数、縦弾性係数、ポアソン比および線膨張係数を表わすものとする。また、 e は体積ひずみを表わし、次式である。

$$e = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\varphi\varphi}$$

また、応力成分で表わされたつり合い方程式は、物体力がない場合には、次式のようにである¹³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} \\ - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3 \sigma_{r\theta} \\ + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3 \sigma_{r\varphi} \\ + 2 \sigma_{\theta\varphi} \cot \theta) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_\theta = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \int \lambda_\varphi d\varphi \right) \\ \nu^2 \lambda_\varphi - \frac{\lambda_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} (2 \sin^2 \theta - 1) - \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda_\varphi}{\partial r} \\ + \frac{2 \cot \theta}{r^2} \frac{\partial \lambda_\varphi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7.1)$$

式 (3) は、式 (1) および式 (2) を用いて変位成分で表わすこともでき、ベクトル形式で表わすと次式となる。

$$\nu^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \text{grad } T = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} = [u_r, u_\theta, u_\varphi] \\ \nu^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$

3. つり合い方程式の解

式 (4) の変位ベクトルで表わされたつり合い方程式の解として、本報告においては、座標系を球座標系に限定して次式を用いる。

第 1 基本解：

$$2 G \mathbf{u}^1 = 2 G [u_r^1, u_\theta^1, u_\varphi^1] = \text{grad } \phi \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$\nu^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (5.1)$$

第 2 基本解：

$$\begin{aligned} 2 G \mathbf{u}^2 &= 2 G [u_r^2, u_\theta^2, u_\varphi^2] = 2 \text{rot } \boldsymbol{\vartheta} \\ &= 2 \text{rot} [\vartheta_r, \vartheta_\theta, \vartheta_\varphi] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= -\sin \theta \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \int \vartheta_\varphi d\varphi \\ \vartheta_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \int \vartheta_\varphi d\varphi \right) \\ \nu^2 \vartheta_\varphi - \frac{\vartheta_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} (2 \sin^2 \theta - 1) - \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial r} \\ &+ \frac{2 \cot \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.1)$$

第 3 基本解：

$$\begin{aligned} 2 G \mathbf{u}^3 &= 2 G [u_r^3, u_\theta^3, u_\varphi^3] \\ &= \text{grad} (\mathbf{r} \lambda) - 4(1-\nu) \lambda \\ &= \text{grad} (r \lambda_r) - 4(1-\nu) [\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\varphi] \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r &= -\sin \theta \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \int \lambda_\varphi d\varphi \end{aligned} \right\}$$

特殊解：

$$2 G \mathbf{u}^p = 2 G [u_r^p, u_\theta^p, u_\varphi^p] = \text{grad } \chi \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$\nu^2 \chi = \frac{\alpha E}{1-\nu} T \dots\dots\dots (8.1)$$

式 (5) から式 (7) の 3 つの解は、等温弾性問題に関する解であり、その 3 つの解を形式的に加えた解は、一般化された Boussinesq の解¹²⁾と同等である。第 1 基本解は回転のない変位、第 2 基本解は体積変化のない変位および第 3 基本解は回転も体積変化もある変位をそれぞれ表わしているが、調和ベクトル $\boldsymbol{\vartheta}$ および $\boldsymbol{\lambda}$ の成分の間に式 (6.1) あるいは式 (7.1) の関係を課している点に一般化された Boussinesq の解との相違がある。一般化された Boussinesq の解を球座標系に適用した場合には、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\lambda}$ および $\boldsymbol{\vartheta}$ の成分を求めるために、おのおの 3 元連立偏微分方程式を解き、さらに得られた数学的解について、弾性論的観点より解の独立性の検討を必要とし、非常に煩雑な作業を伴うが、ベクトルポテンシャルの成分の間に課した式 (6.1) あるいは式 (7.1) の関係式は、変位ポテンシャルの導出を非常に容易ならしめ、さらに、得られた解の独立性の検討を不要にし、以下の解法をきわめて簡明にする 1 つの有用な関係式であり、本報告の解法における 1 つの大きな特徴である。解の形式よりして、 $\boldsymbol{\vartheta}$ および $\boldsymbol{\lambda}$ が調和ベクトルであるという条件はもちろん必要であるが、式 (6.1) あるいは式 (7.1) がその条件を満足していることは当然ではあるが確認してある。

式 (8) の特殊解の χ は熱弾性変位ポテンシャルとよばれるもので、熱応力問題には必要な解である。求める解は、式 (5) から式 (8) の 4 つの解を加えたものであり、次式で表わされる。

$$2 G \mathbf{u} = 2 G (\mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3 + \mathbf{u}^p) \dots\dots\dots (9)$$

式 (5) から式 (8) に含まれる勾配および回転をそれぞれ微分係数で表わすと次式となる。

第 1 基本解：

$$\left. \begin{aligned} 2 G u_r^1 &= \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad 2 G u_\theta^1 = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ 2 G u_\varphi^1 &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

第 2 基本解：

$$2 G u_r^2 = \frac{2}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (\vartheta_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \varphi} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_{\theta}^2 &= \frac{2}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r\vartheta_{\varphi})}{\partial r} \right\} \\ 2Gu_{\varphi}^2 &= \frac{2}{r} \left\{ \frac{\partial(r\vartheta_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

第3基本解：

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r^3 &= \frac{\partial}{\partial r}(r\lambda_r) - 4(1-\nu)\lambda_r \\ 2Gu_{\theta}^3 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(r\lambda_r) - 4(1-\nu)\lambda_{\theta} \\ 2Gu_{\varphi}^3 &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\lambda_r) - 4(1-\nu)\lambda_{\varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

特殊解：

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r^{\rho} &= \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad 2Gu_{\theta}^{\rho} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ 2Gu_{\varphi}^{\rho} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

4. 変位ポテンシャル

式(5.1)から式(8.1)を解き、変位ポテンシャルを求めると、式(10)から式(13)により、変位成分の陽な表現が得られることになる。スカラーポテンシャル ϕ は、式(5.1)に示されているように球調和関数であり、変数分離の方法で容易に求めることができる。式(6.1)の第3式より φ_{θ} が求められれば、第1および第2式よりそれぞれ ϑ_r および ϑ_{θ} が求められ、同様に、式(7.1)の第3式より λ_{φ} が求められれば、 λ_r および λ_{θ} もそれぞれ第1および第2式より求めることができる。式(6.1)の第3式と式(7.1)の第3式とは同じ微分方程式であるので、解を選択して φ_{θ} および λ_{φ} に割り当てればよいことになる。それを付録で簡単に述べることにし、式(5)から式(7)の変位ポテンシャルを一括して示せば次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi \cdot A_{nm} P_n^m(\mu) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{r^{n+1}} \cos m\varphi \cdot P_n^m(\mu) \dots\dots\dots(14) \\ \vartheta_r &= - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \sin m\varphi \cdot (n+1) L_{nm} P_n^m(\mu) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n M_{nm}}{r^n} \sin m\varphi \cdot P_n^m(\mu) \\ \vartheta_{\theta} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \sin m\varphi \cdot L_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{r^n} \sin m\varphi \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ \vartheta_{\varphi} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \cos m\varphi \cdot L_{nm} \frac{m P_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{r^n} \cos m\varphi \cdot \frac{m P_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \cos m\varphi \cdot (n+1) E_{nm} P_n^m(\mu) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n C_{nm}}{r^n} \cos m\varphi \cdot P_n^m(\mu) \\ \lambda_{\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \cos m\varphi \cdot E_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^n} \cos m\varphi \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ \lambda_{\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \sin m\varphi \cdot E_{nm} \frac{m P_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^n} \sin m\varphi \cdot \frac{m P_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \cos \theta \\ P_n^m(\mu) &= (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

上式の $P_n(\mu)$ は次数 n のLegendreの多項式であり、 n は0または正の整数とする。 A_{nm} 、 \dots 、 C_{nm} は境界条件によって定まる未知定数である。

式(14)から式(16)において、 r^n あるいは r^{n+1} がかかっている解が内部問題の解、また、 r^{-n-1} あるいは、 r^{-n} がかかっている解が外部問題の解である。中実球の問題は内部問題の解のみでよく、また、無限体中の球かの問題は外部問題の解のみで解析できるが、球殻の問題においては、両者の解がともに必要となる。式(14)の内部問題の解が $n \geq 2$ となっているのは、 $n=0$ および $n=1$ のときには、すべての応力成分が0となり、 $n=1$ 、 $m=0$ の場合には z 方向に、 $n=1$ 、 $m=1$ の場合には x 方向に一樣な変位を生ずる場合となるので除外したためである。式(15)の内部問題の解が $n \geq 2$ となっているのは、 $n=1$ 、 $m=0$ のときには、すべての変位および応力成分が0となり、 $n=1$ 、 $m=1$ のときには、すべての応力成分が0で、 y 軸まわりに一樣な回転変位を生ずる場合となるので除外したためである。また、外部問題の解が $n \geq 1$ となっているのは、 $n=0$ のときには、すべての変位および応力成分が0となるためである。式(16)の外部問題の解が $n \geq 1$ となっているのは、 $n=0$ のときには、すべての変位および応力成分が0となるためである。

特殊解の変位ポテンシャル χ を求めるためには、式(8.1)に示されているように、球殻内の温度 T をあらかじめ知る必要がある。温度を T 、時刻を t および温度伝導率を κ としたときの熱伝導の微分方程式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

定常状態を考えることにすると、温度 T は時刻 t に關して一定となるので、上式は、

$$F^2 T = 0 \dots\dots\dots(18)$$

となる。したがって、 T は球調和関数となり、次式で表わされる。

$$T(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\bar{B}_{nm} r^n + \frac{\bar{S}_{nm}}{r^{n+1}} \right) \cdot P_n^m(\mu) \cos m\varphi \dots\dots\dots(19)$$

上式において、 \bar{B}_{nm} および \bar{S}_{nm} は球殻の表面において規定された温度によって求められる未知定数である。上式を式 (8・1) の右辺に代入し、余関数は第 1 基本解と独立でないのを除外し、 χ として特殊積分のみを求めれば次式となる。

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(B_{nm} r^{n+2} + \frac{S_{nm}}{r^{n-1}} \right) P_n^m(\mu) \cos m\varphi \dots\dots\dots(20)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} B_{nm} &= \frac{1}{2(2n+3)} \cdot \frac{\alpha E}{1-\nu} \bar{B}_{nm} \\ S_{nm} &= -\frac{1}{2(2n-1)} \cdot \frac{\alpha E}{1-\nu} \bar{S}_{nm} \end{aligned} \right\} \dots\dots(20 \cdot 1)$$

等温弾性問題としての軸対称問題の変位ポテンシャルは、式 (14) および式 (16) において、単に $m=0$ と置けばよく、その結果が Lur'e⁽⁹⁾ の著書に見受けられる変位ポテンシャルに一致していることは確かである。

5. 変位および応力成分の表現

式 (14) から式 (16) および式 (20) に示した変位ポテンシャルをそれぞれ式 (10) から式 (13) に代入すれば、変位成分の表現が次式のように得られる。

第 1 基本解：

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r^1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-1} \cos m\varphi \cdot n A_{nm} P_n^m(\mu) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{r^{n+2}} \cos m\varphi \\ &\quad \cdot (n+1) P_n^m(\mu) - \frac{D_{00}}{r^2} \\ 2Gu_{\theta}^1 &= - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-1} \cos m\varphi \cdot A_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{r^{n+2}} \cos m\varphi \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ 2Gu_{\varphi}^1 &= - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-1} \sin m\varphi \cdot A_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{r^{n+2}} \sin m\varphi \cdot \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

第 2 基本解：

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r^2 &= 0 \\ 2Gu_{\theta}^2 &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi \cdot (2n+3) L_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{r^{n+1}} \cos m\varphi \cdot (2n-1) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_{\varphi}^2 &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \sin m\varphi \cdot (2n+3) \\ &\quad \cdot L_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{r^{n+1}} \\ &\quad \cdot \sin m\varphi \cdot (2n-1) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

第 3 基本解：

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \cos m\varphi \cdot (n+1)(n-2+4\nu) \\ &\quad \cdot E_{nm} P_n^m(\mu) - 2(1-2\nu) E_{00} r \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^n} \cos m\varphi \cdot n(n+3-4\nu) P_n^m(\mu) \\ 2Gu_{\theta}^3 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \cos m\varphi \cdot (n+5-4\nu) \\ &\quad \cdot E_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^n} \cos m\varphi \\ &\quad \cdot (n-4+4\nu) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ 2Gu_{\varphi}^3 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \sin m\varphi \cdot (n+5-4\nu) \\ &\quad \cdot E_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^n} \sin m\varphi \\ &\quad \cdot (n-4+4\nu) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

特殊解：

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r^{\phi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \cos m\varphi \cdot (n+2) B_{nm} P_n^m(\mu) \\ &\quad + 2B_{00} r - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{S_{nm}}{r^n} \cos m\varphi \\ &\quad \cdot (n-1) P_n^m(\mu) + S_{00} \\ 2Gu_{\theta}^{\phi} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \cos m\varphi \cdot B_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{S_{nm}}{r^n} \cos m\varphi \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ 2Gu_{\varphi}^{\phi} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n+1} \sin m\varphi \cdot B_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{S_{nm}}{r^n} \sin m\varphi \cdot \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

応力成分は、式 (21) から式 (24) に示した変位成分より、式 (1) を用いてひずみ成分を求め、式 (2) および式 (8・1) より Legendre の陪関数に関する漸化式⁽¹⁰⁾ を用いてそれぞれ求めることができる。紙面の都合上、境界条件に直接関係した 3 つの応力成分 σ_{rr} 、 $\sigma_{r\theta}$ および $\sigma_{r\varphi}$ のみについて示せば次のとおりである。

第 1 基本解：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \cos m\varphi \cdot n(n-1) A_{nm} P_n^m(\mu) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{r^{n+3}} \cos m\varphi \cdot (n+1)(n+2) P_n^m(\mu) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2D_{00}}{r^3} \\
 \sigma_{r\theta}^1 = & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \cos m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{r^{n+3}} \cos m\varphi \cdot (n+2) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\
 \sigma_{r\varphi}^1 = & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \sin m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{r^{n+3}} \sin m\varphi \cdot (n+2) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\
 & \dots\dots\dots(25)
 \end{aligned}$$

第2基本解：

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^2 = & 0 \\
 \sigma_{r\theta}^2 = & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-1} \cos m\varphi \cdot (2n+3)(n-1) L_{nm} \\
 & \cdot \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{r^{n+2}} \cos m\varphi \\
 & \cdot (2n-1)(n+2) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\
 \sigma_{r\varphi}^2 = & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-1} \sin m\varphi \cdot (2n+3)(n-1) L_{nm} \sin \theta \\
 & \cdot \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{r^{n+2}} \sin m\varphi \\
 & \cdot (2n-1)(n+2) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\
 & \dots\dots\dots(26)
 \end{aligned}$$

第3基本解：

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^3 = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi \cdot (n+1)(n^2-n-2-2\nu) \\
 & \cdot E_{nm} P_n^m(\mu) - 2(1+\nu) E_{00} \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^{n+1}} \cos m\varphi \cdot n(n^2+3n-2\nu) P_n^m(\mu) \\
 \sigma_{r\theta}^3 = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi \cdot (n^2+2n-1+2\nu) \\
 & \cdot E_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^{n+1}} \cos m\varphi \\
 & \cdot (n^2-2+2\nu) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\
 \sigma_{r\varphi}^3 = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \sin m\varphi \cdot (n^2+2n-1+2\nu) \\
 & \cdot E_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{r^{n+1}} \sin m\varphi \\
 & \cdot (n^2-2+2\nu) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\
 & \dots\dots\dots(27)
 \end{aligned}$$

特殊解：

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^p = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi (n^2-n-4) B_{nm} P_n^m(\mu) - 4B_{00} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{S_{nm}}{r^{n+1}} \cos m\varphi \cdot (n^2+3n-2) \\
 & \cdot P_n^m(\mu) - \frac{2S_{00}}{r} \\
 & \dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta}^p = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi \cdot (n+1) B_{nm} \sin \theta \\
 & \cdot \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{nS_{nm}}{r^{n+1}} \cos m\varphi \\
 & \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\
 \sigma_{r\varphi}^p = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \sin m\varphi \cdot (n+1) B_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{nS_{nm}}{r^{n+1}} \sin m\varphi \cdot \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\
 & \dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

求める応力成分は、第1基本解から特殊解までの4つの解のそれぞれの応力成分を相加したものである。

軸対称問題の変位および応力成分は、式(21)から式(28)の中で、第2基本解をはずした各式において、 $m=0$ と置くことによって得られ、等温弾性問題については、それらの結果が、Lur'e¹⁰⁾の著書の変位および応力成分に一致していることは確かである。

6. 表面荷重を受ける等温弾性問題の解法

内半径 R_1 および外半径 R_2 の完全球殻が、 $r=R_1$ において、

$$\sigma_{rr} = f_1(\theta, \varphi), \quad \sigma_{r\theta} = g_1(\theta, \varphi), \quad \sigma_{r\varphi} = h_1(\theta, \varphi) \dots\dots\dots(29)$$

$r=R_2$ において、

$$\sigma_{rr} = f_2(\theta, \varphi), \quad \sigma_{r\theta} = g_2(\theta, \varphi), \quad \sigma_{r\varphi} = h_2(\theta, \varphi) \dots\dots\dots(30)$$

と境界条件が与えられている場合を考える。 $f_1(\theta, \varphi)$ から $h_2(\theta, \varphi)$ は表面荷重の任意関数である。この場合には、表面荷重がつり合い状態になければならないので、荷重の間に次のつり合い条件が必要である。

$$\left. \begin{aligned}
 R_x^1 - R_x^2 = 0, \quad R_y^1 - R_y^2 = 0, \quad R_z^1 - R_z^2 = 0 \\
 M_x^1 - M_x^2 = 0, \quad M_y^1 - M_y^2 = 0, \quad M_z^1 - M_z^2 = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 R_x^1 = R_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{f_1(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi + g_1(\theta, \varphi) \mu \cos \varphi \\
 - h_1(\theta, \varphi) \sin \varphi\} d\mu d\varphi \\
 R_y^1 = R_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{f_1(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi + g_1(\theta, \varphi) \mu \sin \varphi \\
 + h_1(\theta, \varphi) \cos \varphi\} d\mu d\varphi \\
 R_z^1 = R_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{f_1(\theta, \varphi) \mu - g_1(\theta, \varphi) \sin \theta\} d\mu d\varphi \\
 M_x^1 = -R_1^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{g_1(\theta, \varphi) \sin \varphi \\
 + h_1(\theta, \varphi) \mu \cos \varphi\} d\mu d\varphi \\
 M_y^1 = R_1^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{g_1(\theta, \varphi) \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$M_2^1 = R_1^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 h_1(\theta, \varphi) \sin \theta d\mu d\varphi \dots\dots\dots (31.1)$$

また、 R_x^2 から M_2^2 は、上式において、それぞれ

$$R_1 \rightarrow R_2, f_1(\theta, \varphi) \rightarrow f_2(\theta, \varphi) \\ g_1(\theta, \varphi) \rightarrow g_2(\theta, \varphi), h_1(\theta, \varphi) \rightarrow h_2(\theta, \varphi)$$

と置き換えたものである。等温弾性問題を考えているので、式 (25), (26) および式 (27) を用いて、式 (29) および式 (30) の境界条件を課すると次の6組の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^{n-2} \cos m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} P_n^m(\mu) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^n \cos m\varphi \cdot (n+1) (n^2 - n - 2 - 2\nu) \\ & \cdot E_{nm} P_n^m(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{R_1^{n+3}} \cos m\varphi \\ & \cdot (n+1) (n+2) P_n^m(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{R_1^{n+1}} \cos m\varphi \\ & \cdot n(n^2 + 3n - 2\nu) P_n^m(\mu) - 2(1+\nu) E_{00} \\ & + \frac{2D_{00}}{R_1^3} = f_1(\theta, \varphi) \dots\dots\dots (32.1) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^{n-2} \cos m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^n \cos m\varphi \cdot (n^2 + 2n - 1 + 2\nu) E_{nm} \sin \theta \\ & \cdot \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^{n-1} \cos m\varphi \cdot (2n+3) \\ & \cdot (n-1) L_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{R_1^{n+3}} \cos m\varphi \\ & \cdot (n+2) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{R_1^{n+1}} \cos m\varphi \\ & \cdot (n^2 - 2 + 2\nu) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{R_1^{n+2}} \\ & \cdot \cos m\varphi \cdot (2n-1) (n+2) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} = g_1(\theta, \varphi) \\ & \dots\dots\dots (32.2) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^{n-2} \sin m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^n \sin m\varphi \cdot (n^2 + 2n - 1 + 2\nu) E_{nm} \\ & \cdot \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_1^{n-1} \sin m\varphi \cdot (2n+3) \\ & \cdot (n-1) L_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{R_1^{n+3}} \\ & \cdot \sin m\varphi \cdot (n+2) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{R_1^{n+1}} \\ & \cdot \sin m\varphi \cdot (n^2 - 2 + 2\nu) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{R_1^{n+2}} \\ & \cdot \sin m\varphi \cdot (2n-1) (n+2) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ & = h_1(\theta, \varphi) \dots\dots\dots (32.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^{n-2} \cos m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} P_n^m(\mu) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^n \cos m\varphi \cdot (n+1) (n^2 - n - 2 - 2\nu) \\ & \cdot E_{nm} P_n^m(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{R_2^{n+3}} \cos m\varphi \\ & \cdot (n+1) (n+2) P_n^m(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{R_2^{n+1}} \cos m\varphi \\ & \cdot n(n^2 + 3n - 2\nu) P_n^m(\mu) - 2(1+\nu) E_{00} \\ & + \frac{2D_{00}}{R_2^3} = f_2(\theta, \varphi) \dots\dots\dots (32.4) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^{n-2} \cos m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^n \cos m\varphi \cdot (n^2 + 2n - 1 + 2\nu) E_{nm} \sin \theta \\ & \cdot \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^{n-1} \cos m\varphi \\ & \cdot (2n+3) (n-1) L_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \\ & \cdot \frac{D_{nm}}{R_2^{n+3}} \cos m\varphi \cdot (n+2) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{R_2^{n+1}} \cos m\varphi \cdot (n^2 - 2 + 2\nu) \\ & \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{R_2^{n+2}} \cos m\varphi \\ & \cdot (2n-1) (n+2) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} = g_2(\theta, \varphi) \dots\dots (32.5) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^{n-2} \sin m\varphi \cdot (n-1) A_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^n \sin m\varphi \cdot (n^2 + 2n - 1 + 2\nu) \\ & \cdot E_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_2^{n-1} \sin m\varphi \cdot (2n+3) \\ & \cdot (n-1) L_{nm} \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_{nm}}{R_2^{n+3}} \\ & \cdot \sin m\varphi \cdot (n+2) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{C_{nm}}{R_2^{n+1}} \\ & \cdot \sin m\varphi \cdot (n^2 - 2 + 2\nu) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{M_{nm}}{R_2^{n+2}} \\ & \cdot \sin m\varphi \cdot (2n-1) (n+2) \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \\ & = h_2(\theta, \varphi) \dots\dots\dots (32.6) \end{aligned}$$

この方程式は、① $n=0, m=0$, ② $n=1, m=0$, ③ $n=1, m=1$, ④ $n \geq 2, n \geq m \geq 0$ の4つの場合に分けて解くのが簡明であるが、① から ③ の場合の解が ④ の場合の解に包含されるので、④ の場合の解法について示すことにする。

式 (32.1) および式 (32.4) の両辺にそれぞれ $\cos k\varphi$ をかけて φ に関して 0 から 2π まで積分し、得られた式にさらに $P_l^k(\mu)$ をかけて μ に関して -1 から 1 まで積分し、直交関係¹⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cdot \cos k\varphi d\varphi \\ \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cdot \sin k\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} = \begin{cases} 0 & [m \neq k] \\ \pi & [m = k] \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 P_n^k(\mu) P_l^k(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & [n \neq l] \\ \frac{2 \cdot (l+k)!}{(l-k)! (2l+1)} & [n=l] \end{cases}$$

.....(33)

を用いれば次式が得られる。

$$R_1^{l-2} A_{lk} l(l-1) + R_1^l E_{lk} (l+1) (l^2 - l - 2 - 2\nu) \\ + \frac{D_{lk}}{R_1^{l+3}} (l+1) (l+2) - \frac{C_{lk}}{R_1^{l+1}} l(l^2 + 3l - 2\nu) \\ = a_{lk} \dots\dots\dots(34)$$

ここで、

$$a_{lk} = \left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon_k}{\pi} \cdot \frac{(l-k)! (2l+1)}{2(l+k)!} \int_{-1}^1 P_l^k(\mu) \\ \cdot \int_0^{2\pi} f_1(\theta, \varphi) \cos k\varphi d\varphi \cdot d\mu \\ \varepsilon_k = \begin{cases} 1/2 & [k=0] \\ 1 & [k \geq 1] \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

.....(34.1)

$$R_2^{l-2} A_{lk} l(l-1) + R_2^l E_{lk} (l+1) (l^2 - l - 2 - 2\nu) \\ + \frac{D_{lk}}{R_2^{l+3}} (l+1) (l+2) - \frac{C_{lk}}{R_2^{l+1}} l(l^2 + 3l - 2\nu) \\ = e_{lk} \dots\dots\dots(35)$$

ここで、

$$e_{lk} = \frac{\varepsilon_k}{\pi} \cdot \frac{(l-k)! (2l+1)}{2(l+k)!} \int_{-1}^1 P_l^k(\mu) \\ \cdot \int_0^{2\pi} f_2(\theta, \varphi) \cos k\varphi d\varphi \cdot d\mu \dots\dots\dots(35.1)$$

式 (32.2) の両辺に $\cos k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた式にさらに $kP_l^k(\mu)/\sin\theta$ をかけると次式が得られる。

$$\sum_{n=2}^{\infty} k P_l^k(\mu) \frac{dP_n^k(\mu)}{d\mu} \left\{ -R_1^{n-2} A_{nk} (n-1) \right. \\ - R_1^n E_{nk} (n^2 + 2n - 1 + 2\nu) + \frac{D_{nk}}{R_1^{n+3}} (n+2) \\ \left. - \frac{C_{nk}}{R_1^{n+1}} (n^2 - 2 + 2\nu) \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k^2 P_n^k(\mu) P_l^k(\mu)}{\sin^2 \theta} \\ \cdot \left\{ R_1^{n-1} L_{nk} (2n+3) (n-1) + \frac{M_{nk}}{R_1^{n+2}} (2n-1) \right. \\ \left. \cdot (n+2) \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{k P_l^k(\mu)}{\sin \theta} \int_0^{2\pi} g_1(\theta, \varphi) \cos k\varphi d\varphi \\ \dots\dots\dots(a)$$

式 (32.3) の両辺に $\sin k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた式にさらに $\sin\theta \cdot dP_l^k(\mu)/d\mu$ をかける次式が得られる。

$$\sum_{n=2}^{\infty} k P_n^k(\mu) \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \left\{ -R_1^{n-2} A_{nk} (n-1) \right. \\ \left. - R_1^n E_{nk} (n^2 + 2n - 1 + 2\nu) + \frac{D_{nk}}{R_1^{n+3}} (n+2) \right.$$

$$\left. - \frac{C_{nk}}{R_1^{n+1}} (n^2 - 2 + 2\nu) \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \sin^2 \theta \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \\ \cdot \frac{dP_n^k(\mu)}{d\mu} \left\{ R_1^{n-1} L_{nk} (2n+3) (n-1) \right. \\ \left. + \frac{M_{nk}}{R_1^{n+2}} (2n-1) (n+2) \right\} = \frac{1}{\pi} \sin \theta \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \\ \cdot \int_0^{2\pi} h_1(\theta, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \dots\dots\dots(b)$$

式 (a) と式 (b) とを加え、 μ に関して -1 から 1 まです積分し、直交関係¹⁴⁾

$$\int_{-1}^1 \left\{ \sin^2 \theta \frac{dP_n^k(\mu)}{d\mu} \cdot \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} + \frac{k^2}{\sin^2 \theta} \right. \\ \left. \cdot P_n^k(\mu) P_l^k(\mu) \right\} d\mu = \begin{cases} 0 & [n \neq l] \\ \frac{2(l+k)! l(l+1)}{(l-k)! (2l+1)} & [n=l] \end{cases}$$

.....(36)

および

$$\int_{-1}^1 k \left\{ P_l^k(\mu) \frac{dP_n^k(\mu)}{d\mu} + P_n^k(\mu) \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \right\} d\mu \\ = k [P_l^k(\mu) P_n^k(\mu)]_{-1}^1 = 0 \dots\dots\dots(37)$$

を用いれば、次式が得られる。

$$- \left\{ R_1^{l-1} L_{lk} (2l+3) (l-1) + \frac{M_{lk}}{R_1^{l+2}} (2l-1) (l+2) \right\} \\ = i_{lk} \dots\dots\dots(38)$$

ここで、

$$i_{lk} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(l-k)! (2l+1)}{2(l+k)! l(l+1)} \int_{-1}^1 \left[\frac{k P_l^k(\mu)}{\sin \theta} \right. \\ \left. \cdot \int_0^{2\pi} g_1(\theta, \varphi) \cos k\varphi d\varphi + \sin \theta \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \right. \\ \left. \cdot \int_0^{2\pi} h_1(\theta, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \right] d\mu \dots\dots\dots(38.1)$$

式 (32.2) の両辺に $\cos k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた式に $\sin\theta \cdot dP_l^k(\mu)/d\mu$ をかけた式と、式 (32.3) の両辺に $\sin k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた式に $kP_l^k(\mu)/\sin\theta$ をかけた式を加えて μ に関して積分し、式 (36) および式 (37) の関係を用いれば次式が得られる。

$$-R_1^{l-2} A_{lk} (l-1) - R_1^l E_{lk} (l^2 + 2l - 1 + 2\nu) \\ + \frac{D_{lk}}{R_1^{l+3}} (l+2) - \frac{C_{lk}}{R_1^{l+1}} (l^2 - 2 + 2\nu) = b_{lk} \\ \dots\dots\dots(39)$$

ここで、

$$b_{lk} = \frac{\varepsilon_k}{\pi} \cdot \frac{(l-k)! (2l+1)}{2(l+k)! l(l+1)} \int_{-1}^1 \left[\sin \theta \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \right. \\ \left. \cdot \int_0^{2\pi} g_1(\theta, \varphi) \cos k\varphi d\varphi + \frac{k P_l^k(\mu)}{\sin \theta} \right. \\ \left. \cdot \int_0^{2\pi} h_1(\theta, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \right] d\mu \dots\dots\dots(39.1)$$

式 (32.5) の両辺に $\cos k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた式に $kP_l^k(\mu)/\sin\theta$ をかけた式と、式 (32.6) の両辺に $\sin k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた

式に $\sin \theta \cdot dP_l^k(\mu)/d\mu$ をかけた式とを加えて μ に関して積分し、式 (36) および式 (37) の関係を用いれば次式が得られる。

$$-\left\{R_2^{l-1}L_{lk}(2l+3)(l-1) + \frac{M_{lk}}{R_2^{l+2}}(2l-1)(l+2)\right\} = j_{lk} \dots\dots\dots (40)$$

ここで、

$$j_{lk} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(l-k)!(2l+1)}{2(l+k)!l(l+1)} \int_{-1}^1 \left[\frac{kP_l^k(\mu)}{\sin \theta} \cdot \int_0^{2\pi} g_2(\theta, \varphi) \cos k\varphi d\varphi + \sin \theta \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \cdot \int_0^{2\pi} h_2(\theta, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \right] d\mu \dots\dots\dots (40 \cdot 1)$$

式 (32.5) の両辺に $\cos k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた式に $\sin \theta \cdot dP_l^k(\mu)/d\mu$ をかけた式と、式 (32.6) の両辺に $\sin k\varphi$ をかけて φ に関して積分し、得られた式に $kP_l^k(\mu)/\sin \theta$ をかけた式とを加えて μ に関して積分し、式 (36) および式 (37) の関係を用いれば次式が得られる。

$$-R_2^{l-2}A_{lk}(l-1) - R_2^l E_{lk}(l^2+2l-1+2\nu) + \frac{D_{lk}}{R_2^{l+3}}(l+2) - \frac{C_{lk}}{R_2^{l+1}}(l^2-2+2\nu) = d_{lk} \dots\dots\dots (41)$$

ここで、

$$d_{lk} = \frac{\varepsilon_k}{\pi} \cdot \frac{(l-k)!(2l+1)}{2(l+k)!l(l+1)} \int_{-1}^1 \left[\sin \theta \frac{dP_l^k(\mu)}{d\mu} \cdot \int_0^{2\pi} g_2(\theta, \varphi) \cos k\varphi d\varphi + \frac{kP_l^k(\mu)}{\sin \theta} \cdot \int_0^{2\pi} h_2(\theta, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \right] d\mu \dots\dots\dots (41 \cdot 1)$$

したがって、式 (38) および式 (40) を解いて、

$$\left. \begin{aligned} M_{lk} &= \frac{R_1^{l+2}(j_{lk}\rho^{l-1} - i_{lk})}{(2l-1)(l+2)(1-\rho^{2l+1})}, \\ L_{lk} &= \frac{i_{lk}\rho^{l+2} - j_{lk}}{(2l+3)(l-1)(1-\rho^{2l+1})R_2^{l-1}}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (l \geq 1, l \geq k \geq 0) \\ (l \geq 2, l \geq k \geq 0) \end{aligned} \dots\dots\dots (42)$$

が得られる。また、式 (34), (35), (39) および式 (41) を解いて、未知定数が次のように求められる。

$$C_{lk} = \frac{R_1^{l+1}}{d} \{a_{lk}[(1-\rho^{2l+3})(2l+1)\delta_l - (1-\rho^{2l+1})(l-1)(l+1)(2l+3)] + b_{lk}(l+1)[(1-\rho^{2l+3})(2l+1)\zeta_l - (1-\rho^{2l+1})l(l-1)(2l+3)] + e_{lk}\rho^{l-2}[-(1-\rho^2)(l-1)(l+1)(2l+3) - 2(1-\rho^{2l+3})\alpha_l] + d_{lk}(l+1)\rho^{l-2}[2(1-\rho^{2l+3})\alpha_l - (1-\rho^2)l(l-1)(2l+3)]\}, (l \geq 1, l \geq k \geq 0) \dots\dots\dots (43 \cdot 1)$$

$$E_{lk} = \frac{1}{dR_2^l} \{a_{lk}\rho^{l+1}[-(1-\rho^2)(2l+1)\eta_l - 2(1-\rho^{2l+1})\beta_l] + b_{lk} \cdot l\rho^{l+1} \cdot [(1-\rho^2)(2l+1)\kappa_l - 2(1-\rho^{2l+1})\beta_l] + e_{lk}[(1-\rho^{2l+1})l(2l-1)(l+2) - (1-\rho^{2l-1})(2l+1)\eta_l] + d_{lk} \cdot l[(1-\rho^{2l-1})(2l+1)\kappa_l - (1-\rho^{2l+1})(l+1)(l+2)(2l-1)]\}, (l \geq 0, l \geq k \geq 0) \dots\dots\dots (43 \cdot 2)$$

$$D_{lk} = \frac{R_1^{l+3}}{(l+2)d} \{a_{lk}[-(1-\rho^{2l-1})\tau_l + (1-\rho^{2l+1})l(l+2)(2l-1)\delta_l] + b_{lk} \cdot l \cdot [(1-\rho^{2l+1})(l+1)(l+2)(2l-1)\zeta_l - (1-\rho^{2l-1})\tau_l] + e_{lk}\rho^{l-2}[-(1-\rho^2) \cdot \tau_l - 2(1-\rho^{2l+1})\eta_l\alpha_l] + d_{lk} \cdot l\rho^{l-2}[-(1-\rho^2)\tau_l + 2(1-\rho^{2l+1}) \cdot \kappa_l\alpha_l]\}, (l \geq 0, l \geq k \geq 0) \dots\dots\dots (43 \cdot 3)$$

$$A_{lk} = \frac{1}{(l-1)dR_2^{l-2}} \{a_{lk}\rho^{l+1}[(1-\rho^2)(l-1) \cdot (l+1)(2l+3)\eta_l + 2(1-\rho^{2l+3}) \cdot \delta_l\beta_l] + b_{lk}(l+1)\rho^{l+1}[-(1-\rho^2) \cdot l(l-1)(2l+3)\kappa_l + 2(1-\rho^{2l+3}) \cdot \zeta_l\beta_l] + e_{lk}[(1-\rho^{2l+1})(l-1)(l+1) \cdot (2l+3)\eta_l - (1-\rho^{2l+3})\tau_l] + d_{lk}(l+1)[-(1-\rho^{2l+1})l(l-1)(2l+3)\kappa_l + (1-\rho^{2l+3})\tau_l]\}, (l \geq 2, l \geq k \geq 0) \dots\dots\dots (43 \cdot 4)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_l &= l^2 + l + 1 + \nu(2l+1) \\ \beta_l &= l^2 + l + 1 - \nu(2l+1) \\ \tau_l &= (2l+1)\{l(l-1)(l+1)(l+2) + 4 - 4\nu^2\} \\ \Delta &= -(1-\rho^{2l-1})(1-\rho^{2l+3})(2l+1)\tau_l + (1-\rho^{2l+1})^2l \\ &\quad \cdot (l+2)(2l-1)(2l+3)(l-1)(l+1) \\ \delta_l &= l^2 + 2l - 1 + 2\nu, \quad \zeta_l = l^2 - l - 2 - 2\nu \\ \eta_l &= l^2 - 2 + 2\nu, \quad \kappa_l = l^2 + 3l - 2\nu, \quad \rho = R_1/R_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

ただし、 $l=1, k=0$ の場合には、荷重のつり合い条件 (31) の最初から第3式により、

$$R_1^2(a_{10} - 2b_{10}) = R_2^2(e_{10} - 2d_{10}) \dots\dots\dots (45)$$

の関係が必要であり、 $l=1, k=1$ の場合には、荷重のつり合い条件 (31) の最初から第1式および第5式により、

$$\left. \begin{aligned} R_1^2(a_{11} - 2b_{11}) &= R_2^2(e_{11} - 2d_{11}), \\ R_1^3i_{11} &= R_2^3j_{11} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

の関係が必要である。

以上求めた解において、 $k=0$ と置けば、最初より軸対称問題として求めた解に一致する。

第1基本解から第3基本解に含まれている n および m は、ともにダミイ定数であり、 $n \rightarrow l, m \rightarrow k$ としても

差し支えないので、式 (42) および式 (43・1) から式 (43・4) により、第 1、第 2 および第 3 基本解に含まれている未知定数が厳密に求められ、厳密な級数解が得られたことになる。この結果は、ベクトルポテンシャルの成分の間に課した式 (6・1) および式 (7・1) の関係と無関係に得られたものではなく、本報告の解法における第 2 の特徴といえる。

また、球殻の表面において規定された荷重のなかで、

$$g_1(\theta, \varphi) = h_1(\theta, \varphi) = g_2(\theta, \varphi) = h_2(\theta, \varphi) = 0$$

とすれば、式 (38・1) および式 (40・1) より、 $i_{lk} = j_{lk} = 0$ となり、式 (42) から $M_{lk} = L_{lk} = 0$ となる。この結果は、球殻の表面において規定された荷重のうち、半径方向の垂直応力成分に関係した荷重のみが値をもち、他の 2 つのせん断応力成分に関係した荷重がともに 0 の場合には、非軸対称問題の場合においても、第 2 基本解なしで解析できることを示しており、1 つの興味ある結果と思われる。

7. 定常熱応力問題の解法

内半径 R_1 および外半径 R_2 の球殻が、

$$\left. \begin{aligned} r=R_1 \text{ において } T=T_1(\theta, \varphi) \\ r=R_2 \text{ において } T=T_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

のように時間に関して一定温度に保たれている場合を考える。煩雑さを避けるために、表面外力は内、外表面ともに 0 とする。式 (19) に式 (47) の境界条件を課すると

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\bar{B}_{nm} R_1^n + \frac{\bar{S}_{nm}}{R_1^{n+1}} \right) P_n^m(\mu) \cos m\varphi \\ = T_1(\theta, \varphi) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\bar{B}_{nm} R_2^n + \frac{\bar{S}_{nm}}{R_2^{n+1}} \right) P_n^m(\mu) \cos m\varphi \\ = T_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

となる。上式を、式 (33) の直交関係を用いて解き、ダミイ定数を $l \rightarrow n, k \rightarrow m$ と変更すれば、未知定数が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{nm} &= \frac{R_1^{n+1}}{1-\rho^{2n+1}} (p_{nm} - \rho^n q_{nm}) \\ \bar{B}_{nm} &= -\frac{1}{R_2^n (1-\rho^{2n+1})} (\rho^{n+1} p_{nm} - q_{nm}) \\ \rho &= R_1/R_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} p_{nm} &= \frac{\varepsilon_m}{\pi} \cdot \frac{(n-m)!(2n+1)}{2(n+m)!} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) \\ &\quad \cdot \int_0^{2\pi} T_1(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \cdot d\mu \\ q_{nm} &= \frac{\varepsilon_m}{\pi} \cdot \frac{(n-m)!(2n+1)}{2(n+m)!} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\cdot \int_0^{2\pi} T_2(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \cdot d\mu \\ \varepsilon_m &= \begin{cases} 1/2 [m=0] \\ 1 [m \geq 1] \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49 \cdot 1)$$

したがって、式 (19) および式 (49) により、球殻内の温度が求められたことになる。式 (49) を式 (20・1) に代入すれば、特殊解の未知定数 B_{nm} および S_{nm} が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} B_{nm} &= -\frac{\alpha E}{2(2n+3)(1-\nu)} \cdot \frac{\rho^{n+1} p_{nm} - q_{nm}}{R_2^n (1-\rho^{2n+1})} \\ S_{nm} &= -\frac{\alpha E}{2(2n-1)(1-\nu)} \cdot \frac{R_1^{n+1}}{1-\rho^{2n+1}} (p_{nm} - \rho^n q_{nm}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

球殻の表面には、外力が作用していない場合を考えているので、

$$\left. \begin{aligned} r=R_1 \text{ および } r=R_2 \text{ において、} \\ \sigma_{rr} + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{rr}^3 + \sigma_{rr}^4 = 0 \\ \sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{r\theta}^3 + \sigma_{r\theta}^4 = 0 \\ \sigma_{r\varphi} + \sigma_{r\varphi}^2 + \sigma_{r\varphi}^3 + \sigma_{r\varphi}^4 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

となることが必要である。式 (25) から式 (28) を用いて、式 (51) の条件を課すると、次の 6 組の方程式が得られる。

$$\text{式 (32・1) の左辺} = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{nm} \cos m\varphi \cdot P_n^m(\mu) \dots\dots\dots (52)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_{00} &= 4 B_{00} + \frac{2 S_{00}}{R_1} \\ &= \frac{\alpha E}{3(1-\nu)(1-\rho)} \cdot \{p_{00}(3-2\rho) - q_{00}\} \\ a_{nm} &= -R_1^n (n^2 - n - 4) B_{nm} - \frac{S_{nm}}{R_1^{n+1}} (n^2 + 3n - 2) \\ &= \frac{\alpha E}{2(1-\nu)(1-\rho^{2n+1})(2n+3)(2n-1)} \\ &\quad \cdot [p_{nm}\{(2n+3)(n^2+3n-2) \\ &\quad + \rho^{2n+1}(2n-1)(n^2-n-4)\} \\ &\quad - 2q_{nm} \cdot \rho^n (2n+1)(n^2+n-1)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52 \cdot 1)$$

$$\text{式 (32・2) の左辺} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n b_{nm} \cos m\varphi \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \dots\dots\dots (53)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} b_{nm} &= R_1^n (n+1) B_{nm} - \frac{n S_{nm}}{R_1^{n+1}} \\ &= \frac{\alpha E}{2(1-\nu)(1-\rho^{2n+1})(2n+3)(2n-1)} \\ &\quad \cdot [p_{nm}\{n(2n+3) - \rho^{2n+1}(n+1)(2n-1)\} \\ &\quad - q_{nm} \cdot \rho^n (2n+1)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53 \cdot 1)$$

$$\text{式 (32.3) の左辺} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n b_{nm} \sin m\varphi \cdot \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \dots\dots\dots (54)$$

$$\text{式 (32.4) の左辺} = e_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n e_{nm} \cos m\varphi \cdot P_n^m(\mu) \dots\dots\dots (55)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} e_{00} &= 4B_{00} + \frac{2S_{00}}{R_2} = \frac{\alpha E}{3(1-\nu)(1-\rho)} \cdot \{\rho p_{00} + q_{00}(2-3\rho)\} \\ e_{nm} &= -R_2^n (n^2 - n - 4) B_{nm} - \frac{S_{nm}}{R_2^{n+1}} (n^2 + 3n - 2) \\ &= \frac{\alpha E}{2(1-\nu)(1-\rho^{2n+1})(2n+3)(2n-1)} \\ &\quad \cdot [2p_{nm} \cdot \rho^{n+1}(2n+1)(n^2+n-1) \\ &\quad - q_{nm}\{(2n-1)(n^2-n-4) \\ &\quad + \rho^{2n+1}(2n+3)(n^2+3n-2)\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55.1)$$

$$\text{式 (32.5) の左辺} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n d_{nm} \cos m\varphi \cdot \sin \theta \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \dots\dots\dots (56)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} d_{nm} &= R_2^n (n+1) B_{nm} - \frac{nS_{nm}}{R_2^{n+1}} \\ &= \frac{\alpha E}{2(1-\nu)(1-\rho^{2n+1})(2n+3)(2n-1)} \\ &\quad \cdot [p_{nm} \cdot \rho^{n+1}(2n+1) + q_{nm}\{(2n-1)(n+1) \\ &\quad - \rho^{2n+1} \cdot n(2n+3)\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56.1)$$

$$\text{式 (32.6) の左辺} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n d_{nm} \sin m\varphi \cdot \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta} \dots\dots\dots (57)$$

この6組の方程式も、前章に示した表面荷重を受けた等温弾性問題と同様に、① $n=0, m=0$, ② $n=1, m=0$, ③ $n=1, m=1$, ④ $n \geq 2, n \geq m \geq 0$ の4つの場合に分けて解くのが簡明である。特に、①の場合については、

$$\left. \begin{aligned} D_{00} &= \frac{\alpha ER_1^3}{2(1-\nu)(1-\rho^3)} (p_{00} - q_{00}) \\ E_{00} &= -\frac{\alpha E}{6(1-\nu)(1+\nu)(1+\rho+\rho^2)} \cdot \{\rho p_{00} \cdot \rho(1+2\rho) + q_{00}(2+\rho)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (58)$$

が得られる。この場合の応力成分および温度分布は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\alpha E(p_{00} - q_{00})}{(1-\nu)(1-\rho^3)} \left\{ \rho(\rho+1) - (\rho^2 + \rho + 1) \cdot \frac{R_1}{r} + \frac{R_1^3}{r^3} \right\} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\alpha E(p_{00} - q_{00})}{(1-\nu)(1-\rho^3)} \left\{ \rho(\rho+1) - (\rho^2 + \rho + 1) \cdot \frac{R_1}{2r} - \frac{R_1^3}{2r^3} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} T(r, \theta, \varphi) \equiv T(r) &= \frac{1}{1-\rho} \left\{ p_{00} \left(\frac{R_1}{r} - \rho \right) - q_{00} \left(\frac{R_1}{r} - 1 \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

となる。この解は、球殻の表面における温度が、

$$\left. \begin{aligned} r=R_1 \text{ において,} \\ T_1(\theta, \varphi) &= T_i \text{ (定数)} \\ r=R_2 \text{ において} \\ T_2(\theta, \varphi) &= T_e \text{ (定数)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

と与えられた場合に相当する。上式を式(49.1)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} p_{00} &= \frac{\varepsilon_0}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} T_i d\varphi d\mu = T_i \\ q_{00} &= \frac{\varepsilon_0}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} T_e d\varphi d\mu = T_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

となる。特に、 $T_e=0$ とすると、 $q_{00}=0$ となり、式(59)は文献15)に示されている応力成分および温度分布に一致する。

④の場合については、前章の④において述べた解法と同様にして、はじめに、

$$L_{lk}=0, M_{lk}=0 \dots\dots\dots (62)$$

が求められ、ダミイ定数を $l \rightarrow n, k \rightarrow m$ と変更すれば C_{nm}, E_{nm}, D_{nm} および A_{nm} は、式(43.1)から式(43.4)に示した解において、 l を n, k を m と置き換えて求められる。ただし、 a_{nm}, b_{nm}, e_{nm} および d_{nm} はそれぞれ、式(52.1), (53.1), (55.1) および式(56.1)に示したものである。特に、 $a_{10}=2b_{10}, e_{10}=2d_{10}, a_{11}=2b_{11}, e_{11}=2d_{11}$ の関係がある。

したがって、球殻の表面において規定された温度より式(49.1)を用いて p_{nm} および q_{nm} が求められれば、変位および応力成分に含まれているすべての未知定数が厳密に求められたことになり、表面荷重を受けた等温弾性問題の場合と同様に厳密な級数解に帰着されたことになる。また、軸対称問題、すなわち、球殻の表面において規定された温度が φ に関して一定のときには、以上の解において、単に $m=0$ と置けばよく、明らかに、軸対称問題を含んだ形で解が求められていることになる。結果的にみれば、式(62)に示されているように、定常熱応力問題の場合には、非軸対称問題としても、第2基本解が不要となることは興味ある結果と思われる。

8. 数値計算例

(1) 風荷重を受けた半球殻の計算例

6. において述べた等温弾性問題の一計算例として 図 2 に示したように、半球殻が風荷重を受けた場合を取

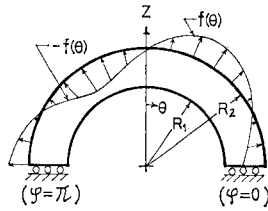


図-2 風荷重を受けた半球殻

り扱った。境界条件は、

$r=R_1$ において、

$$\sigma_{rr} = f_1(\theta, \varphi) = 0, \quad \sigma_{r\theta} = g_1(\theta, \varphi) = 0,$$

$$\sigma_{r\varphi} = h_1(\theta, \varphi) = 0$$

$r=R_2$ において、

$$\sigma_{rr} = f_2(\theta, \varphi) = f(\theta) \cos \varphi, \quad \sigma_{r\theta} = g_2(\theta, \varphi) = 0,$$

$$\sigma_{r\varphi} = h_2(\theta, \varphi) = 0$$

ここで、

$$f(\theta) = q \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$$

$\theta = \pi/2$ において、

$$u_\theta = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\varphi} = 0$$

である。上に示した境界値を式 (34.1) から式 (41.1)

に代入すると、

$$a_{1k} = b_{1k} = d_{1k} = i_{1k} = j_{1k} = 0$$

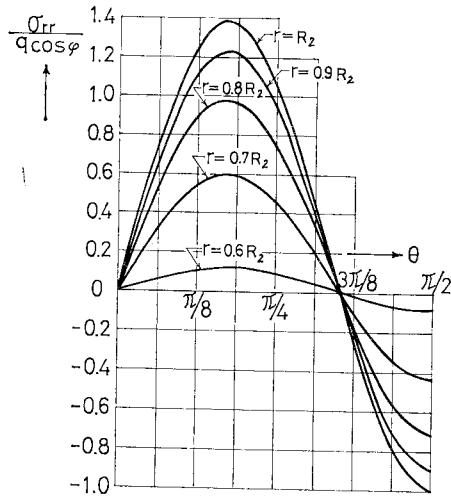


図-3 σ_{rr} の分布

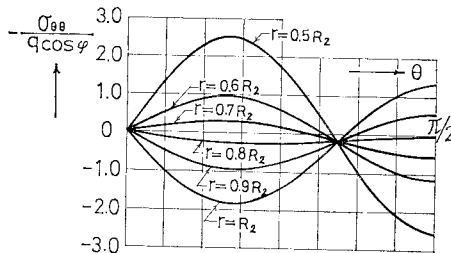


図-4 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

$$e_{lk} = \begin{cases} 2q/3 & (l=3, k=1) \\ 0 & (\text{上記以外の場合}) \end{cases}$$

となるので、 $M_{lk} = L_{lk} = 0$ 、また、 C_{lk} 、 E_{lk} 、 D_{lk} および A_{lk} は、式 (43.1) から式 (43.4) において、 $l=3$ 、 $k=1$ とおいて求められる。

ポアソン比 $\nu=0.25$ 、内半径と外半径との比 $\rho=R_1/R_2=0.5$ としたときの計算結果を図-3 から 図-6 に、

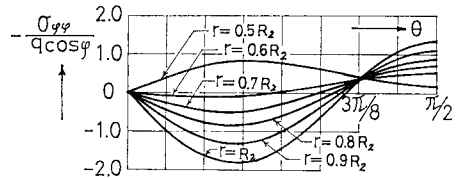


図-5 $\sigma_{\varphi\varphi}$ の分布

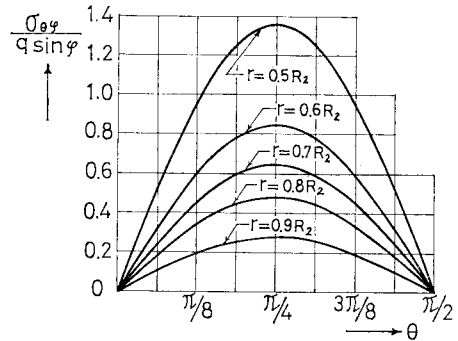


図-6 $\sigma_{\theta\varphi}$ の分布

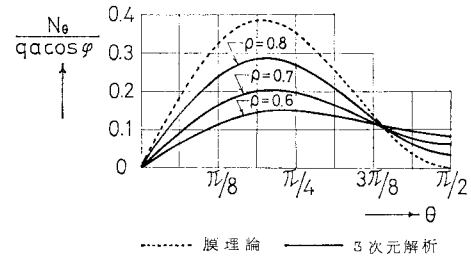


図-7 N_θ の分布

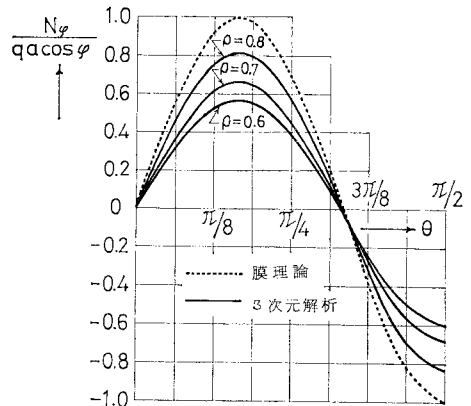


図-8 N_φ の分布

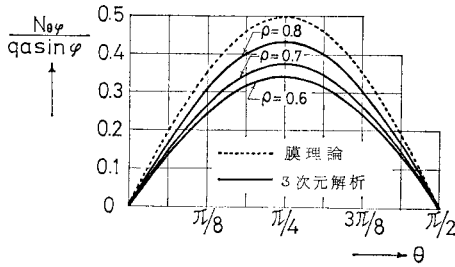


図-9 $N_{\theta\varphi}$ の分布

また、 ρ を変化させて、球殻の膜理論による解析結果と比較したものを 図-7 から 図-9 に示した。図-4 および 図-5 に示されているように、 $\sigma_{\theta\theta}$ および $\sigma_{\varphi\varphi}$ は大きな値を示し、それらと比較すると σ_{rr} は半分程度の値となっている。図-6 には、 $\sigma_{\theta\varphi}$ の分布を示したが、 $r=R_2$ における値は、図に表わせないほどに小さな値であるので示していない。

図-7 から 図-9 における N_θ , N_φ および $N_{\theta\varphi}$ は、それぞれ

$$N_\theta = \frac{1}{a} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\theta\theta} r dr, \quad N_\varphi = \frac{1}{a} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\varphi\varphi} r dr,$$

$$N_{\theta\varphi} = \frac{1}{a} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\theta\varphi} r dr$$

より求めた膜応力である。上式の a は、球殻の中央面の半径であり、 $a = (R_1 + R_2)/2$ である。膜理論による膜応力は、文献 16) の解法に従うと、

$$N_\theta = qa \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$N_\varphi = -qa \cdot \sin \theta (1 - 4 \cos^2 \theta) \cos \varphi$$

$$N_{\theta\varphi} = qa \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

となる。これらの図は、 ρ を 1 に近づけると、3次元解析による結果が、膜理論による結果に漸次近づいていくことを示している。これらの図には $\rho=0.8$ まで示しているが、 $\rho=0.9$ (肉厚と中央面の半径との比 ≈ 0.10) 以上の場合には、 $\theta=\pi/4$ において比較すると 3.1% 以下の相違である。これらの図は、膜理論の肉厚に関する適用限界の1つの目安を示しており、工学的に興味ある解析結果と思われる。

(2) 熱応力の計算例

7. に述べた熱応力問題の一計算例として、完全球殻が、

$r=R_1$ において、

$$T = T_1(\theta, \varphi) = T_0(1 + \sin \theta \cdot \cos \varphi/2)$$

$r=R_2$ において、

$$T = T_2(\theta, \varphi) = 0$$

と温度が与えられた場合を取り扱った。上式の境界値を式 (49.1) に代入すれば、

$$q_{nm} = 0$$

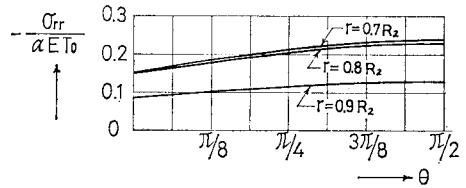


図-10 $\varphi=0$ における σ_{rr} の分布

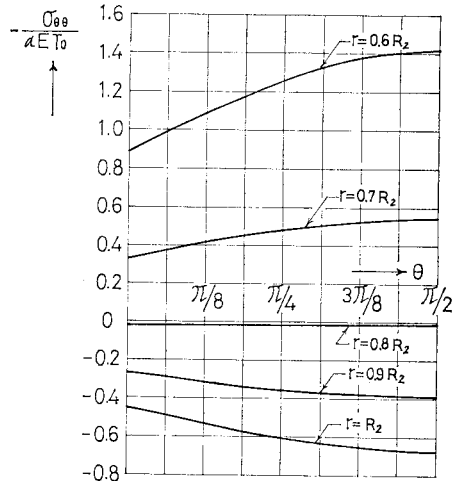


図-11 $\varphi=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

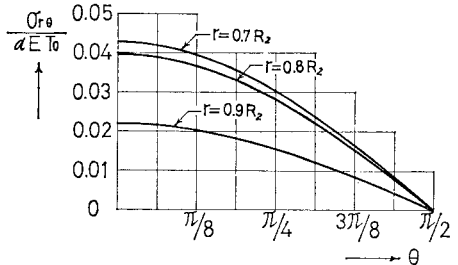


図-12 $\varphi=0$ における $\sigma_{r\theta}$ の分布

$$p_{nm} = \begin{cases} T_0 & (n=0, m=0) \\ T_0/2 & (n=1, m=1) \\ 0 & (\text{上記以外の場合}) \end{cases}$$

となるので、式 (43.1) から式 (43.4) において、 $l=0, 1; k=0, 1$ と置けばよいことになる。球殻内の温度は、式 (19), (49) および上式より、

$$T(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho T_0}{1-\rho} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) + \frac{\rho^2 T_0}{2(1-\rho^3)} \left(\frac{R_2^2}{r^2} - \frac{r}{R_2} \right) \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

与えられる。

$\nu=0.25, \rho=R_1/R_2=0.6$ としたときの計算結果を 図-10 から 図-12 に示した。 $\varphi=\pi/2$ における応力の値は、 θ に関して一定値となり、表-1 に示した。図-11 に示されているように、 $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}$ は、内側表面におい

で最大圧縮応力，外側表面において最大引張応力を示す。

表-1 $\varphi=\pi/2$ における応力の値

r	応力	$\sigma_{rr}/\alpha ET_0$	$\sigma_{\theta\theta}/\alpha ET_0$	$\sigma_{r\varphi}/\alpha ET_0$
0.6 R_2		0.0	-0.8844	0.0
0.7 R_2		-0.1535	-0.3314	-0.0429
0.8 R_2		-0.1449	0.0239	-0.0398
0.9 R_2		-0.0857	0.2696	-0.0220
R_2		0.0	0.4490	0.0

9. 結 語

球座標系における等温弾性問題および熱応力問題の1つの解として，式(5)から式(8)を示し，変位ポテンシャルを媒介して，変位および応力成分を求め，それらを非軸対称問題としての球殻の等温弾性問題および熱応力問題に適用し，その解法について述べた。

本報告に示した変位および応力成分は，陽な表現で得られており，境界条件に応じて，解に含まれる未知定数が軸対称問題と同様に厳密に数式の上で求められ，また，軸対称問題の解をその特別な場合として包含しているなどの特徴を有しており，境界値問題を解くに際しての有利な条件を具備していると思われる。等温弾性問題の1つとして，球殻の表面において，変位が規定された場合にも，本報告で示した解法がそのまま適用でき，第1種境界値問題と第2種境界値問題との相違は，解法上における本質的相違とはならず，また後者が前者に比較して煩雑になることもない。風荷重を受けた半球殻の計算例においては，3次元解析による結果が，肉厚を薄くしていくと，膜理論による解析結果に漸次近づいていくことを示し，球殻の膜理論は，肉厚と中央面の半径との比が0.10以下であれば，工学的には，十分正確に適用できることを示した。本報告においては，熱応力問題として，表面外力がない場合の解法について述べたが，一般的な場合として，表面外力も存在する場合には，6.の解と7.の解とを重ねることによって解析することができる。

本報告に示した解法は，等温弾性問題および熱応力問題がともに厳密な級数解で解かれる簡明な解法であるが，解法上における実際的な面での難しさは，たとえば式(34.1)あるいは式(49.1)より， a_{lk} あるいは P_{nm} を求めることにあるといえる。しかしながら，この難点は，将来，Legendreの陪関数に関する積分公式などがさらに見出されればおのずと解消されると思われる。

付録 ϑ_φ および λ_φ の導出

ϑ_φ および λ_φ を代表して f で表わすことにし，式

(6.1)あるいは式(7.1)の第3式に $r^2 \sin \theta$ をかけて書き換えると次式となる。

$$r^2 \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 3 \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sin \theta} f = 0$$

上式に $f=R(r)G(\theta, \varphi)$ を代入し， r のみの式と， θ および φ のみの式とに分離し，その両辺をある定数 $n(n+1)$ と置けば次の2つの方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} r^2 R'' - n(n+1)R &= 0 \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + 3 \cot \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \left\{ n(n+1) - \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \right\} G &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a)$$

式(a)の第1式は Euler の方程式であり，その解は次式となる。

$$R(r) = a_1 r^{n+1} + a_2 r^{-n} \dots\dots\dots (b)$$

第2式に $G=\theta(\theta)\Phi(\varphi)$ を代入し，再び変数分離を施せば次の2つの方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi'' + m^2 \Phi &= 0 \\ \sin^2 \theta \theta'' + 3 \cos \theta \cdot \sin \theta \theta' + \{ [n(n+1) - 2] \sin^2 \theta + 1 - m^2 \} \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

式(c)の第1式の解は次式となる。

$$\Phi(\varphi) = b_1 \cos m\varphi + b_2 \sin m\varphi \dots\dots\dots (d)$$

第2式に $\theta = \operatorname{cosec} \theta \cdot \theta_1$ を代入し， $\cos \theta = \mu$ とおいて変数変換を施すと次式が得られる。

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 \theta_1}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\theta_1}{d\mu} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right\} \theta_1 = 0$$

上式は，位数 m ，次数 n の Legendre の陪微分方程式であり，その解は，

$$\theta_1 = c_1 P_n^m(\mu) + c_2 Q_n^m(\mu)$$

したがって，

$$\theta(\theta) = \operatorname{cosec} \theta \cdot \theta_1 = c_1 \frac{P_n^m(\mu)}{\sin \theta} + c_2 \frac{Q_n^m(\mu)}{\sin \theta} \dots\dots\dots (e)$$

が得られる。以上の解により，

$$\begin{aligned} G(\theta, \varphi) &= \theta(\theta)\Phi(\varphi) \\ &= (b_1' \cos m\varphi + b_2' \sin m\varphi) \frac{P_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ &\quad + (c_1' \cos m\varphi + c_2' \sin m\varphi) \frac{Q_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= R(r)G(\theta, \varphi) \\ &= r^{n+1} (d_1 \cos m\varphi + d_2 \sin m\varphi) \frac{P_n^m(\mu)}{\sin \theta} \\ &\quad + r^{-n+1} (d_1' \cos m\varphi + d_2' \sin m\varphi) \frac{Q_n^m(\mu)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$+ r^{-n}(e_1 \cos m\varphi + e_2 \sin m\varphi) \frac{P_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

$$+ r^{-n}(e_1' \cos m\varphi + e_2' \sin m\varphi) \frac{Q_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

が得られる. 上式中の $Q_n^m(\mu)$ は第2種の Legendre 陪関数であり, $\mu = \pm 1$ に特異点を有するので除外すると,

$$f = r^{n+1}(d_1 \cos m\varphi + d_2 \sin m\varphi) \frac{P_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

$$+ r^{-n}(e_1 \cos m\varphi + e_2 \sin m\varphi) \frac{P_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

となる. f は ϑ_φ あるいは λ_φ のどちらかを表わすものであるが, ϑ_φ および λ_φ はともに $m=0$ のとき, すなわち軸対称問題のときには不要な変位ポテンシャルであるので m で割った任意定数を新たな任意定数で置き換えると,

$$f = r^{n+1}(L_{nm} \cos m\varphi + E_{nm} \sin m\varphi) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

$$+ r^{-n}(M_{nm} \cos m\varphi + C_{nm} \sin m\varphi) \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

が得られる. 上式の中から, ϑ_φ として,

$$\vartheta_\varphi = r^{n+1} \cos m\varphi \cdot L_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

$$+ r^{-n} \cos m\varphi \cdot M_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

を取り出し, λ_φ として,

$$\lambda_\varphi = r^{n+1} \sin m\varphi \cdot E_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

$$+ r^{-n} \sin m\varphi \cdot C_{nm} \frac{mP_n^m(\mu)}{\sin \theta}$$

を取り出して, それぞれ, 式 (6.1) の第1および第2式, 式 (7.1) の第1および第2式に代入し, 不定積分定数を0と置けば, 式 (15) および式 (16) に示した変位ポテンシャルが容易に得られる.

参考文献

- 1) Lamé, M.G. : Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques, Journal de Mathématiques pures et appliquées, Vol. 19, pp. 51~87, 1854.
- 2) Thomson, W. : Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 153, pp. 583~616, 1863.

- 3) Somigliana, C. : Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e Matematiche, Series 1, pp. 100~173, 1887.
- 4) Chree, C. : The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 14, Part III, pp. 250~369, 1889.
- 5) Cerruti, V. : Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per dati spostamenti de'punti delle due superficie limiti, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Vol. 5, pp. 189~201, 1889.
- 6) Tedone, O. : Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo, Annali di Matematica pura e applicata, Milano, Series 3, Vol. 10, pp. 13~64, 1904.
- 7) Fichera, G. : Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico, Atti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Series 8, Vol. 6, pp. 582~589, 1949.
- 8) Aquaro, G. : Sul calcolo delle deformazioni di uno strato sferico elastico, Atti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Series 8, Vol. 7, pp. 289~297, 1949.
- 9) Sternberg, E. et al. : On the axisymmetric problem of elasticity theory for a region bounded by two concentric spheres, Proc. First U.S. Nat. Cong. App. Mech., pp. 209~215, 1951.
- 10) Lur'e, A.I. : Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, Chap. 6 and 8, Interscience Publishers, 1964.
- 11) Little, R. Wm. : Elasticity, pp. 391~400, Prentice-Hall Inc., 1973.
- 12) 宮本 博 : 3次元弾性論, pp. 17~18, および終りの表, 裳華房, 1967.
- 13) Love, A.E.H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., p. 56 and p. 90, Dover Publications, 1944.
- 14) 森口繁一ほか : 数学公式III, p. 126 および p. 136, 岩波書店, 1975.
- 15) Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier : Theory of Elasticity, 3rd ed., p. 455, McGraw-Hill Kogakusha, 1970.
- 16) Girkmann, K. : Flächentragwerke, 6. Aufl., pp. 379~383, Springer-Verlag, 1963.

(1979.9.28・受付)