

## 山地小流域の瞬間単位図と斜面長分布の関係

THE RELATION BETWEEN INSTANTANEOUS UNIT HYDROGRAPH AND  
SLOPE-LENGTH DISTRIBUTION IN MOUNTANEOUS SMALL BASIN山 田 正\*  
By Tadashi YAMADA

## 1. ま え が き

流域に降った雨水が、その後どのような流出の過程をたどって流域の出口にまで達し、またその間の雨水の運動を支配している物理法則はどのようなものになっているのかといった問題は、水文学の中で、特に流出解析の中では従来より精力的に研究されて来た問題の一つである。一方、ある一つの流域において、あらかじめその強度なり、継続時間等が設定された降雨に対し、流出のピーク流量やその水位、出現時刻等を予測することは、流域の治水対策を考える際の必要不可欠のものとなっており、実用上の目的に耐え得るさまざまな流出解析モデルが提案されている。しかし、流域内の雨水の挙動を物理的にかつ数学的に忠実に反映した流出解析手法ならば、降雨-流出の予測精度は極めて高いことが考えられるが、その逆は必ずしも真とはいえないであろう。ここに流出解析の困難な点が存在すると考えられる。なぜならば、流域内での雨水の挙動を物理的にかつ詳細に知りたいたとして、流域内を詳細に踏査しても、われわれが得ることのできるものは、地表というほぼ 2 次元の平面からの情報（それはそれで貴重な情報である）のみであり、雨水の運動の重要な一側面である地中での浸透現象（中間流、地下水等）までを直接観察することは通常の方法では困難である。最近では地中から湧き出す水や、河川の水、さらには融雪時の流水の温度<sup>3)</sup>、水質<sup>4)</sup>等を測定する方法や、人工および自然に存在する同位元素を用いる方法<sup>5)</sup>が開発されてきた。一方、降雨流出の一連の水循環に対し、適当な物理モデルを設定し、実測のハイドログラフに合うように調整された内部パラメーターや、解析モデルそのものを用いて流域内に降った雨水の挙動を推定する方法が常套的に用いられてきた。しかしながら流出モデルを用いる限り、そこで扱われている雨水の挙

動は現実の雨水の挙動とは一定の距離があり、必ずしも 100% 対応づけられているわけではない（実用上の目的は十分に満たしているかも知れないが）。このような実情を踏まえて本研究は、直接目で見得確認し得る流域の姿と、ある程度抽象化（モデル化）された流出解析モデルとの間の距離をできるだけ短縮することを目指している。ここで扱っているのは、山地流域の地形-斜面の状況やその法則性がどの程度流出過程に反映しているのかという問題である。ところで最近平野<sup>3),4)</sup>は山地流域の斜面長分布を流出解析の中に組み入れる手法を提示している。本論文は、この斜面長の統計的性質と流域内での雨水の運動法則との関連性を検討し、さらに両者をより有機的に組み込むことを目的としている。なお、降雨流出系は本来非線形になっていることは多くの人の認めるところであるが、流出過程の大略は単位図法に代表されるような線形解析で説明が可能であることから、本研究においても線形の範囲内で議論は進められている。

## 2. 理論的考察

## (1) 浸透流に関して

前章で述べたように本研究は、流域内の雨水の挙動のさまざまな流下過程をできるだけ物理的に解析することを目的としている。山地斜面に降った雨水の流下過程のうち、最も確認しやすいのは、落葉等からなる腐植土層や、より地中深いところを流れている浸透流（地下水）であろう<sup>1),2)</sup>。よって以下 図-1 に示すような流れ方向（斜面方向）、および鉛直方向に均一な浸透場を考え、このうに降雨からの水供

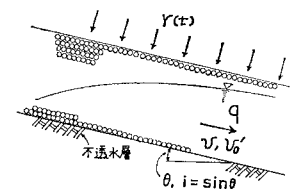


図-1 斜面を流れる浸透流の模式図

\* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

給  $r(t)$  があつた場合の理想化された浸透流を考える。この問題に関し、かつて著者は浸透流を Darcy 則域に限ることなく、non-Darcy 則の領域まで一般化した浸透流の問題として理論的に考察し<sup>8),9)</sup>、ある条件(水面勾配が路床(不透水性基盤)勾配に比べて十分小さい)のもとでは、流れを kinematic wave として取り扱えることを示し、さらにこのときの降雨に対する流出(量)の応答を解析的に導き出している。続いて室内実験により、この理論解析の妥当性を検証している。ここでは以下にその結果のみを要約してみる。まず、Darcy, non-Darcy 則にかかわらず不透水性基盤上の浸透流の基礎式は運動方程式の式(1)および連続式の式(2)で与えられる。

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3\bar{f}(1-\lambda)v^2}{4d\lambda^3g} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{q\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = r_0(t) \cos \theta = r(t) \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $i$  は不透水性基盤の勾配、 $h$  は水深、 $d$  は浸透場が一樣な直径の球で構成されているときの球径、 $\lambda$  は空隙率、 $\bar{f}$  は浸透流の抵抗係数、 $v$  はみかけの流速、 $r_0(t)$ 、 $r(t)$  は降雨強度(降雨から浸透流に注がれる雨水の地中での速度の意味)、 $\theta$  は不透水性基盤の傾斜角度である。

次に、式(1)でオーダー比較を行うと、左辺のはじめの3項が卓越していることがわかる。次にその3項を用いて式(2)を書き換えるわけであるが、このとき  $i \gg \partial h / \partial x$  が成り立つような場合を考えてみると、式(2)は単位幅当たり流量  $q(t) (\approx vh)$  に関する式(3)となる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_0' \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{2i\lambda} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = r(t)v_0' \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $v_0'$  は浸透流の真の流速であり、 $v_0' = v/\lambda$  で与えられる。式(3)からわかるように流量  $q(t)$  は上からの降雨強度  $r(t)$  の流入を受けつつ、また真の流速  $v_0'$  で下流に運ばれつつ、 $q/2i\lambda$  の拡散係数をもつ第3項により拡散されて斜面を流れ下っている。ここで拡散係数の変化は本質的に解に大きな変化を与えないことより、一定値  $q_0$  で置き換えると、式(3)は解析的に解き得る

形となる( $q_0$  としてどのような値を取るべきかは実験的に定められ、式(3)で拡散項を省略した式から得られる解(合理式と等しい)のピーク流量の1/20~1/10の値を取ると実験との一致はよい<sup>8)</sup>)。このとき解  $q(t, x)$  は次式で与えられる。

$$q(t, x) = \int_0^t r(t-\tau) \cdot k(\tau, x) d\tau \dots\dots\dots(4)$$

$$k(\tau, x) = v_0' \left\{ 1 - \exp\left(\frac{bx}{2a}\right) G(\tau, x) \right\} \dots\dots\dots(5)$$

$$G(\tau, x) = \frac{1}{2} \left[ 2 \cosh\left(\frac{bx}{2a}\right) - \exp\left(\frac{bx}{2a}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{b^2\tau/4a+x}/2\sqrt{a\tau}}{\right)} + \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{b^2\tau/4a-x}/2\sqrt{a\tau}}{\right)} \right] \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $a=q_0/2i\lambda$ 、 $b=v_0'$  である。式(4)からわかるように解  $q(t, x)$  は  $k(\tau, x)$  を応答関数とするたみこみ積分で表わされている。式(4)の解と実験結果との比較には、文献8)を参照されたし。ところで、式(3)を斜面の長さ  $L$ 、真の流速  $v_0'$  を用いて書き改めると、 $1/Re = q_0/2i\lambda Lv_0'$  で表わされる唯一の無次元パラメーター  $Re$  が現われ<sup>注)</sup>、 $Re$  が100より大きいときには式

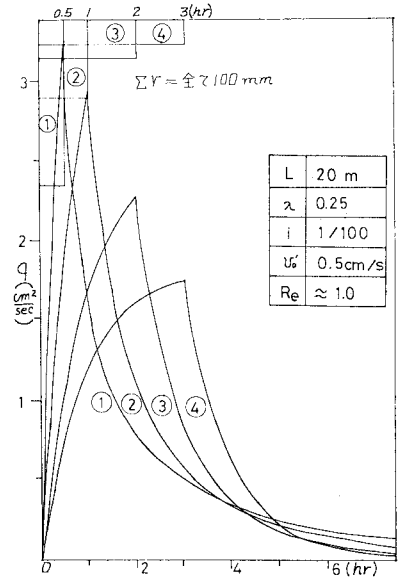
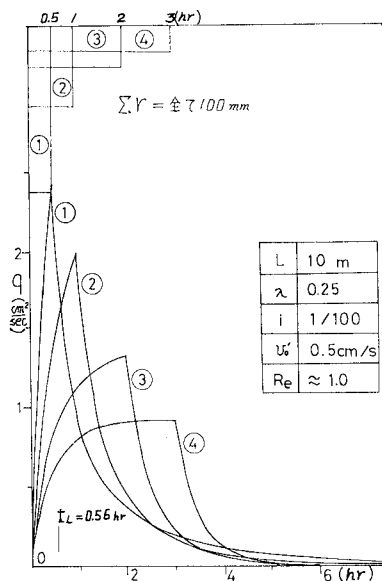


図-2 降雨と流出

注) 式(3)を上記の  $L$ 、 $v_0'$  を用いて無次元化すると、次式となる<sup>8)</sup>。

$$\frac{\partial q_*}{\partial t_*} + \frac{\partial q_*}{\partial x_*} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 q_*}{\partial x_*^2} = r_*(t)$$

ここに、 $t_* = tv_0'/L$ 、 $x_* = x/L$ 、 $q_* = q/v_0'L$ 、 $r_* = r/v_0'$  である。上式の無次元化は Navier-Stokes 方程式の無次元化と同じであり、パラメーター  $Re$  は流体力学におけるレイノルズ数と同様の意味をもっている。以後\*は省略されている。

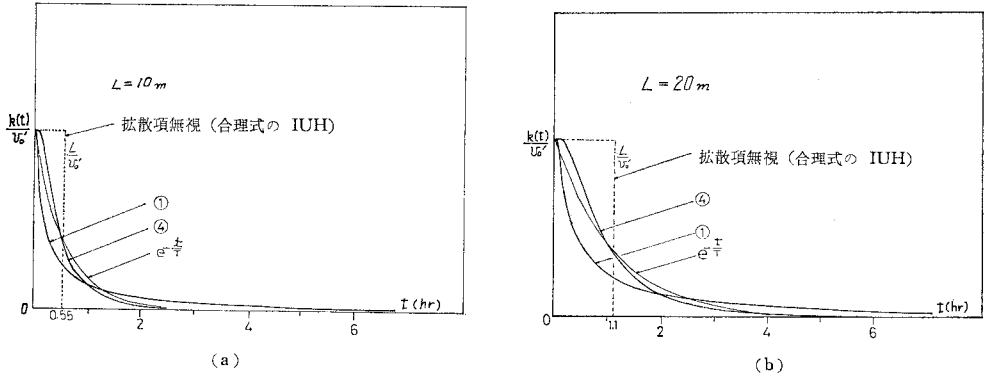


図-3 瞬間単位図

(3) の解は合理式に漸近し、また 1 より小さいときにはタンクモデルの解に似た結果を生じる。以上が文献 8) からの要約である。ところで、式 (5) の  $k(\tau, x)$  はいわゆる応答関数になっているが、水文学の用語では瞬間単位図 (Instantaneous Unit Hydrograph, IUH) とよばれているものである。式 (5), (6) からわかるように  $k(\tau, x)$  は斜面の勾配  $i$ , 空隙率  $\lambda$ , 真の浸透流速  $v_0'$  等の斜面固有のパラメーターで変化する他に、 $q_0$  という降雨の特性によって変化するパラメーターを内包している。よって同一の斜面でも降雨強度やその継続時間が変われば  $k(\tau, x)$  はそれにつれて変化する。ここで図-2 (a), (b) および 図-3 (a), (b) はそれぞれ斜面の長さ  $x(=L)$  が 10 m と 20 m の場合につき、単位幅流量  $q(t, L)$  と IUH,  $k(\tau, L)$  を式 (4), (5) に基づいて計算したものである。ここに与えた 4 種類の降雨はすべて総降雨量が 100 mm となっており、その継続時間が 30 分, 1, 2, 3 時間となっている。これらの計算はすべて  $R_e$  が 1 に近い、それ以下の場合であり、上述のように式 (3) の左辺第 3 項が第 2 項に比べて卓越している場合である。ところで 図-3(a), (b) からわかるように  $R_e$  が 1 に近い、あるいは 1 以下の場合には、 $k(\tau, L)/v_0'$  は  $\exp(-\tau/T)$  の関数形をしていることがわかる。ここに  $T$  は  $k(\tau, L)/v_0'$  と  $\tau$  軸とによって囲まれた面積であり、式 (3) の方程式の性質上  $L/v_0'$  にもなっている。すなわち長さ  $L$  の下流端まで達するのに要する到達時間である。ところで山地小流域におけるパラメーター  $R_e$  の取り得る値の範囲を検試してみると、 $R_e = 2i\lambda Lv_0'/q_0$  であるが、 $2i\lambda = 10^{-2} \sim 10^{-1}$ ,  $v_0' = L/T = 10 \sim 100 \text{ m/1} \sim 10 \text{ h}$ ,  $q_0/L = 10 \text{ mm/h}$  等が考えられるので  $R_e = 10^1 \sim 10^2$  となり、文献 8) や上にも述べたように、式 (3) の解は、拡散項に比べて移流項の卓越した場合の合理式となる。しかし著者の知る限りの資料では<sup>1)</sup> 数十 m 以上の山地斜面からの流出ハイドログラフが合理式の形で表わされた例はなく、図-3 (a), (b) に示した形のハイドログラフの場合が多いようである。つまり、

$R < O(1)$  の場合である。この理由としては、上記式 (3) は山地斜面全体にわたって平面的に流れ下る浸透流を表現しているのに対し、実際には、多くの研究者が指摘しているように、“水みち”を形成して流下していることが考えられる。この“水みち”(この場合は浸透流の水みちである) 流出に対して式 (3) を適用したならば、既述の  $R_e (= 2i\lambda v_0'/q_0)$  は、1 のオーダーあるいは 1 以下の十分に小さな値となる。なぜならば、 $i, \lambda, v_0'$  は先ほど掲げた数値を取り続ける一方、 $q_0$  (水みちの単位幅流量) は雨水の集中によって非常に大きくなり、結果として  $R_e < O(1)$  となるからである。よって以下の展開においては  $R_e < O(1)$  の場合の式 (3) の解の近似式である exponential 形を式 (5) の  $k(\tau, L)/v_0'$  のかわりに用いる。

ところで上記のような考え方をしたときには本論文は、まえがきのところで述べた著者の目ざす物理的な水文学からは逸脱し、たとえば式 (3) を 1 つの斜面に対するモデル方程式と見なしているように思える。しかし、従来の多くの研究が (山地) 流域全体を 1 つのスケールとして取り扱っているのに対し、本論文は以下に展開するように (山地) 流域内の 1 つの斜面を最小単位としてとらえており、より細かく現象をとらえているということができよう。また 1 つの斜面内部の微細構造、および高樟らの提唱している A 層・地下帯水層の 2 層モデル<sup>1)</sup> や Stanford Watershed モデルの上層・下層の 2 層モデル等と関連した鉛直構造に関しては今後検討していく予定である。

さて、式 (5) の  $k(\tau, L)$  が降雨強度によって異なった値をとる  $q_0$  によって降雨ごとに少しずつ挙動が異なるのに対し (その面積は常に  $L/v_0' = T$  ではある)、 $\exp(-\tau/T)$  の形の応答関数を使う根拠は、たとえ  $k(\tau, L)$  が  $q_0$  あるいは  $R_e$  で変化するとはいえ、文献 8) (論文 IV) の 図-2 や本文 図-4(a), (b) に示すように、 $k(\tau, L)$  の変化は  $R_e$  のオーダーごとに大きく変化するのみであり、同一斜面で同じ程度の強度の降雨を考慮

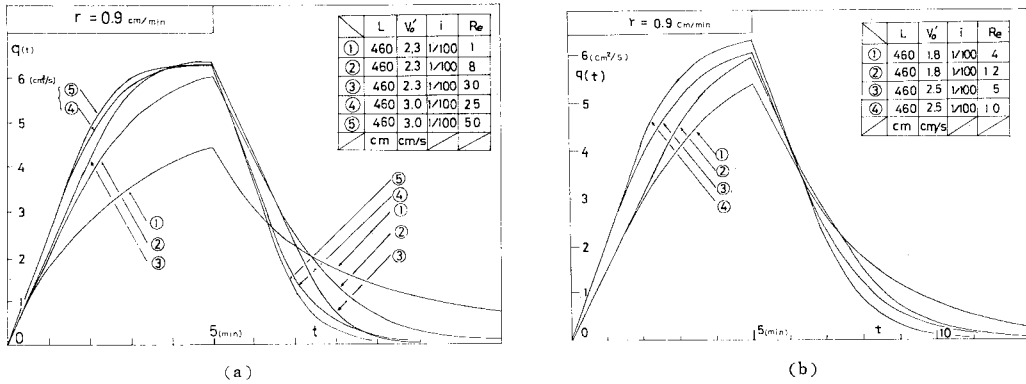


図-4 無次元パラメーター  $R_e$  の変化に対するハイドログラフの挙動  
 (計算に用いた各種の数値は室内実験(文献 8)に対するものであるが  
 計算結果を無次元表示すれば一般的な結果ともなる)

ときには  $R_e$  が 1 オーダーも変わることはなく、このことから  $q_0$  あるいは  $R_e$  の変化にかかわらず上記の exponential 形を用いるのである。この exponential 形を用いることにより、式 (4) は書き改められ、さらに、単位幅流量  $q(t, L)$  のかわりに流出高  $q_0(t, L) = q(t, L) / L$  と到達時間  $T = L/v_0'$  を用いて、

$$q_0(t, L) = \int_0^t \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) r(t-\tau) d\tau \dots (7)$$

となる。ここで、 $1/T = \alpha$  と置くと、式 (7) は単位面積当たりの流域を通減率  $\alpha$  のタンクモデルによって解析する、いわゆる菅原のタンクモデルの基本式<sup>10)</sup> になっていることがわかる。式 (7) により長さ  $L$  の単位幅斜面を雨水が流下する際の斜面末端での流量(出高)が、上記の条件のもとでは到達時間  $T (= L/v_0')$  のみにより近似的に表わされることがわかった。

(2) 斜面長分布と瞬間単位図

ところで、上記の  $q_0(t, L)$  がわかっただけでは複雑な地形、地質をもつ実流域に適用することはできない。ところで、実流域の複雑な地形をそのまま解析の中に持ち込むことは事実上不可能であるので、次の ㉔、㉕、㉖ の仮定を置き、以下の展開を行ってみた。

- ㉔：流域の地質はいたるところ均一であり、流域の斜面を構成する土壌の粒径、空隙率等も一樣である。
- ㉕：流域を構成するさまざまな斜面の勾配はすべて同じである。
- ㉖：斜面からの流出量はただちに流域下流端に達する(河道効果なし)。

上記の ㉔ と ㉕ の仮定のもとでは、この流域の雨水の真の浸透速度  $v_0'$  はいたるところ等しくなる。よって到達時間  $T (= L/v_0')$  を決定するものは斜面の長さ  $L$  のみとなる。ところで、上記の仮定のもとで流域を河道に

沿って幅  $db$  ごとの  $n$  個の斜面に分割すると、 $db \times L$  のいくつかの短冊型の斜面を得る。このとき、長さ  $L_i$ 、幅  $db$  の 1 つの斜面からの流出量  $\Delta Q_i$  は式 (7) を用いて

$$\begin{aligned} \Delta Q_i(t, L_i) &= db L_i q_{0i} \\ &= db \cdot L_i \int_0^t \frac{1}{T_i} \exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right) r(t-\tau) d\tau \dots (8) \end{aligned}$$

となる。よって全流域からの流量  $Q(t)$  は、

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i(t, L_i) = \sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot L_i \cdot db \dots (9)$$

となる。ところで、流域面積を  $A$  とし、 $db \cdot L_i / A = \phi(L_i) \cdot \Delta L$  とおくと  $\phi(L)$  は流域の斜面長の密度関数になっていることがわかる。ところで、上記の ㉔、㉕ の仮定のもとでは、流域を構成する各斜面の土質と斜面勾配は一定であることより、真の浸透流速  $v_0'$  は常に一定であり、また  $T = L/v_0'$  の関係から到達時間  $T$  は斜面長  $L$  のみの関数となる。よって斜面長分布  $\phi(L)$  と到達時間  $T$  の分布(以後  $\varphi(T)$  と記す)は次の関係を満たしている<sup>3), 4)</sup>。

$$\frac{db \cdot L}{A} = \phi(L) \cdot \Delta L = \phi(L) v_0' \Delta T = \varphi(T) \Delta T \dots (10)$$

この関係を式 (9) に用いて、

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n q_{0i} L_i db = A \sum_{i=1}^n \varphi(T_i) \Delta T q_{0i} \dots (11)$$

を得る。次に  $n \rightarrow \infty$  とし、式 (8) を用いると、

$$Q(t) = A \int_0^\infty \varphi(T) \int_0^t \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) r(t-\tau) d\tau dT \dots (12)$$

$$= A \int_0^\infty \frac{1}{T} \varphi(T) \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) r(t-\tau) d\tau dT \dots (13)$$

$$= A \int_0^t r(t-\tau) \int_0^\infty \frac{1}{T} \varphi(T) \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) dT d\tau \dots (14)$$

となる。

また、式(14)でアンダーラインの部分がこの流域での瞬間単位図になっていることがわかる。よってアンダーラインの項を  $H(\tau)$  とおくと、

$$H(\tau) = \int_0^\infty \frac{1}{T} \varphi(T) \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) dT \quad \dots\dots(15)$$

となり、 $Q(t)$  は、

$$Q(t) = A \int_0^t r(t-\tau) H(\tau) d\tau \quad \dots\dots(16)$$

で表わされ、流域出口での流量  $Q(t)$  は降雨と瞬間単位図とのたたみこみ積分で表わされる。ところで、式(12)より  $\varphi(T)$  はさまざまな時定数  $T$  をもったタンクに  $\varphi(T)dT$  の重みに応じて雨を割り振っていると解釈することができる。さらに別の解釈として、おのおのの時定数をもったタンクはその流域面積が  $A\varphi(T)dT$  になっており、その線形和として流量が与えられていると考えることができる。よって  $\varphi(T)$  は流域面積や雨の時定数  $T$  に応じて分配させるいわゆる分配関数になっている。

(3) 有効降雨の推定法

ところで、本理論の構成において降雨  $r(\tau)$  としては有効降雨を考えている。有効降雨の推定法には従来よりさまざまな方法が提案されているが、ここでは中安法として知られている推定法<sup>10)</sup>をより一般的に表現した以下の方法を用いる。まず、一雨降雨の総降雨量を  $R$  とすると、 $R = \sum r(t)$  である。ここに、 $r(t)$  は実際に降った降雨強度である。次に一雨降雨による総流出量を  $Q$  とすると、その間の総損失量  $Q_l$  は  $Q_l = R - Q$  である。一雨降雨の総降雨量と総損失量の関係はしばしば他の研究者の報告の中でも見受けられるが、小流域に限定してたとえば参考文献 19) を参照すると、 $Q_l -$

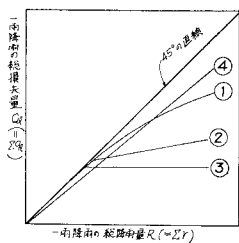


図-5 一雨降雨の総損失量と総降雨量の典型的な関係

$R$  の関係は大まかに分けて 図-5 に示すような 4 通りの型があるように思われる。この  $Q_l - R$  の一般的な関数関係をいま、

$$Q_l = F(R) \quad \dots\dots(17)$$

とおく。次にこの関数関係が時間領域にまで適用できるとする。この仮定のもとに、

$$R(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau \quad \dots\dots(18)$$

$$Q_l(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau - \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \dots\dots(19)$$

が成立する。ここに、 $u(t)$  は実際に流出に寄与したい

わゆる有効降雨である。式(19)と式(17)から、

$$\int_0^t r(\tau) d\tau - \int_0^t u(\tau) d\tau = F(R(t)) \quad \dots\dots(20)$$

が成立するが、この式の両辺を  $t$  で微分すると、

$$r(t) - u(t) = \frac{\partial F}{\partial R} \cdot \frac{dR(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial R} r(t) \quad \dots\dots(21)$$

となり、求める有効降雨  $u(t)$  は次式で表わされる。

$$u(t) = \left(1 - \frac{\partial F}{\partial R}\right) r(t) \quad \dots\dots(22)$$

よって過去の多くの一雨降雨のデータから総降雨量  $R$ -総損失量  $Q_l$  の曲線  $Q_l = F(R)$  を描くことができる場合には、式(22)を用いて有効降雨  $u(t)$  を推定することができる。このとき  $F(R)$  として図-5 に示す①を用いると、降り始めてからの累積雨量  $R$  がある値に達するまでは  $u(t)$  は 0 であり、その後次第に降雨強度  $r(t)$  に占める有効降雨  $u(t)$  の割合が増大していくタイプであり、Horton の浸透能方程式を用いる場合に似ている (Horton の浸透能方程式を用いる場合、一般的には有効降雨そのものが時間とともに増大していく)。図中の②の場合は、ある累積雨量までは①の場合と同じであるが、その後は各時刻の降雨強度  $r(t)$  の一定割合の  $u(t)$  となる。③の場合はある累積雨量までの降雨はすべて損失降雨となり、その後の雨は 100% 近くが有効降雨となる。④は常に一定比率の降雨が有効降雨となる。このように、①は Horton 方式に似ており、③は初期一括損失差引法<sup>18)</sup>、④は一定比損失差引法、とそれぞれ対応しており、上に示した手法は中安法の自然な拡張であるとともに、従来より提案されている種々の推定法を内包しているといえよう。しかし、上記の手法も既述の仮定に立脚しており、その物理的合理性は今後検討されねばならないであろう。

(4) 瞬間単位図と流出過程の解釈

前節で示した有効降雨の推定法、式(22)を式(12)に代入することにより流出過程の物理的解釈が可能となり、以下に展開される。

まず、式(12)は次式となる。

$$Q(t) = A \int_0^\infty \varphi(T) \int_0^t \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \left\{ 1 - \frac{\partial F}{\partial R}(t-\tau) \right\} r(t-\tau) d\tau dT \quad \dots\dots(23)$$

ここで、式(23)は以下に示すように、3通りの解釈が可能である。

① 降雨として有効降雨をとる。時間に関して不変のシステムは、 $\varphi(T)$  に応じて有効降雨を受けとる。

すなわち、

$$Q(t) = A \int_0^t \left\{ 1 - \frac{\partial F}{\partial R} \right\} r(t-\tau) \cdot \int_0^\infty \frac{1}{T} \varphi(T) \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) dT d\tau \dots\dots\dots (24)$$

の形で表現される。

- ② 各時定数ごとに  $A\varphi(T)dT$  の流域面積が割り振られるが、その比率は変わらずに、その絶対値が時間とともに増減する。すなわち、

$$Q(t) = \int_0^\infty \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \int_0^t \left\{ 1 - \frac{\partial F}{\partial R} \right\} A\varphi(T) \cdot r(t-\tau) d\tau dT \dots\dots\dots (25)$$

- ③ 各時定数ごとの小流域は降雨に対するその応答を時間とともに増減させる（その形状は相似に保ったまま）。すなわち、

$$Q(t) = A \int_0^t r(t-\tau) \int_0^\infty \varphi(T) \cdot \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \left\{ 1 - \frac{\partial F}{\partial R} \right\} dT d\tau \dots\dots\dots (26)$$

上記の解釈のうち、①で  $\varphi(T) = \delta(T - T_0)$  ( $\delta$  は Dirac のデルタ関数) とした場合が、最も簡単なタンクモデルに相当する。②は最近 Lee and Delleur<sup>13)</sup> によって提案されている流出に寄与する流域面積が時間とともに変化するとしたモデル(A variable source model)に相当している。③はシステムの応答が非定常に変化するモデル(たとえば、非定常ユニットハイドログラフ等の概念)の一種である。このように式(23)は従来よりさまざまな観点から検討され、解析されてきた種々の流出解析モデルを内包した式であるといえよう。ところで、上記の式展開で用いた到達時間と斜面長の分布の等価性の概念が成立するためには、既述の3つの仮定が実流域において成立していなければならない。あるいはそのような仮定をしたことが誤った結論に導いていないかを検討しなければならない。よって、以下に実流域の斜面長分布と到達時間の分布をそれぞれ別個に検討してみる。

### 3. 実流域の斜面長分布

本論文で検討した実流域としては、山梨県甲府市の荒川右支川にある梓川流域(A)、長野県天竜川左支川三峰川右支川にある美和小試験地(B)、茨城県筑波山麓裏筑波小試験地山口川流域(C)、同じく祖父ヶ峰流域(D)の4つの小流域であり、以後それらの流域をそれぞれA, B, C, Dとよぶ。この4流域の流域面積はそれぞれ0.4, 1.3, 3.1, 0.16 km<sup>2</sup>である。また、これらの流域はすべて広葉あるいは針葉樹林によって覆われており、開

発はほとんどされていない。著者が、A, B, C, Dの山地小流域を採用したのは本論文で取り扱っているように河道の効果の余り大きくない流域で、かつ落葉等からなる腐植土層が発達して浸透流(中間流)からの寄与が大きいと思われる流域を考えたからである。

ところで斜面長分布の作製にあたっては、平野<sup>3),4)</sup>や角屋<sup>12)</sup>らと同様にまず流域の地図上で河道を探し出し、

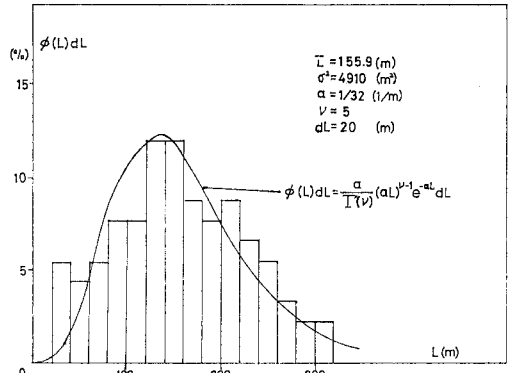


図-6(a) 流域Aの斜面長分布 ( $db=20$  m,  $1/3\ 900$  の地形図より読み取る)

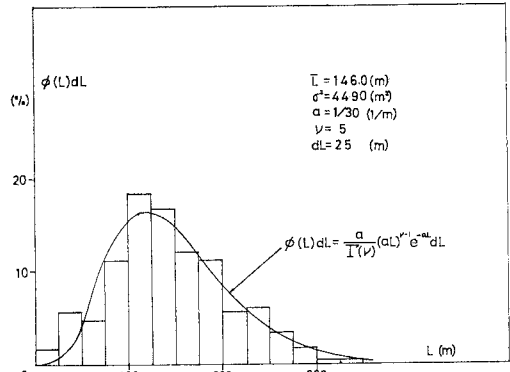


図-6(b) 流域Bの斜面長分布 ( $db=25$  m,  $1/23\ 000$  の地形図を写真により拡大し読み取る)

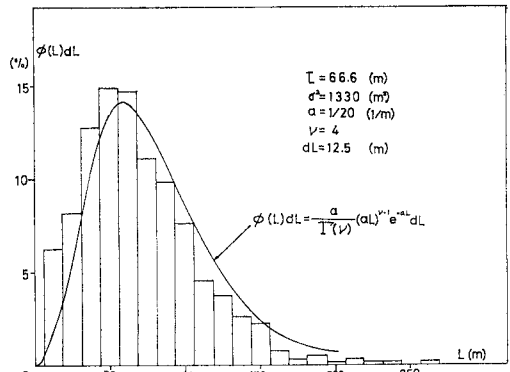
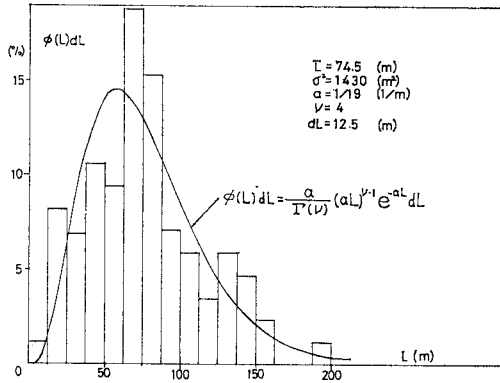


図-6(c) 流域Cの斜面長分布 ( $db=12.5$  m,  $1/30\ 000$  の地形図を写真により拡大し読み取る)



図一6(d) 流域 D の斜面長分布 ( $Δb=12.5\text{ m}$ ,  $1/30\ 000$  の地形図を写真により拡大し読み取る)

これを等高線に直交させつつ陵線まで引く。また、等高線が凹んでいるところは洪水時には一時的に河道になるものとして上記と同様に陵線まで引く。このようにして流域内での河道の分布が決まったら、次にこの河道を微小幅  $Δb$  ごとに区切り、各線分の中点から等高線に直交させつつ陵線まで線を引き、この長さ ( $L_i$ ) を測定する。このようにして流域を、 $Δb \times L_i$  の長方形に分割し (実際には厳密な意味での長方形にはならない)、次に斜面長  $L_i$  の度数分布図を描く。図一6 (a), (b), (c), (d) はこのようにして求めた流域 A, B, C, D に関する斜面長  $L$  の密度関数  $φ(L)$  の図である。ところで、斜面長分布  $φ(L)$  に関して平野ら<sup>4)</sup> はこれに対数正規分布をあてはめ、角屋ら<sup>12)</sup> はガンマ分布を用いている。対数正規分布とガンマ分布は本質的に大差のない分布形をしていることより、本研究では以後の解析の便を考え、ガンマ分布を用いて斜面長分布のあてはめを行った。図一6 (a), (b), (c), (d) より斜面長分布としてガンマ分布を用いることができることがわかる。また、これらの図より流域面積の大小にかかわらず (流域面積では C 流域と D 流域で 20 倍異なる)、斜面長分布はほぼ同一の関数形で表わされていることがわかる。このことに関しては、後にもう一度議論をする。

#### 4. 到達時間の分布

##### (1) 理論的考察

前節までの議論により、流域の応答関数  $H(\tau)$  はさまざまな時定数 (到達時間) をもつ流出成分の重み ( $φ(T)$ ) つきの和として表わされることを示し、さらに既述の条件のもとではその到達時間の分布と流域の表面を構成する斜面長分布との間に等価性が成り立つことを示した。さらに流域の斜面長分布が 4 つの流域につき、ほぼガンマ分布で表わされることを示した。本章においては逆に

ハイドログラフの逓減部の性質から、そのような逓減部の性質を生み出すための到達時間の分布を推定してみる。さて四俵<sup>14)</sup> や Schubert<sup>15)</sup> の研究によって、洪水流出のハイドログラフの逓減部はその大部分において  $t^{-α}$  の形状をしていることがわかっている。ここに  $t$  は時間、 $α$  はある定数である。このとき本文式 (23) で到達時間の分布  $φ(T)$  がどのような形をしていれば、洪水流出のハイドログラフの逓減部が  $t^{-α}$  の形になるかという問題を扱ってみる。ここで式 (14) の降雨  $r(\tau)$  として継続時間  $t_r$ 、降雨強度  $r_0$  (一定値) の雨を考える。このとき式 (12) 中の内側の積分は単位面積のタンクからの流出と同じで、 $t > t_r$  において、

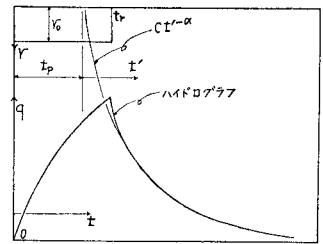
$$r_0 T (e^{t/T} - 1) e^{-t/T} \dots\dots\dots (27)$$

となる。式 (27) を式 (13) に代入すると、

$$Q(t > t_r) = Ar_0 \int_0^\infty φ(T) (e^{t/T} - 1) e^{-t/T} dT \dots\dots\dots (28)$$

となる。一方、 $t > t_r$

で実測のハイドログラフの逓減部が  $Q(t) = C(t - t_p)^{-α}$  で表わされるわけであるが ( $C$ ,  $t_p$  は降雨によって決る定数である。 $α$  はそれほど降雨によって変化しないことが四俵の研究<sup>14)</sup> によって示されている)、 $t - t_p = t'$  とおくと、 $Q(t') = Ct'^{-α}$  は、次の積分形で表わされる<sup>14), 16)</sup>。



図一7 ハイドログラフの模式図と記号の定義

$$Q(t') = Ct'^{-α} = C \int_0^\infty \frac{α}{Γ(α+1)} β^{α-1} e^{-βt'} dβ \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 $Γ()$  はガンマ関数である。

式 (28) で  $1/T = β$  とおくと  $dT = -1/β^2 dβ$  より、式 (28) は、

$$\begin{aligned} Q(t) &= Ar_0 \int_0^\infty φ(T) (e^{βt} - 1) e^{-βt} \left(-\frac{1}{β^2}\right) dβ \\ &= Ar_0 \int_0^\infty φ(T) \frac{1}{β^2} (e^{βt} - 1) e^{-βt} dβ \\ &= Ar_0 \int_0^\infty ψ(β) (e^{βt} - 1) e^{-βt} dβ \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここに、

$$ψ(β) = φ(T) / β^2 \dots\dots\dots (31)$$

である。ここで、式 (29) と式 (30) を比較するために、式 (30) に  $t = t' + t_p$  を代入すると、

$$Q(t') = Ar_0 \int_0^\infty ψ(β) (e^{β(t'+t_p)} - 1) e^{-β(t'+t_p)} e^{-βt'} dβ \dots\dots\dots (32)$$

となる。ここで、式 (29) ≡ 式 (32) の関係から  $ψ(β)$  が

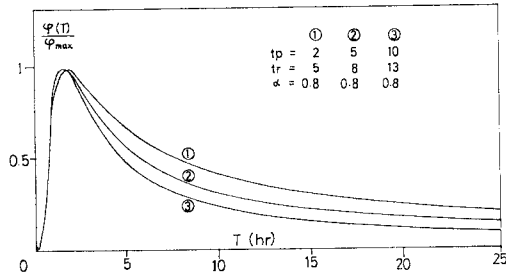


図-8 到達時間の分布

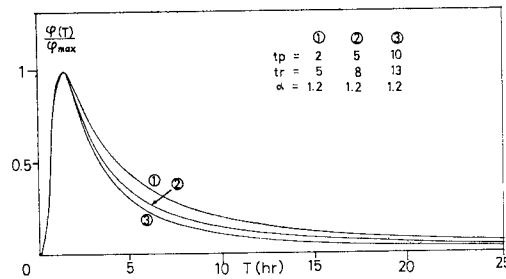


図-9 到達時間の分布

求まり、

$$\psi(\beta) = \frac{C}{Ar_0} \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \beta^{\alpha-1} \frac{e^{\beta t_p}}{(e^{\beta t_r} - 1)} \dots (33)$$

となる。さらに、式 (31) の関係から、到達時間の分布  $\varphi(T)$  は次式で与えられる。

$$\varphi(T) = \frac{C}{Ar_0} \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} T^{-(\alpha+1)} \frac{e^{t_p/T}}{(e^{t_r/T} - 1)} \dots (34)$$

式 (34) の  $\varphi(T)$  がハイドログラフが  $t^{-\alpha}$  の形で減衰するために必要な分布形である。この式からわかるように、到達時間の分布  $\varphi(T)$  は  $\alpha$  や  $t_p$  などの降雨の特性と流域の特性の両者によって決まる因子の他に、 $r_0$  や  $t_r$  などの降雨の特性そのものの関数となっており、非常に興味深い結果になっている。図-8 と 図-9 は、式 (34) に基づき、 $\alpha$  をそれぞれ 0.8 と 1.2 とした場合で、 $t_r - t_p$  を固定し、降雨継続時間  $t_r$  を変化させ、計算された  $\varphi(T)$  の最大値  $\varphi_{max}$  で規準化した  $\varphi(T)/\varphi_{max}$  を図示したものである。この2つの図より、ハイドログラフの減衰部が急激なほど、すなわち  $\alpha$  が大きいほど  $\varphi(T)$  は到達時間の小さい部分 (早い流出成分) が卓越していることがわかる。また、同じ  $\alpha$  で比較するならば、降雨継続時間  $t_r$  が長くなるほど、早い流出成分からの寄与 (率) が大きくなっているのがわかる ( $T$  が大きいところでは、 $t_r$  が大きい方が  $\varphi(T)$  は小さい)。これは現実の流域に照らして考えるならば、降雨が多くなればなるほど表面流出や、早い中間流等からの寄与が、地下水等の遅い流出成分からの寄与に比べて、大きくなることに対応している。

(2) 実流域での到達時間の分布

次に実際の流域での降雨と流出の資料から、上記の式中に用いられている定数  $t_p, \alpha$  を求め、式 (34) に基づいて  $\varphi(T)$  を計算した。このとき式 (34) を導くにあたっては、降雨として降雨強度を  $r_0$  (一定値) としているため、時間ごとに変動する実際の降雨とはかなり異なっているが、採用した一雨降雨は、降雨の終了が明瞭なものを選び、 $t_p, \alpha$  の決定にはできるだけ上記の条件に添う降雨を用いた。図-10 は、文献 14) から採用した B 流域の  $\alpha, t_p$  を用いて、式 (34) により到達時間の分布  $\varphi(T)$  を計算し、そのピーク値で  $\varphi(T)$  を規準化 ( $\varphi(T)/\varphi_{max}$ ) したものである。図-11, 12 は、C, D 流域につき同様の計算を行ったものである。これらの図より一見してわかることは、 $\varphi(T)/\varphi_{max}$  は 2~4 時間程度のところにピークをもち、その後ゆっくりと減衰しており、図-6 (a), (b), (c), (d) に示すガンマ分布 (対数正規分布といっても別に構わないが) と非常によく似ていることであろう。前章において、流域の斜面長分布がガンマ分布をしていることが、見い出されているが、本章で導いた到達時間の分布もまた、ガンマ分布のよう

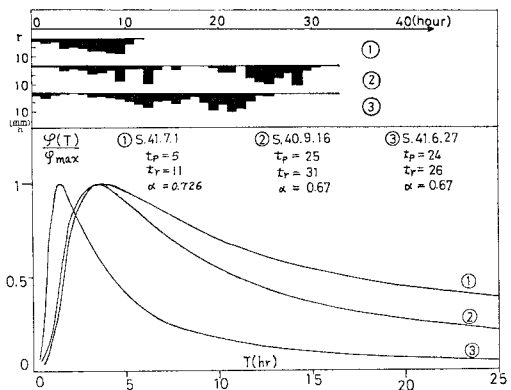


図-10 流域Bの到達時間の分布

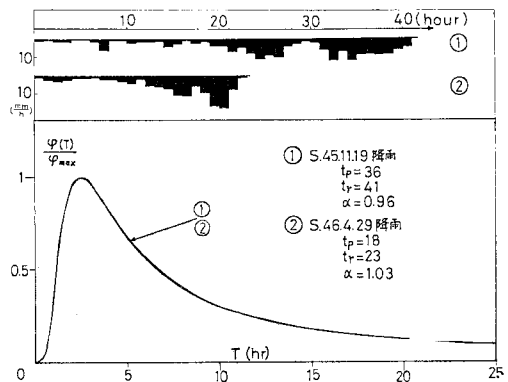


図-11 流域Cの到達時間の分布



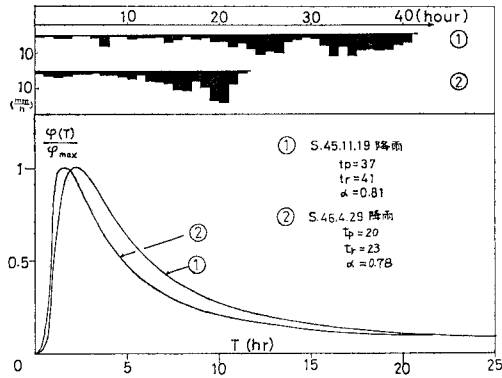


図-12 流域Dの到達時間の分布

な単峰形をしていることがわかった。なお、図-11と図-12を見ると、C流域とD流域の流域面積は約20倍異なるにもかかわらず、到達時間の分布は、それほどの違いを示してはいないことがわかる。このことから河道効果を無視し得るほどの小流域でかつ同一流域内の近接した2つの流域において到達時間の分布は、その流域面積の大小には左右されず、面積の大きい方の流域は小さい方の流域がいくつか並列にならんでいると考えることができよう。なぜならば、もし大流域でそれに応じた長い斜面長があるならば、斜面長の分布は小流域のそれとは異なってくるはずであるが、図-6(c),(d)を見る限り両流域に差は認められないからである。なお図-9のB流域の $\varphi(T)$ は降雨ごとに大きく異なっているが、このことがB流域のみの特性によるものか、あるいは解析のなかに変動降雨の効果を取り入れていないことによるものなのかは今のところはっきりとはわからない。

5. 瞬間単位図の理論的構成

前章までの議論を要約すると、① 斜面長分布はガンマ分布で表現し得る。② 到達時間の分布は時定数の大

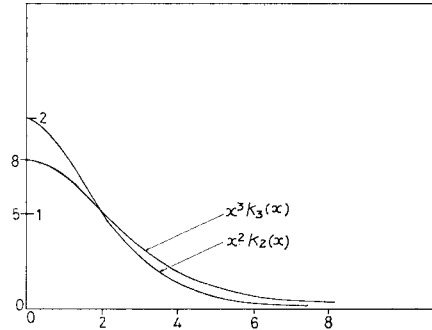


図-13  $x^m K_m(x)$  の概観

きいところを除けばガンマ分布に似た形をしている。③ 到達時間の分布と斜面長分布は、既述の仮定のもとでは同等である、となる。以上の過程をさらに押し進めて、本章では式(15)の瞬間単位図 $H(\tau)$ を求めてみる。このとき到達時間の分布 $\varphi(T)$ としてはガンマ分布式(35)を用いる。

$$\varphi(T) = \frac{a}{\Gamma(k)} (aT)^{k-1} e^{-aT} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 $a$ は時間の逆数の次元であり、到達時間の分布を決定する時定数(の逆数)である。また $\Gamma(k)$ はガンマ関数である。次に式(35)を式(15)に代入して $H(\tau)$ を求める。

$$H(\tau) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k)} a(aT)^{k-1} e^{-aT} \frac{1}{T} e^{-\tau/T} dT$$

$$= \frac{a^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty T^{k-2} e^{-\tau/T} e^{-aT} dT \dots\dots\dots(36)$$

ここで、式(32)中のアンダーラインの部分(\*)の積分はLaplace変換の形をしていることより容易に積分できて<sup>16)</sup>、

$$H(\tau) = \frac{2^{2-k}}{\Gamma(k)} a(2\sqrt{a\tau})^{k-1} K_{(k-1)}(2\sqrt{a\tau}) \dots\dots\dots(37)$$

となる。ここに $K_{(k-1)}(\ )$ は $k-1$ 次の第2種変形ベッ

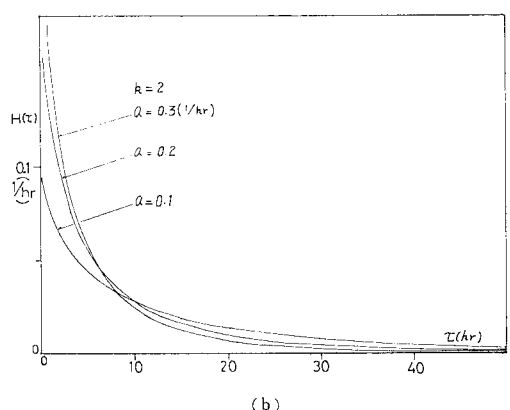
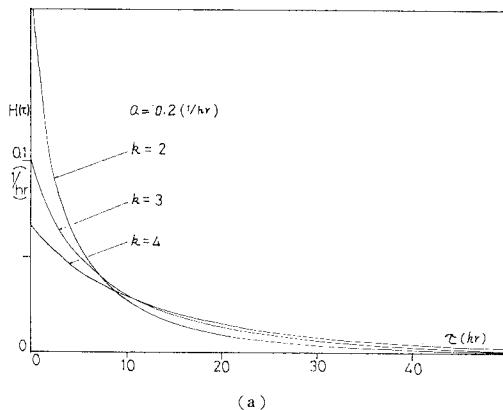


図-14 瞬間単位図の例

セル関数である。ところで、式 (37) で与えられる瞬間単位図  $H(\tau)$  は、変形ベッセル関数を含み、一見複雑な関数形をしているが、図-13 はその大体の形を知るために  $x^2 K_2(x)$ ,  $x^2 K_3(x)$  を計算したものである。この図より、式 (37) で表わされる  $H(\tau)$  は大体において exponential の形をしていることがわかる。また、式 (37) の  $H(\tau)$  の特徴として、 $k$  が自然数のとき、

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} H(\tau) = \frac{a}{k-1} \dots\dots\dots (38)$$

となっていることより、この  $H(\tau)$  は  $ae^{-a\tau}$  の瞬間単位図で表わされる 1 個のタンクの場合に比べて、 $\tau$  が 0 の近傍ではタンクモデルに比して小さい応答性をもっているといえよう。図-14(a) と (b) は式 (37) の  $k$  と  $a$  を適当に定めて計算した瞬間単位図  $H(\tau)$  のグラフであり、これらの図より  $k$  が大きくなるにつれて、すなわち  $\varphi(T)$  の分布形が到達時間  $T$  の大きい方に移動するにつれて、 $H(0)$  は小さくなり、その分だけ  $\tau$  の大きい (応答の遅い) 成分からの寄与が大きくなっている。同様に式 (35) の時定数  $a$  が大きくなるにつれて  $H(\tau)$  は突っ立ってくるのがわかる。

以上が到達時間の分布を考慮したときに得られる瞬間単位図の概観である。本論文では、ここで得られた瞬間単位図を用いて、実流域での流出解析を行っていない。なぜならば、式 (37) で得られる  $H(\tau)$  は、図-14(a) や (b) を見てもわかるように単純な 1 個のタンクモデルの場合の瞬間単位図 (exponential) と比較して、本質的に違いがあるわけではないので、式 (37)、式 (16) を用いての流出解析をただちに行っても、それには必ずから限界があることを著者は承知しているからである。著者が水文解析を行うことの本意は、まえがきのところでも述べたように降雨と流出の資料から演繹的に 1 つの流出モデルを作成することではなく、雨水の流域内での運動形態を 1 つ 1 つ検討し、それから得られる知見を集約し、帰納的に 1 つの流出解析手法を提示することである。本論文はそのような過程の第一歩と考えるものである。

6. 結 論

ここで本論文で得られた結果を列挙する。

- (1) 流れ方向に一樣な理想化された浸透場に対して雨水の挙動を支配する方程式が得られ、また、このときの下流端からの単位幅当たりの流量を解析的に導くことができた。
- (2) このとき解を支配するパラメーターは斜面勾配、空隙率、真の浸透流速、および斜面長と代表的流量であり、これらのパラメーターの大小によって流出は合

理式となったり、タンクからの流出のようになったりする。

- (3) 上記のパラメーターが 1 のオーダーや 1 より小さいときには、この浸透場の瞬間単位図は exponential に近い形となる。
  - (4) 斜面上流端から下流端まで雨水が移動するに要する時間、すなわち到達時間が上記の瞬間単位図を支配するパラメーターとなる。
  - (5) ある条件のもとでは、流域の斜面長分布とその中で雨水の到達時間の分布は等価となる。
  - (6) 実流域での斜面長分布は近似的にガンマ分布で表わし得る。
  - (7) ハイドログラフが  $t^{-a}$  で遞減するために必要な到達時間の分布は斜面長分布に近い形状をしている。
  - (8) 到達時間の分布にガンマ分布を代入することにより、地形則を考慮した瞬間単位図を構成することができる。
- 以上である。

謝 辞：本論文の作成にあたって東京工業大学土木工学科 4 年生 田所 正君の惜しめない助力があった。ここに記して感謝を述べるとともに、常に適切な指導をしていただいている東京工業大学 日野幹雄教授、ならびに早稲田大学 吉川秀夫教授に心からの感謝を捧げたい。また本論文で使用した流域のデータは、山梨大学土木工学科 萩原能男教授および建設省土木研究所 石崎勝義室長よりいただいたものであり、ここに紙面を借りて謝意を表します。

【付 録】

本文中の式 (33) で表わされる瞬間単位図  $H(\tau)$  は、複雑な式形をしているが、応答関数としての性質上、 $\tau$  に関して 0 から  $\infty$  まで積分した値は 1 にならなければならない。式 (33) がこの条件を満たしていることをここに明らかにしておく。

$$\int_0^\infty \frac{2^{2-k}}{\Gamma(k)} a \cdot (2\sqrt{a\tau})^{k-1} K_{(k-1)}(2\sqrt{a\tau}) d\tau \dots\dots\dots (S \cdot 1)$$

ここで、 $p=2\sqrt{a\tau}$  とおくと、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{2^{2-k}}{\Gamma(k)} a \cdot p^{k-1} K_{(k-1)}(p) \cdot \frac{p}{2a} dp \\ & = \int_0^\infty \frac{2^{1-k}}{\Gamma(k)} p^k K_{(k-1)}(p) dp \dots\dots\dots (S \cdot 2) \end{aligned}$$

となる。ここで、ベッセル関数の次に示す性質<sup>16)</sup>を用いる。

$$\int_0^\infty K_\nu(t) t^{\mu-1} dt = 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \dots\dots\dots (S \cdot 3)$$

このとき、 $\mu=k+1$ ,  $\nu=k-1$  とおくと、式 (S・2) は、

$$\frac{2^{1-k}}{\Gamma(k)} \cdot 2^{k-1} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1+1-k}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k+1+k-1}{2}\right) = 1 \dots\dots\dots (S \cdot 4)$$

となり、 $k \geq 1$  の自然数の範囲で上記の条件を満たしている。なお、 $k=1$  のときは、式 (34) より  $H(0)$  は発散するが、その積分は 1 に収束する。

参 考 文 献

- 1) 高橋琢馬・金丸昭治：水文学，朝倉書店。
- 2) 塚本良則：山地流域内 における水文現象の解析，東京農工大学演習林報告 6，1966。
- 3) 平野宗夫・小川 滋・木川良二：山腹斜面 からの流出について，第 29 回土木学会年次学術講演会講演集，第 II 部 1974。
- 4) 平野宗夫・伊藤尚規：到達時間の 分布を考慮した流出解析，第 22 回水理講演会論文集，1978。
- 5) 小林大二：融雪水の流出，気象研究ノート，第 136 号，1979。
- 6) Pinder, G.F. and J.F. Jones : Determination of the Ground-Water Component of Peak Discharge from the Chemistry of Total Runoff, Water Resources Research, Vol. 5, No. 2, 1969.
- 7) Payne, B.R. : Isotope Hydrology, Advances In Hydroscience, 8, 1972.
- 8) 山田 正・吉川秀夫ら：浸透流に関する 水理学的研究，I, II, III, IV, 東京工業大学土木工学科研究報告，No. 25,

- 1979.
- 9) 山田 正・吉川秀夫：降雨と浸透流の 基本的関係について，第 34 回土木学会年次学術講演会講演集，第 II 部，1979。
- 10) 吉川秀夫：河川工学，朝倉書店。
- 11) 菅原正巳：流出解析法，共立出版。
- 12) 角屋 睦・福島 晟・佐合純造：丘陵山地 流域モデルと洪水流出モデル，京都大学防災研究所年報第 21 号 B-2，1978。
- 13) Lee, M.T. and J.W. Delleur : A variable Source Area Model of the Rainfall-Runoff Process based on the Watershed Stream Network, Water Resources Research, Vol. 12, No. 5, 1976.
- 14) 四俣正俊：洪水流量遞減曲線の 解釈，土木学会論文報告集，第 245 号，1976。
- 15) Schubert, G. and R.E. Lingenfelter : Power law dependence on time of river flood decay and its relationship to long-term discharge frequency distribution, Water Resources Research, Vol. 10, No. 1, 1974.
- 16) 森口繁一・宇田川銆久・一松 信：数学公式 II，岩波書店，
- 17) 吉野文雄・小林 正：降雨流出 についての現地実験とその解析，第 29 回土木学会年次学術講演会，第 II 部，1974。
- 18) 青木佑久：山地流域 における洪水流出の追跡，建設省土木研究所研究報告，第 143 号，1972。
- 19) 青木佑久・石崎勝義・岸井徳夫・長谷川 正：全国流出試験地調査中間報告，土木技術資料，Vol. 21, No. 8. (1979.10.12・受付)