

杭基礎-地盤系における地盤係数の振動数特性と付加質量

FREQUENCY-DEPENDENT CHARACTERISTICS OF THE COEFFICIENTS
OF SUBGRADE REACTION AND THE VIRTUAL MASS IN A PILE
FOUNDATION AND SOIL SYSTEM

小坪 清真*・高西 照彦**

By Seima KOTSUBO and Teruhiko TAKANISHI

1. ま え が き

杭基礎とその周辺地盤との動的相互作用の理論的解析については、これまでに数多くの研究がなされてきた^{1)~12)}。

杭基礎の耐震設計を考えるうえで、その基礎となる杭基礎の地震応答計算法には、大別して 2 つの方法がある。1 つは、杭基礎とその周辺地盤とを一体として連続系のまま弾性波動論を用いて解析する方法であり、他の 1 つは、杭基礎とその周辺地盤とを離散系にモデル化し、集中質量法を用いて応答解析を行う方法である。

第 1 の方法は、構造物と地盤との動的相互作用を弾性波動論を用いて解析する方法であって^{10), 11)}、地盤中における波動エネルギーの逸散による減衰効果、地盤の質量効果およびばね効果等を理論的に厳密に解明することができる。しかし、この方法は数理解析が非常に煩雑であり、しかも解析の対象とするモデルの境界条件がごく単純な場合にしかその解析解を見出すことが困難である。また、対象モデルの非線形な挙動を取り扱うことができないこともその欠点として挙げられる。

この方法には、上述のような欠点はあるが、土岐¹⁴⁾がケーソン基礎の場合について示しているように、弾性波動論による解析結果と実験結果とがよく一致していることから判断して、この弾性波動論による数理解析の正当性は実証されているといってもよいであろう。

第 2 の方法は、構造物と地盤とをそれぞれ質量、ばね、ダッシュポットからなる振動系に置換して取り扱う方法であり^{1)~9)}、簡便で実用的なため広く用いられている。また、この方法には、地盤の物理的性質が深さ方向に任意に変化する場合や振動系が非線形である場合をも容易に取り扱うことができるという長所がある。

この方法に従って構造物-地盤系の地震応答解析を行うためには、構造物と地盤との動的相互作用の評価法および地盤中における波動エネルギーの逸散による減衰効果、地盤の質量効果およびばね効果等の合理的な評価法を確立することが必要である。

まず、構造物と地盤との動的相互作用の評価に関しては、杭基礎に支持される構造物の振動エネルギーが周辺地盤のそれに比べてそれほど大きくはないときには、これを無視してもよいという考え方、すなわち、周辺地盤の変位が杭基礎構造物の変位に与える影響のみを考慮して、逆に杭基礎構造物の変位が周辺地盤の変位に及ぼす影響は、これを無視してもよいという考え方に従った解析法が一般に行われている^{1)~9)}。

次に、地盤の減衰効果、質量効果およびばね効果の評価に関しては、現在までのところ、各著者によってその評価法はまちまちであり、上述の諸効果の概念あるいは定義についても一定の合意が得られているとはいえないように思われる。

通常、地盤の質量効果は周辺地盤の杭への付加質量として表現され、地盤のばね効果および減衰効果は地盤係数(複素数)の振動数特性として表現されている。

さて、土の付加質量の概念と地盤係数の振動数特性との間には密接な関係があるが、これまでこのことについて明確に論じた文献はほとんど見当らず、わずかに土岐がケーソン基礎の地震応答と耐震設計を論じた文献¹⁴⁾においてふれている程度であり、したがって、両者の関係に対する正当な認識が広くなされているとはいえないように思われる。

さらに、杭基礎の地震応答計算を集中質量法に従って行う際に、土の付加質量に基づく慣性力項を運動方程式の外力項に算入すべきかどうかという問題がある。この問題に関しては、著者らの 1 人が文献¹³⁾において初めて指摘して以来、わずかに土岐が上記文献¹⁴⁾において、土の付加質量に基づく慣性力項を運動方程式の外力

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 九州工業大学助教授 開発土木工学科

項に算入するのは誤りであることを簡単に注意しているにすぎない。しかし現実には、この項を運動方程式の外力項に算入した杭基礎の地震応答計算式を示している文献^{(3), (4), (6)~(9)}と算入していない文献^{(1), (5)}とが同時に存在しており、両者の計算式のいずれが正しいかについての明確な認識が一般になされていないように思われる。

本論は、本来構造物-地盤系の動的相互作用の解析は、厳密には弾性波動論で行われるべきではあるが、上記の理由からそれを集中質量法に従って行う方がより実用的であると考えた立場から、まず弾性波動論を用いて、単杭-地盤系の解析を行い、単杭に対する地盤係数の振動数特性を求めて、これと土の付加質量の概念との関係について論じ、杭基礎構造物の地震応答計算においては、付加質量の概念を用いれば、地盤係数の振動数特性を考慮したと同じ結果が得られることの基礎づけを行い、次に、杭基礎の地震応答計算を集中質量法に従って行う際に、土の付加質量に基づく慣性力項を運動方程式の外力項に算入すべきでないことについて詳論した。

2. 地盤係数および杭頭復元力の動特性

(1) 単杭-地盤系の振動方程式

図-1 に示すように、上層地盤中に根入れされた単杭が、その基盤から

$$u_g(t) = \tilde{a}e^{i\omega t} \dots (1)$$

で表される強制変位を受けて振動しているとき、周辺地盤との相互作用を考慮した杭の応答解析について考える。

解析にあたって採用した仮定は、次のとおりである。

- ① 杭は半径 a (直径 $d = 2a$) の円形断面で、長さは H であり、その先端は基盤に支持されている。杭下端は基盤にヒンジ結合されている。
- ② 杭頭は上部構造物に完全固定されており、したがってその回転角は 0 である。
- ③ 構造物および杭は、水平変位のみを行う。地盤の上下変位は小さいとして、これを無視する。
- ④ 上部構造物底面と地盤表面とは、直接接触しておらず、したがって両者の間には、摩擦は働かない。

さて、図-1 に示すように、円筒座標を用いて、基盤に対する厚さ H の上層地盤の r, θ 方向の相対水平変

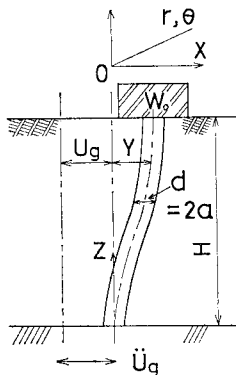


図-1 単杭-地盤系

位を u, v とすれば、基盤が x 方向に式 (1) で表される調和振動をするとき、上層地盤に対して、均質弾性体の波動方程式を適用して、次のような波動方程式

$$\begin{aligned}
 &(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \\
 &\quad - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \\
 &= \left(\frac{\rho_g}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu' \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2} \right) u \\
 &\quad - \frac{\rho_g}{g} \omega^2 \tilde{a} \cos \theta e^{i\omega t} \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \\
 &\quad + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \\
 &= \left(\frac{\rho_g}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu' \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2} \right) v \\
 &\quad + \frac{\rho_g}{g} \omega^2 \tilde{a} \sin \theta e^{i\omega t} \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

を得る。ここに、 λ, μ はラーメの定数、 ρ_g は上層地盤の単位体積重量、 μ' は上層地盤の減衰に関する粘性係数で、ここでは上層地盤と基盤との波動インピーダンス比に基づく減衰および上層地盤自身の内部粘性減衰を、すべて上層地盤の内部粘性減衰項(ただし、 z 方向についてだけ考える)に含めて取り扱った。

上式の波動方程式の解として、上層地盤の表面において、せん断力 $\tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ が 0、また $r \rightarrow \infty$ において $u, v \rightarrow 0$ の条件を満足する解は、次のように書ける⁽¹⁰⁾。

$$u(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1,3,5\dots} U_k(r) \sin \frac{k\pi z}{2H} \cos \theta e^{i\omega t} \dots \dots \dots (4)$$

$$v(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1,3,5\dots} V_k(r) \sin \frac{k\pi z}{2H} \sin \theta e^{i\omega t} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 U_k(r) = &\frac{1}{\eta_r} [A_k \{K_1(\eta_p \eta_r) + \eta_p \eta_r K_0(\eta_p \eta_r)\} \\
 &- B_k K_1(\eta_s \eta_r)] + \frac{4}{k\pi} \frac{\tilde{a}}{\xi_k^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \\
 &\dots \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_k(r) = &\frac{1}{\eta_r} [A_k K_1(\eta_p \eta_r) - B_k \{K_1(\eta_s \eta_r) \\
 &+ \eta_s \eta_r K_0(\eta_s \eta_r)\}] - \frac{4}{k\pi} \frac{\tilde{a}}{\xi_k^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \\
 &\dots \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_k &= \sqrt{k^2 \left(1 + 2h_g \frac{\omega}{\omega_g} i \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2} \\
 \omega_g &= \frac{\pi}{2H} V_s \\
 \eta_p &= \frac{\xi_k \omega_g}{V_p} a = \frac{\pi}{2} \xi_k \frac{a}{H} \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_s &= \frac{\xi_k \omega g}{V_s} a = \frac{\pi}{2} \xi_k \frac{a}{H} \\ \eta_r &= r/a \\ d &: \text{杭の直径 } (d=2a) \\ V_p &= \sqrt{(g/\rho_p)(\lambda+2\mu)} \\ V_s &= \sqrt{(g/\rho_g)\mu} \\ h_g &= (1/2)\omega g \mu'/\mu \\ \nu &: \text{上層地盤のポアソン比} \\ K_n(\cdot) &: \text{第2種第}n\text{次の変形ベッセル関数} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

地盤中の応力は次式を用いて求めることができる。

$$\sigma_r = \lambda \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \dots\dots(9)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots\dots(10)$$

杭周辺に作用する全土圧の x 方向分力は、杭の単位長さ当たり、

$$P(z, t) = \int_0^{2\pi} \{ \sigma_r|_{r=a} \cos \theta - \tau_{r\theta}|_{r=a} \sin \theta \} a d\theta \dots\dots(11)$$

である。式 (4)~(7) および式 (9), (10) を用いて、上式から $P(z, t)$ を求めると、

$$P(z, t) = -\frac{\rho_g}{g} \pi a^2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \xi_k^2 \omega g^2 \{ A_k K_1(\eta_p) + B_k K_1(\eta_s) \} \sin \frac{k\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots(12)$$

となる。

次に、杭の振動方程式は、基盤に対する杭の相対水平変位を $y(z, t)$ とすれば、

$$\frac{\rho_p}{g} \pi a^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(z, t) - \bar{a} \omega^2 e^{i\omega t} \right\} + EI \frac{\partial^4}{\partial z^4} y(z, t) = P(z, t) + q(z, t) \dots\dots(13)$$

と表すことができる。ここに、 ρ_p は杭の等価単位体積重量で、杭の単位長さ当りの重量を ΔW とすれば、 $\rho_p = \Delta W/\pi a^2$ で定義される。 EI は杭の曲げ剛性である。また、 $q(z, t)$ は杭の単位長さ当りに働く x 方向外力を表す。いま、上部工の振動によって杭頭に伝えられる水平力を $S_0 e^{i\omega t}$ とすれば、 $q(z, t)$ は S_0 を深さ方向にフーリエ級数展開することによって、次式のように表すことができる。

$$q(z, t) = \frac{2S_0}{H} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} \sin \frac{k\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots(14)$$

さて、式 (13) の解を求めるには、 $y(z, t)$ をフーリエ級数展開して

$$y(z, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_k \sin \frac{k\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots(15)$$

とし、式 (12), (14) とともに、これらを式 (13) に代入した式と、さらに次に示すような地盤変位と杭変位の連続の条件式

$$y(z, t) = u(a, 0, z, t) = -v(a, \pi/2, z, t) \dots\dots(16)$$

とを用いればよい。結果は次のとおりである。

$$y(z, t) = \frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2S_0}{H} Y_Q(\omega, z) e^{i\omega t} + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \bar{a} Y_u(\omega, z) e^{i\omega t} \dots\dots(17)$$

ここに、

$$Y_Q(\omega, z) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + \alpha \xi_k^2 \Omega_k} \cdot \sin \frac{k\pi z}{2H} \dots\dots(18)$$

$$Y_u(\omega, z) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\frac{4}{k\pi} \alpha \left(\Omega_k + \frac{\rho_p}{\rho_g} \right)}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + \alpha \xi_k^2 \Omega_k} \cdot \sin \frac{k\pi z}{2H} \dots\dots(19)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_k &= \{ K_1(\eta_p) + \psi_k K_1(\eta_s) \} / \Gamma_k \\ \Gamma_k &= K_1(\eta_p) + \eta_p K_0(\eta_p) - \psi_k K_1(\eta_s) \\ \psi_k &= \{ \eta_p K_2(\eta_p) \} / \{ \eta_s K_2(\eta_s) \} \\ \alpha &= \alpha_0 \left(\frac{4}{\pi} \frac{H}{a} \right)^2 \\ \alpha_0 &= \frac{\pi}{4} a^4 \frac{\mu}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

また、杭に働く単位長さ当りの x 方向の土圧は、式 (12) から、

$$P(z, t) = -\pi \mu \frac{1}{EI} \left(\frac{\pi a}{2H} \right)^2 \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2S_0}{H} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \xi_k^2 \Omega_k \cdot \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + \alpha \xi_k^2 \Omega_k} \sin \frac{k\pi z}{2H} e^{i\omega t} - \pi \mu \left(\frac{\pi a}{2H} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \bar{a} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \xi_k^2 \Omega_k \cdot \frac{\alpha \frac{4}{k\pi} \left\{ \Omega_k + \frac{\rho_p}{\rho_g} \right\}}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + \alpha \xi_k^2 \Omega_k} \sin \frac{k\pi z}{2H} e^{i\omega t} + \pi \mu \left(\frac{\pi a}{2H} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \bar{a} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \Omega_k \cdot \sin \frac{k\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots(21)$$

(2) 動特性の理論

図一1に示すような単杭が、その頭部に $Q=Q_0 e^{i\omega t}$ で表される強制力を受けて振動しているとき、杭頭におけるせん断力を

$$S = S_0 e^{i\omega t} \dots\dots(22)$$

とし、基盤から z のところにおいて、杭に作用する水平地盤反力を

$$-P(z, t) = k_h(z, \omega) \cdot y(z, t) \dots\dots(23)$$

とおけば、 $k_h(z, \omega)$ は次式によって与えられる。すなわち、式 (17) および式 (21) において、 $\bar{a}=0$ として、

$$k_h(z, \omega) = \pi\mu \left(\frac{\pi a}{2H} \right)^2 \frac{\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + \alpha \xi k^2 \Omega_k} \xi k^2 \Omega_k \sin \frac{k\pi z}{2H}}{\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + \alpha \xi k^2 \Omega_k} \sin \frac{k\pi z}{2H}} \dots (24)$$

いま、上式において、 $\omega=0$ において、すなわち、杭頭に静荷重 Q_0 を加えたときの静的水平地盤反力係数を求めれば、

$$k_{h0}(z) = \pi\mu \left(\frac{\pi a}{2H} \right)^2 \frac{\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \Omega_{0k} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^2 + \alpha \Omega_{0k}} \sin \frac{k\pi z}{2H}}{\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^2 + \alpha \Omega_{0k}} \sin \frac{k\pi z}{2H}} \dots (25)$$

を得る。ここに、 Ω_{0k} は式 (20) の第 1 式において、変形ベッセル関数の引数 η_p, η_s 中に含まれている ω を $\omega=0$ とすることによって得られる。

さて、式 (24) の $k_h(z, \omega)$ について、これを実数部と虚数部とに分けて表せば、式 (23) の地盤反力 $P(z, t)$ は、

$$-P(z, t) = k_h(z, \omega) \cdot y(z, t) = k_{hR}(z, \omega) \cdot y(z, t) + i k_{hI}(z, \omega) \cdot y(z, t) \dots (26)$$

と書くことができる。上式の右辺第 1 項の実数部は変位に比例する地盤反力を表す。 $k_{hR}(z, \omega)$ はいわゆる地盤反力係数とよばれ (以下、地盤係数 $k_h(z, \omega)$ の実数部 $k_{hR}(z, \omega)$ を単に地盤反力係数とよぶ)、その値は加振力の円振動数 ω によって変わる。また、右辺第 2 項の虚数部は減衰力を表す項で、第 1 項の実数部とは 90° の位相差を有する。

$$k_{hI}(z, \omega) = c(z, \omega) \omega \dots (27)$$

と書けば、減衰力は、振動速度 $\omega y(z, t)$ に比例する。 $c(z, \omega)$ は減衰係数を表し、その値も ω によって変わる。これら $k_{hR}(z, \omega)$ 、 $c(z, \omega)$ の ω による変化は、それぞれ地盤反力係数および減衰係数の振動数特性とよばれている。

式 (8) および (20) における諸定数 $\nu, h_g, \alpha, \rho_p/\rho_g, H/d$ の値が与えられれば、加振力の円振動数 ω と上層地盤の第 1 次の固有円振動数 ω_g との比 ω/ω_g に対して $k_{hR}(z, \omega)$ と $c(z, \omega)$ の変化の様子を計算することができる。

また、単杭がその頭部に式 (22) で表されるせん断力を受けて振動しているとき、杭頭の水平方向複素復元力

(複素ばね定数) は、式 (17) を用いて、 $\bar{a}=0, z=H$ とおいて、

$$K_h(\omega) = \frac{S}{y(H, t)} = \frac{1}{\frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} Y_Q(\omega, H)} \dots (28)$$

によって与えられる。いま、杭頭における静的水平ばね定数を K_{h0} とすれば、それは、

$$K_{h0} = \frac{1}{\frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} Y_Q(0, H)} \dots (29)$$

から求めることができる。式 (28) の $K_h(\omega)$ を実数部と虚数部とに分けて、上式の K_{h0} に対する比をとって表せば、

$$\frac{K_h(\omega)}{K_{h0}} = \frac{K_{hR}(\omega)}{K_{h0}} + i \frac{K_{hI}(\omega)}{K_{h0}} \dots (30)$$

となる。

(3) 減衰定数 h_g の評価法

地盤反力および減衰係数の振動数特性を求めるためには、式 (8) の第 9 式の h_g を推定することが必要である。

ここでは次のような考え方に従って h_g を定めた。すなわち、図-2 に示すような 2 層地盤に対して、波動論に従って求めた上層地盤の共振点における変位の増幅度が、適当

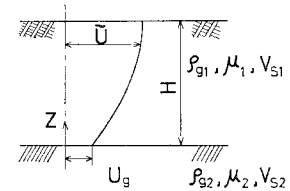


図-2 地盤系

な固有円振動数、振動型および減衰定数を用いて、上層地盤を 1 自由度系に置換した振動系から求めたそれ等に等しくなるようにこの減衰定数を定めた。

a) 波動方程式

いま、図-2 に示すような 2 層地盤が、その基盤から入射波 $\bar{a}e^{i\omega t}$ を受けたとき、地表面における変位振幅の増幅度は、入射波の振幅の 2 倍を基準にとって表せば次式のようなになる。

$$\left| \frac{\bar{U}_H}{2\bar{a}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{\omega}{V_{s1}} H + \bar{a}^2 \sin^2 \frac{\omega}{V_{s1}} H}} \dots (31)$$

ここに、 H は上層地盤の厚さ、 V_{s1} は上層地盤の横波の速度である。 \bar{a} は上下両層のインピーダンス比で、上下両層の単位体積重量を ρ_{g1}, ρ_{g2} 、せん断弾性定数を μ_1, μ_2 とすれば、

$$\bar{a} = \sqrt{(\rho_{g1}\mu_1)/(\rho_{g2}\mu_2)} \dots (32)$$

によって定義される。

式 (31) より増幅度の最大値を求めれば、

$$\frac{\omega}{V_{s1}} H = (2k-1)\pi/2, (k=1, 2, \dots) \text{ のとき} \dots (33)$$

$$|\tilde{U}_H/(2\tilde{\alpha})|_{\max} = 1/\tilde{\alpha} \dots\dots\dots(34)$$

b) 1自由度系による振動解析

上層地盤が、基盤から、

$$u_g = \tilde{A}e^{i\omega t} \dots\dots\dots(35)$$

で表される調和波変位入力を受けて、

$$\bar{U}(z) = \sin \frac{\pi}{2H} z \dots\dots\dots(36)$$

で表される振動型で振動している場合を考える。基準座標を $\phi(t)$ とすれば、上層地盤の相対変位は、

$$\bar{u}(z, t) = \phi(t) \sin \frac{\pi}{2H} z \dots\dots\dots(37)$$

と書ける。また、上層地盤の固有円振動数を

$$\omega_g = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{V_{s1}}{H} \dots\dots\dots(38)$$

とすれば、地盤に対する振動方程式は、

$$\ddot{\phi} + 2h_g\omega_g\dot{\phi} + \omega_g^2\phi = -\delta_u\ddot{u}_g \dots\dots\dots(39)$$

となる。ここに、 h_g は減衰定数、 δ_u は刺激係数で、次式によって与えられる。

$$\delta_u = \frac{\int_0^H \sin \frac{\pi}{2H} z dz}{\int_0^H \left\{ \sin \frac{\pi}{2H} z \right\}^2 dz} = \frac{4}{\pi} \dots\dots\dots(40)$$

さて、式 (39) において

$$\phi(t) = \Pi e^{i\omega t} \dots\dots\dots(41)$$

とおき、さらに式 (35) および式 (40) を代入して整理すれば、

$$\Pi = \frac{\frac{4}{\pi}\omega^2\tilde{A}}{\omega_g^2 - \omega^2 + 2h_g\omega_g\omega i} \dots\dots\dots(42)$$

を得る。ここで、上層地盤の絶対変位を $\tilde{\zeta}$ とおけば、

$$\tilde{\zeta} = u_g + \bar{u} = \left(\tilde{A} + \Pi \sin \frac{1}{2H} \pi z \right) e^{i\omega t} \dots\dots\dots(43)$$

と表せる。上式より地表面における絶対変位を求めて、これを入力波の振幅 \tilde{A} で割って絶対値をとり、変位の増幅度を求めると、

$$\left| \frac{\tilde{\zeta}}{\tilde{A}} \right| = \left| 1 + \frac{\frac{4}{\pi}\omega^2}{\omega_g^2 - \omega^2 + 2h_g\omega_g\omega i} \right| \dots\dots\dots(44)$$

となる。

増幅度が最大値をとるときの ω の値を ω_0 とすれば、式 (39) を用いて、

$$\frac{\omega_0}{\omega_g} = \sqrt{\frac{2 - \pi + 2\sqrt{\pi(\pi - 2)h_g^2 + 1}}{4 - \pi + 4(\pi - 2)h_g^2}} \dots\dots\dots(45)$$

を得る。そのときの増幅度は、次式によって与えられる。

$$\left| \frac{\tilde{\zeta}}{\tilde{A}} \right| = \sqrt{\frac{\left\{ 1 - \left(1 - \frac{4}{\pi} \right) \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2 \right\}^2 + 4h_g^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2 \right\}^2 + 4h_g^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2}} \dots\dots\dots(46)$$

c) 減衰定数 h_g の評価

いま、式 (34) と式 (46) とを等置すれば、

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} = \sqrt{\frac{\left\{ 1 - \left(1 - \frac{4}{\pi} \right) \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2 \right\}^2 + 4h_g^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2 \right\}^2 + 4h_g^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} \right)^2}} \dots\dots\dots(47)$$

を得る。上層地盤と基盤との間のインピーダンス比 $\tilde{\alpha}$ が与えられれば、上式から減衰定数 h_g を求めることができる。

このようにして定められた h_g には、地盤の粘性に基づく減衰は含まれていない。上層地盤と基盤との間のインピーダンス比 $\tilde{\alpha}$ が 0.5 より小さいような場合には、粘性に基づくエネルギーの消散は、下降波によって運び去られる地下逸散エネルギーと比べるとはるかに小さいと考えられる。実際の地盤系に対する $\tilde{\alpha}$ の値としては、0.4~0.5 程度である場合が多いので、このような場合に対しては、地盤の粘性に基づく減衰を無視し、上述の h_g によって地盤系の振動における減衰量を評価してもよいであろう。

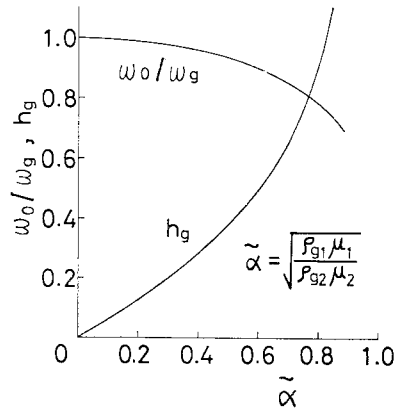


図-3 h_g 曲線および $\tilde{\alpha}$ - ω_0/ω_g の関係

図-3 に $\tilde{\alpha}$ と h_g との関係を示した。また、同図には式 (45) から求めた ω_0/ω_g と $\tilde{\alpha}$ との関係をも示した。なお、図-3 に示す h_g および ω_0/ω_g と $\tilde{\alpha}$ との関係は、それを導いた過程から明らかなように、上層地盤の固有振動数付近で有効であることを付記する。

(4) 地盤反力係数および杭頭復元力の数値計算

図-1 に示すような単杭に対して、式 (26) の水平地盤反力係数 $h_{hR}(z, \omega)$ および $k_{hI}(z, \omega)$ と式 (30) の杭頭の水平方向の複素ばね定数 $K_{hR}(\omega)$, $K_{hI}(\omega)$ とを、いろいろの ν , h_g , α_0 , H/d , ρ_p/ρ_g について計算した。減衰定数 h_g については、図-3 から基礎と上層地盤とのインピーダンス比 $\tilde{\alpha}$ が $\tilde{\alpha}=0.16$, 0.36 の場合を採用した。このとき h_g は $h_g=0.1$, 0.25 となる。

計算結果の一例を 図-4, 5 に示した。

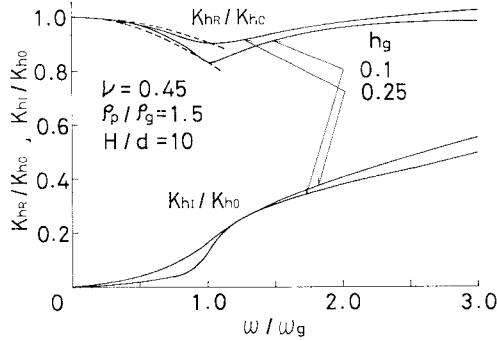


図-4 杭頭復元力特性 ($\alpha_0=10^{-3}$)

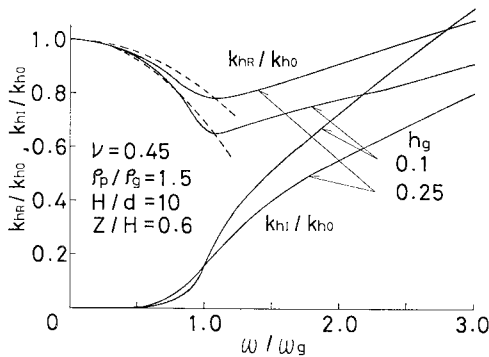


図-5 k_h 値の振動数特性 ($\alpha_0=10^{-3}$)

図はいずれも横軸に加振力の円振動数 ω と上層地盤の第1次の固有円振動数 ω_g との比 ω/ω_g をとり、縦軸にはそれぞれ静的な杭頭ばね定数 K_{ho} 、あるいは静的地盤反力係数 k_{ho} に対する比をとって示した。

図-4 から実数部 K_{hr}/K_{ho} は、 $\omega/\omega_g=1$ のごく近くで極小値を有していることがわかる。他の α_0 および H/d の値の場合についても、これと同様な傾向を示す。

α_0 が K_{hr}/K_{ho} に及ぼす影響は、 α_0 が小さくなるに従って、すなわち、杭の剛性との対応で地盤の強さが相対的に小さくなるに従って、極小値は小さくなっていくが、 α_0 が非常に小さくなると ($\alpha_0=10^{-5}$) 周辺地盤の影響は逆に少なくなって、極小値が少し大きくなる。

H/d が K_{hr}/K_{ho} に及ぼす影響は、 H/d が大きくなるに従って、すなわち、杭長が杭径に比べて大きくなるに従って極小値は大きくなる。これは杭が細長くなるほど周辺地盤から受ける影響が少なくなることを示すものである。

また、 h_g が大きい場合の方が、 K_{hr}/K_{ho} の極小値が大きく、 ω/ω_g に対する変化が緩やかである。

杭頭複素復元力の虚数部 K_{hi}/K_{ho} については、この値は h_g が比較的大きい場合には、いずれの場合にも ω/ω_g に対してほぼ直線的に増加しているといってもよいであろう。近似的には、そのように考えてもよいと

すれば、式(27)を参照することによって、単杭の加振に対しては、地下逸散によって失われるエネルギーと杭周辺地盤から水平方向に伝播する波動によって失われるエネルギーとの和を、杭の振動速度に比例する減衰力によるエネルギーに置換して考えた場合、その等価な減衰係数 c は ω によらずほぼ一定であるとみなしてもよいことを示すものである。

なお図中の点線は点 ($\omega/\omega_g=0, K_{hr}/K_{ho}=1$) および K_{hr}/K_{ho} の極小点を通り、 $\omega/\omega_g=0$ において横軸に平行な接線を有する2次曲線をプロットしたものである。したがって、この点線は、一定の付加質量を考えて、それが杭の質量に付加されているとし、そのうえ地盤反力係数としては静的なそれを用いた場合について、杭に対する復元力特性を求めると、それが見かけ上図中の点線で表されるような振動数特性をもつことを示すものである。付加質量に関しては次節に詳論する。

図-5 は、杭の深さ $z/H=0.6$ における地盤反力係数 k_{hr}/k_{ho} 、および k_{hi}/k_{ho} の ω/ω_g に対する変化の様子の一例を示したものである。図中の各曲線の有する傾向は図-4 のそれとまったく同様である。

3. 付加質量について

(1) 地盤反力係数の振動数特性と付加質量

前節で行った数値計算の結果から、地盤中に根入れされた杭基礎構造物を加振したとき、他の条件が一定ならば、杭基礎に対する地盤反力係数は、加振振動数の増加に従って減少する範囲が存在することがわかった。いま、杭基礎構造物の共振振動数が、地盤反力係数の減少する範囲内に含まれているときは、静的な地盤反力係数を用いて求めた杭基礎構造物の固有振動数は、地盤反力係数の振動数特性を考慮して求めたそれより大きな値を示すことになる。このことは実験的にも示されており、振動試験によって得られた杭基礎あるいはケーソン基礎等の共振振動数は、静的試験によって得られた地盤反力係数を用いて計算した共振振動数よりも小さい。この現象を説明するために、構造物周辺の土が構造物に附着して一緒に振動すると考えるいわゆる付加質量なる概念が用いられている。

付加質量に基づく慣性力は振動加速度に比例するが、他方、地盤反力は振動変位に比例するので、その位相は互いにちょうど 180° だけ異なっていることになる。したがって、実験的には、構造物に対する抵抗力として、これらの2つの力の代数和のみが得られることになり、両者を互いに分離することは困難である。それゆえ、この復元力の振動数特性を説明するのに、地盤反力係数が

振動数によって低下すると考えてもよいし、また、付加質量が存在すると考えてもよいことになる。

図-4, 5 中の点線と実線とは、 ω/ω_g の値が 0 から約 1.1 ぐらいまでの範囲内で比較的良好一致しているが、このことは杭に対して一定の付加質量を考えた場合、その効果が見かけ上、地盤反力係数が図示のような振動数特性を有することとまったく同等であるといってもよいことを示している。

杭基礎構造物等の地中構造物の耐震設計に際して、その地震応答計算を行うような場合には、できるだけその計算方法が簡単であることが望ましい。このことを考慮すれば、地盤反力係数が振動数に応じて変化すると考えて応答計算を行うより、付加質量の概念を用いて、一定の質量を構造物に加えてやるだけで、あとは通常の計算法に従って構造物の地震応答を求める方が、はるかに優れているといえよう。

なお、ここで断っておくべきことがある。図-4, 5 から明らかなように、付加質量の概念が近似的に成立するのは構造物-地盤系に対する入力の変位振動数 ω が、上層地盤の第 1 次の固有円振動数 ω_g より小さい範囲である。一般に地震波はいろいろの周期成分の波を含み、前記の振動数の範囲外の振動数の波も作用することになるが、杭基礎構造物-地盤系がこのような地震波を受けて振動する場合にも、上層地盤はほとんどその第 1 次の振動形に近い振動を行っており、第 1 次の振動が卓越し、高次振動の寄与は少ない。したがって、このような構造物の地震応答計算に際して、地盤の第 1 次の固有円振動数 ω_g より小さい範囲で成立する付加質量の概念を用いた解析を行っても誤差は少なく、十分実用的であるといえよう。

付加質量の概念を用いて、杭基礎等の地震応答を計算する際に、検討を要する問題がある。それは、地中構造物が基盤からの入力地震波を受ける場合を考えると、応答計算に必要な基礎式である地中構造物に対する運動方程式において、その右辺の外力の項に、前述の付加質量に基づく慣性力を加えるべきかどうかという問題である。すなわち、いま簡単のため 1 自由度系で考えて、 M および $4M$ をそれぞれ地中構造物の質量およびその付加質量、 C, K を減衰係数およびばね定数、 y を構造物の相対変位、 \ddot{u}_g を入力加速度としたとき、次の 2 つの運動方程式のうちどちらの式を採用するのが合理的であるうか。

$$(M+4M)\ddot{y}+C\dot{y}+Ky=-M\ddot{u}_g \dots\dots\dots(48)$$

$$(M+4M)\ddot{y}+C\dot{y}+Ky=-(M+4M)\ddot{u}_g \dots\dots\dots(49)$$

式 (48) は付加質量に基づく慣性力を外力項に算入しない場合の運動方程式を表し、式 (49) はそれを算入す

る場合の運動方程式を表している。

実際には付加質量は存在しないが、地盤反力係数が振動数の増大に従って低下するという地盤反力係数の振動数特性を表現するためにのみ付加質量の概念を導入するのであれば、運動方程式としては式 (48) を採用すべきである。その場合、もし式 (49) を採用したとすれば、それは外力を付加質量に基づく慣性力の分 ($-4M\ddot{u}_g$) だけ過大に見積ることになる。従来、地中構造物に対する運動方程式としては、式 (49) が多く採用されてきたが、本論では、図-1 に示すような単杭を例にとり、数値実験によって上記の問題について検討を加えることにする。

なお、以下に用いる付加質量係数という語の定義は、次のとおりである。

$$\text{付加質量係数 } F_g = \frac{\text{構造物に対する付加質量}}{\text{構造物によって排除された上の質量}} \dots\dots\dots(50)$$

(2) 付加質量係数の決定

図-1 に示すような単杭が、その頭部に

$$Q=Q_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(51)$$

で表されるような外力を受けたときの杭頭の変位応答は、式 (17) において、 $\bar{a}=0$ とし、さらに S_0 として

$$S_0 e^{i\omega t} = Q_0 e^{i\omega t} - (W_0/g)\ddot{y}(H, t) = \left\{ Q_0 + \frac{W_0}{g} \omega^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right) \cdot \frac{2}{H} Y_Q(\omega, H) S_0 \right\} e^{i\omega t}$$

の関係式から求めた S_0 を用いることによって得られ、次式のように表すことができる。

$$y(x, t) = \frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} \cdot \frac{Q_0 Y_Q(\omega, x) e^{i\omega t}}{1 - \frac{W_0}{g} \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} \omega^2 Y_Q(\omega, H)} \dots\dots\dots(52)$$

ここに、 W_0 は杭頭重量である。

次に、図-1 に示す単杭を自由度 1 の振動系と考え、① 振動型を $\bar{Y}(x)$ とし、② 地盤反力係数は一定として、杭頭に Q_0 の静荷重を加えたときの静的地盤反力係数を採用し、③ 杭の付加質量係数を F_g とすれば、この振動系が杭頭に式 (51) で表されるような荷重を受けたとき、その振動方程式は次のようにして求めることができる。

杭の相対変位を $\bar{y}(x, t)$ とし、基準座標を $\psi(t)$ で表せば、

$$\bar{y}(x, t) = \psi(t)\bar{Y}(x) \dots\dots\dots(53)$$

における。この振動系の運動エネルギー K_0 は、

$$K_e = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H) \right\} \dot{\psi}^2(t) \dots\dots\dots (54)$$

ポテンシャルエネルギー V_e は、

$$V_e = (1/2) K_{st} \bar{Y}^2(H) \psi^2(t) \dots\dots\dots (55)$$

と表せる。ここに、 W_0 は杭の上乗荷重、 K_{st} は杭頭における静的ばね定数で、式 (52) において $\omega=0, z=H$ とすれば、

$$K_{st} = \frac{Q_0}{y(H, 0)} = \frac{EI \left(\frac{\pi}{2H} \right)^4 \frac{H}{2}}{Y_Q(0, H)} \dots\dots\dots (56)$$

によって与えられる。また、一般力 Q_e は、

$$Q_e = Q_0 \bar{Y}(H) e^{i\omega t} \dots\dots\dots (57)$$

となる。減衰定数を h_s として、これらをラグランジュの運動方程式に代入すると、 $\psi(t)$ に関する微分方程式が次式のように得られる。

$$\ddot{\psi} + 2 h_s \bar{n}_s \dot{\psi} + \bar{n}_s^2 \psi = Q_0 \delta_s e^{i\omega t} \dots\dots\dots (58)$$

ここに、

$$\delta_s = \frac{\bar{Y}(H)}{\int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H)} \dots\dots\dots (59)$$

$$\bar{n}_s = \sqrt{\frac{EI \left(\frac{\pi}{2H} \right)^4 \frac{H}{2} \bar{Y}^2(H)}{Y_Q(0, H)} \int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H)} \dots\dots\dots (60)$$

さて振動型 $\bar{Y}(z)$ としては、杭頭に荷重 $Q=Q_0 e^{i\omega t}$ を受けて振動している単杭の $\omega=n_s$ (n_s は杭頭の静的ばね定数 K_{st} を用いて求められた単杭の固有円振動数、式 (62) 参照) における弾性変位を採用した。したがって、 $\bar{Y}(z)$ は式 (52) あるいは式 (18) から

$$\begin{aligned} \bar{Y}(z) &= Y_Q(n_s, z) \\ &= \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} \left(\frac{n_s}{\omega_g} \right)^2 + \alpha \xi_{ns,k}^2 \Omega_{ns,k}} \\ &\quad \cdot \sin \frac{k\pi z}{2H} \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

と表せる。ここに、 $\xi_{ns,k}, \Omega_{ns,k}$ はそれぞれ $\omega=n_s$ としたときの ξ_k, Ω_k の値である。また、 n_s は式 (56) を用いて、

$$n_s = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} \frac{W_0}{g} Y_Q(0, H)}} \dots\dots\dots (62)$$

で与えられる。

また、式 (58) 中の減衰定数 h_s および式 (59) 中の付加質量係数 F_g は、次のようにしてこれを定めた。すなわち、式 (52) を用いて計算された杭頭変位の共振曲

線において、その第1次の共振点における振動数および応答倍率が、式 (60) の \bar{n}_s および式 (53) と式 (58) から求められる応答倍率にそれぞれ等しくなるように F_g および h_s を決定した。

(3) 地震力としての付加質量

本節では、図-1 に示すような単杭が、基盤からの入力を受けて振動するとき、杭の応答を付加質量の概念を用いて近似的に解析する方法に関して、3.(1) で取り上げた問題点、すなわち付加質量に基づく慣性力を杭の振動方程式に外力として加えるべきかどうかについて検討する。

a) 厳密解

基盤から式 (1) で表されるような地震入力を受けたときの単杭の変位応答の厳密解は、式 (17) を用いて以下のように表すことができる。いまの場合、杭頭におけるせん断力 $S=S_0 e^{i\omega t}$ は

$$\begin{aligned} S_0 e^{i\omega t} &= -\frac{W_0}{g} \{ \ddot{y}(H, t) + \ddot{u}_g(t) \} \\ &= \frac{W_0}{g} \omega^2 \left\{ \frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} Y_Q(\omega, H) S_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 Y_u(\omega, H) \bar{a} + \bar{a} \right\} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

で与えられるから、上式を S_0 について解いて、これを式 (17) に代入すれば、杭の変位が求められて次のように表せる。

$$\begin{aligned} y(z, t) &= \left[\frac{\frac{W_0}{g} \omega^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 Y_u(\omega, H) + 1 \right\}}{1 - \frac{W}{g} \omega^2 \frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2}{H} Y_Q(\omega, H)} \right. \\ &\quad \left. \cdot Y_Q(\omega, z) + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 Y_u(\omega, z) \right] \bar{a} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

b) 付加質量に基づく慣性力を外力としては考慮しない解析法

簡単のため、杭および上層地盤をそれぞれ1自由度系に置換した振動系を考えて(杭-地盤系としては全体で2自由度をもつ振動系となる)、この振動系が基盤から式 (1) で表されるような地震入力を受けたときの変位応答を、それぞれ付加質量に基づく慣性力を外力として考慮する場合としない場合とについて求めて、その結果を a) で得られた厳密解と比較する。

まず、上層地盤が式 (1) で表される地震入力を受けて振動するとき、その相対変位 $u(z, t)$ は、上層地盤の振動型を $U(z)$ とすれば、基準座標を $\phi(t)$ として、

$$u(z, t) = U(z) \phi(t) \dots\dots\dots (64)$$

$$\ddot{\phi} + 2 h_g \omega_g \dot{\phi} + \omega_g^2 \phi = -\delta_u \ddot{u}_g \dots\dots\dots (65)$$

によって求めることができる。ここに、 h_g, ω_g はそれぞれ上層地盤の減衰定数、固有円振動数である。 δ_u は刺激係数で次式で与えられる。

$$\delta_u = \frac{\int_0^H \frac{\rho_g}{g} U(z) dz}{\int_0^H \frac{\rho_g}{g} U^2(z) dz} \dots\dots\dots (66)$$

いま、上層地盤の固有円振動数として、

$$\omega_g = \frac{\pi}{2H} V_s \dots\dots\dots (67)$$

を、振動型 $U(z)$ として式 (4), (5) において $\bar{a}=1, \omega=\omega_g$ および $r \rightarrow \infty$ としたときの x 方向の変位型を採用すれば

$$U(z) = \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{4}{k\pi} \frac{1}{\xi^2 \omega_{g,k}} \sin \frac{k\pi z}{2H} \dots\dots\dots (68)$$

を得る。したがって、式 (66) より

$$\delta_u = \frac{\sum_{k=1,3,5,\dots} \left(\frac{4}{k\pi} \right)^2 \frac{1}{\xi^2 \omega_{g,k}}}{\sum_{k=1,3,5,\dots} \left(\frac{4}{k\pi} \frac{1}{\xi^2 \omega_{g,k}} \right)^2} \dots\dots\dots (69)$$

となる。

次に、杭の振動方程式については、以下のようにしてこれを導く。

上層地盤の変位によって強制される杭の変位型を $\bar{Y}_u(z)$ と書けば杭の変位 $y_b(z, t)$ は、

$$y_b(z, t) = \bar{Y}(z) \psi_b(t) + \bar{Y}_u(z) \phi(t) \dots\dots\dots (70)$$

とおくことができる。ここに、 $\psi_b(t)$ は以下に示す微分方程式を満たす基準座標、 $\bar{Y}(z)$ は式 (61) で表される杭の振動型、 $\phi(t)$ は式 (65) から求められる地盤振動に対する基準座標である。

さて、杭の振動に対する換算質量 M_e は、

$$M_e = \int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H) \dots\dots\dots (71)$$

と表せる。また、一般力 Q_e は、

$$Q_e = - \int_0^H \frac{1}{g} \pi a^2 \rho_p \{ \bar{Y}_u(z) \dot{\phi}(t) + \ddot{u}_g(t) \} \bar{Y}(z) dz - \frac{W_0}{g} \{ \bar{Y}_u(H) \dot{\phi}(t) + \ddot{u}_g(t) \} \bar{Y}(H) \dots\dots\dots (72)$$

となる。したがって、杭-地盤系の固有円振動数として式 (60) の \bar{n}_s を用いれば、規準座標 ψ_b に関する微分方程式は、

$$\ddot{\psi}_b + 2 h_s \bar{n}_s \dot{\psi}_b + \bar{n}_s^2 \psi_b = - \delta_{yb} \ddot{u}_g - \lambda_b \dot{\phi} \dots\dots\dots (73)$$

のように得られる。ここに、 h_s は減衰定数、 δ_{yb}, λ_b はそれぞれ、

$$\delta_{yb} = \frac{\int_0^H \frac{1}{g} \pi a^2 \rho_p \bar{Y}(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}(H)}{\int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H)} \dots\dots\dots (74)$$

$$\lambda_b = \frac{\int_0^H \frac{1}{g} \pi a^2 \rho_p \bar{Y}_u(z) \bar{Y}(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}_u(H) \bar{Y}(H)}{\int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H)} \dots\dots\dots (75)$$

で与えられる。

ここで、上層地盤の変位によって強制される杭の変位型 $\bar{Y}_u(z)$ として、式 (19) において $\omega=\omega_g$ とおいた場合を採用した。したがって、

$$\begin{aligned} \bar{Y}_u(z) &= Y_u(\omega_g, z) \\ &= \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{\frac{4}{k\pi} \alpha \left(\Omega_{\omega_g, k} + \frac{\rho_p}{\rho_g} \right)}{k^4 - \alpha \frac{\rho_p}{\rho_g} + \alpha \xi^2 \omega_{g,k} \Omega_{\omega_g, k}} \sin \frac{k\pi z}{2H} \dots\dots\dots (76) \end{aligned}$$

となる。

以下、付加質量に基づく慣性力を外力としては考慮しない場合を case (b) とよぶ。

c) 付加質量に基づく慣性力を外力として考慮する解析法

この場合は、先の b) の場合とは一般力 Q_e が異なり、 Q_e が

$$Q_e = - \int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \{ \bar{Y}_u(z) \dot{\phi}(t) + \ddot{u}_g(t) \} \bar{Y}(z) dz - \frac{W_0}{g} \{ \bar{Y}_u(H) \dot{\phi}(t) + \ddot{u}_g(t) \} \bar{Y}(H) \dots\dots\dots (77)$$

となるから、基準座標を $\psi_c(t)$ とすれば、杭の変位応答 $y_c(z, t)$ は次式によって与えられる。

$$y_c(z, t) = \bar{Y}(z) \psi_c(t) + \bar{Y}_u(z) \phi(t) \dots\dots\dots (78)$$

$$\ddot{\psi}_c + 2 h_s \bar{n}_s \dot{\psi}_c + \bar{n}_s^2 \psi_c = - \delta_{yc} \ddot{u}_g - \lambda_c \dot{\phi} \dots\dots\dots (79)$$

ここに、 δ_{yc}, λ_c はそれぞれ、

$$\delta_{yc} = \frac{\int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}(H)}{\int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H)} \dots\dots\dots (80)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}_u(z) \bar{Y}(z) dz \\ & + \frac{W_0}{g} \bar{Y}_u(H) \bar{Y}(H) \end{aligned}$$

$$\lambda_c = \frac{\int_0^H \frac{1}{g} (\pi a^2 \rho_p + F_g \pi a^2 \rho_g) \bar{Y}^2(z) dz + \frac{W_0}{g} \bar{Y}^2(H)}{\dots\dots\dots} \dots\dots\dots (81)$$

である。

以下、付加質量に基づく慣性力を外力として考慮する場合を case (c) とよぶ。

以上に述べた厳密解、case (b), case (c) の各場合に対する杭頭の変位の応答倍率を求めると、それは次式のように表すことができる。

厳密解：

$$\left| \frac{y(H, t) + u_g(t)}{u_g(t)} \right| = \left| \frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 Y_u(\omega, H)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \left(\frac{\omega_g}{n_s}\right)^2 \frac{Y_Q(\omega, H)}{Y_Q(0, H)}} \right| \dots\dots (82)$$

case (b) :

$$\left| \frac{y_b(H, t) + u_g(t)}{u_g(t)} \right| = \left| 1 + \frac{\delta_{yb} + \frac{\lambda_b \delta_u \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + 2h_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) i} \left(\frac{\omega}{n_s}\right)^2 \bar{Y}(H)}{1 - \left(\frac{\omega}{n_s}\right)^2 + 2h_s \left(\frac{\omega}{n_s}\right) i} \right| \dots\dots (83)$$

$$+ \left| \frac{\delta_u \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \bar{Y}_u(H)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + 2h_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) i} \right| \dots\dots (84)$$

case (c) :

$$\left| \frac{y_c(H, t) + u_g(t)}{u_g(t)} \right| = \left| 1 + \frac{\delta_{yc} + \frac{\lambda_c \delta_u \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + 2h_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) i} \left(\frac{\omega}{n_s}\right)^2 \bar{Y}(H)}{1 - \left(\frac{\omega}{n_s}\right)^2 + 2h_s \left(\frac{\omega}{n_s}\right) i} \right| \dots\dots (84)$$

$$+ \left| \frac{\delta_u \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \bar{Y}_u(H)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + 2h_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) i} \right| \dots\dots (84)$$

(4) 付加質量に関する数値計算および結果の考察

a) 付加質量係数と減衰定数

3. (2) で示した理論に従って、単杭に対する土の付加質量係数 F_g と減衰定数 h_s とを求めた。数値計算結果を 図-6 (a), (b) に示す。図は一例として、 $\nu=0.45$, $\rho_p/\rho_g=1.5$, $h_g=0.1$ の場合について、 H/d および α_0 をパラメーターとして、 n_s/ω_g を横軸にとってプロットしたものである。

図-6 から、一般に n_s/ω_g が大きくなると、すなわち杭の共振振動数が上層地盤のそれに比べて大きくなるに従って F_g は急激に減少し、 h_s は増大する傾向があるといえる。ここでは図示しなかったが、 h_g が大きい場合の方が F_g はより小さな値を示し、 h_s はより大きな値を示す。

上で求めた F_g と h_s を用いて、それぞれ式 (52) と式 (53) および式 (58) とから、単杭がその頭部に正弦波外力を受けたときの杭頭変位の共振曲線を求めた。結果の一例を 図-7 (a)~(c) に示した。図中の実線は、

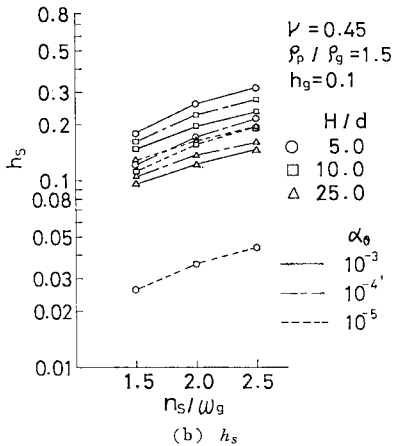
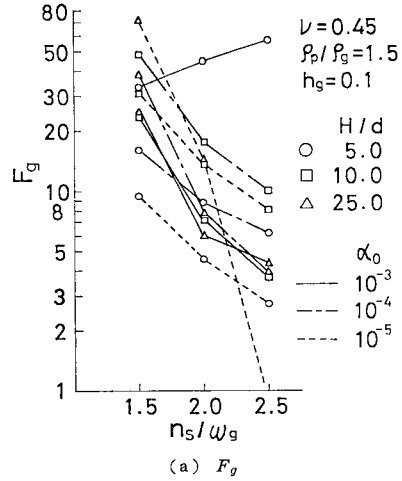


図-6 付加質量係数 F_g および減衰定数 h_s

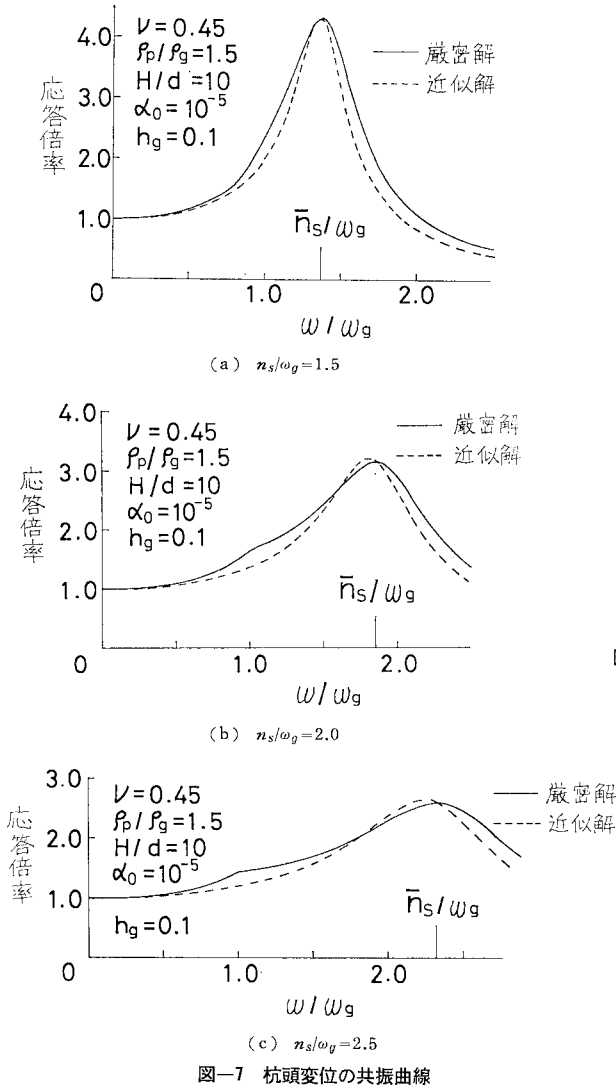
式 (52) による厳密解を、点線は式 (53) および式 (58) による近似解を表す。両者はいずれも比較的良好に一致しているといえよう。このことは、地盤反力係数の振動数特性曲線が、一定の質量を杭に付加することによって、すなわち付加質量の概念を用いることによって近似的に表現できることを示すものである。

いま考えている付加質量を振動数に対して適宜に変化させれば、地盤反力係数の振動数特性を完全に表現することは可能ではあるが、杭の応答計算においては、このような方法を用いることは煩雑に過ぎて実用的ではない。

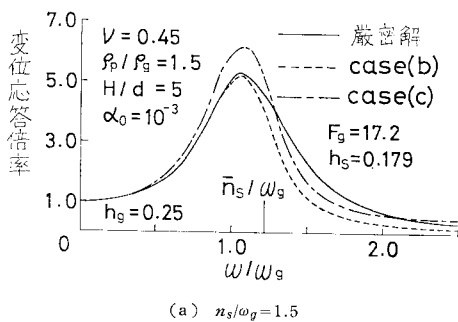
b) 基盤入力に対する杭の変位応答曲線

基盤から正弦波入力を受けたときの杭の変位の応答曲線を、それぞれ式 (82), (83) および (84) を用いて計算し、これら3者の結果を比較した。図-8 (a)~(c) および 図-9 (a), (b) にその一例を示す。

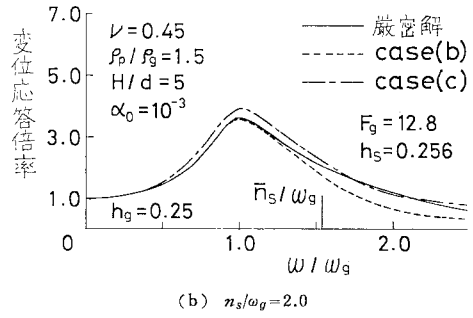
図-8 は、他の条件は一定にして n_s/ω_g のみを 1.5, 2.0, 2.5 と変えたとき、それぞれ波動論による厳密解、



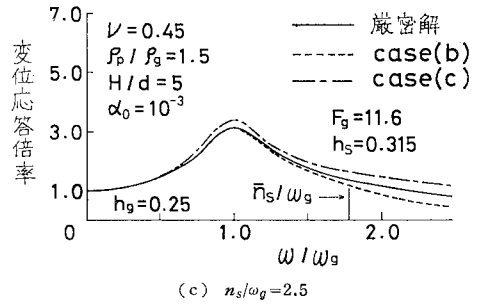
図一七 杭頭変位の共振曲線



(a) $n_s/\omega_g=1.5$

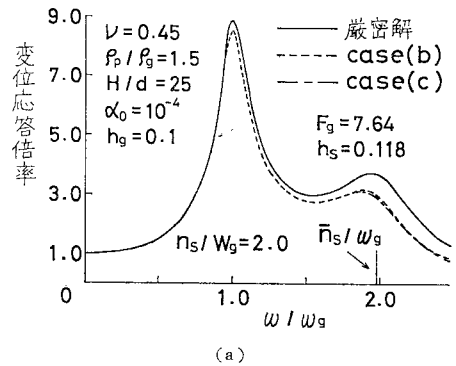


(b) $n_s/\omega_g=2.0$

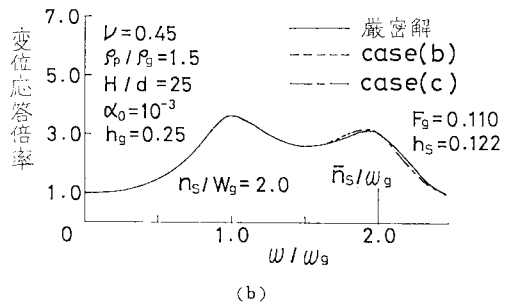


(c) $n_s/\omega_g=2.5$

図一八 基盤入力に対する杭頭変位の応答倍率 (その 1)



(a)



(b)

図一九 基盤入力に対する杭頭変位の応答倍率 (その 2)

case (b) (杭および上層地盤をそれぞれ1自由度系にモデル化して、付加質量に基づく慣性力を外力としては加えない場合の近似解) および case (c) (同じ振動モデルで、付加質量に基づく慣性力を外力に加える場合の近似解) の各場合について、杭頭の変位の応答倍率を計算

し、 ω/ω_g を横軸にとって表したものである。同図から、 $\omega/\omega_g < 1$ の場合にはいずれも case (b) は厳密解にほとんど一致しているが、case (c) は応答倍率が過大な値を示していることがわかる。 $\omega/\omega_g > 1$ の場合については両者とも厳密解と比べて多少の差を生じている

が、それは地盤反力係数が図-4, 5に示すように、 ω の簡単な関数では表せないような振動数特性を有しているので、振動数に無関係な一定の付加質量を導入することでそれと同等な効果をあげることが難しいことに起因する誤差であろう。高次振動の影響については、上層地盤の第2次の共振点は $\omega/\omega_g=3$ のところであり、また、杭基礎構造物-地盤系の第2次の共振点はそれよりずっと大きいので、図-8, 9において示した振動数の範囲内($\omega/\omega_g < 2.5$)では、これら第2次振動の影響はほとんど無視してもよいと考えられる。

図-8は付加質量係数 F_g が比較的大きな場合に対する結果である。他方、 F_g が小さければcase (b)とcase (c)とで結果にほとんど差がないことは当然で、図-9がそのような場合を示す。同図における第2番目のピークは、地盤中における杭の共振を表している。なお、図-8の場合はいずれも上層地盤の共振のみが顕著に表れており、杭の共振は表面には現れていない。

図-8に示した結果から明らかなように、付加質量は、本来地盤反力係数が、図-4, 5に示すような単純でない振動数特性を有する振動現象に対して、その効果において同一の結果をもたらすために導入されたいわば仮想的な質量であって、これに基づく慣性力を振動方程式の外力項に算入することは誤りであるといえよう。

4. 結 論

本論における数値解析の結果を要約すると次のとおりである。

(1) 杭基礎構造物-地盤系の地震応答解析において、上層地盤の第1次の固有円振動数 ω_g よりあまり高くない振動数の範囲では、地盤反力係数の振動数特性曲線を近似的に表現するのに、付加質量の概念を導入することは、実用上妥当である。

(2) 杭基礎の地震応答解析に対する本論の数値計算結果から判断する限りにおいては、付加質量に基づく慣性力項を運動方程式の右辺の外力項に加える場合と加え

ない場合とで、結果にそれほど大きな差異は生じていない。しかし、厳密な理論によれば、付加質量に基づく慣性力項を運動方程式の右辺の外力項に加えることは本来誤りである。

参 考 文 献

- 1) Penzien, J., C.F. Scheffey and R.A. Parmelee: Seismic analysis of bridges on long piles, Proc. of A.S.C.E., Vol. 90, No. EM3, June, 1964.
- 2) 後藤尚男・亀田弘行：杭基礎上の橋脚の地震応答について、土木学会論文集, No. 131, 1966.7.
- 3) 小坪清真・高西照彦：鋼管橋脚の耐震性におよぼす基礎地盤変形の影響、土木学会論文集, No. 148, 1967.12.
- 4) Yamamoto, S. and T. Seki: Earthquake response of multi-story building supported on piles (Part 1), 日本建築学会論文報告集, No. 177, 1970.11.
- 5) 杉村義広：軟弱地盤における長尺支持ぐい基礎の地震時振動性状に関する研究、早稲田大学学位論文, 1972.10.
- 6) 今村純也・寺本隆幸・谷 研一：等価バネ・マス系による建物と地盤との相互作用解析、関東地震50周年記念地震工学シンポジウム論文集, 1973.8.
- 7) 梅村 魁・大沢 胖・河村壯一：埋立軟弱地盤にたつ杭支持建物の地震観測、関東地震50周年記念地震工学シンポジウム論文集, 1973.8.
- 8) 田治米辰雄・望月利男・松田磐久：地盤と震害, p. 176, 槇書店, 1977.4.
- 9) 土質工学会編：土と構造物の動的相互作用, p. 146, 土質工学会出版, 1973.10.
- 10) 田治見 宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について、日本地震工学シンポジウム講演集, 1966.10.
- 11) Novak, M. and T. Nogami: Soil-pile interaction in horizontal vibration, Int. Jour. Earthquake engineering and structural dynamics Vol. 5, 1977.
- 12) 岡本舜三・加藤勝行・伯野元彦：地中構造物に働く地震力に関する研究、土木学会論文集, No. 92, 1963.4.
- 13) 荒牧軍治・小坪清真：地盤構造物系のモデル化についての一方法、関東地震50周年記念地震工学シンポジウム論文集, 1973.8.
- 14) 土岐憲三：橋梁基礎の地震応答解析と耐震設計、京都大学防災研究所年報, 第21号A, 1978.4.
- 15) 後藤尚男・土岐憲三・高田至郎：地中基礎構造物の振動特性について、京都大学防災研究所年報, 第14号A, 1971.4.
- 16) 荒牧軍治・古賀勝喜：軟弱地盤における動的地盤反力特性に関する実験的研究, 第4回日本地震工学シンポジウム講演集, 1975.11.

(1979.11.19・受付)