

移動床砂面の不安定要因としての遅れ距離・位相差

LAG DISTANCE OR PHASE SHIFT AS A CAUSE OF SAND BED INSTABILITY

中川博次*・辻本哲郎**

By Hiroji NAKAGAWA and Tetsuro TSUJIMOTO

1. まえがき

Kennedy の論文¹⁾発表以来、不安定性解析の手法で河床波の発生・形成を説明しようとした研究例は多く興味ある議論がなされているが、実際に移動床に発生・発達する河床波の形成機構の説明としてはいま1つ不十分である。それは、擾乱路床上の流れの解析については工夫した取り扱いがみられるにもかかわらず、流砂の扱いは従来どおりの平衡流砂量式の延用にとどまっていることにある。したがって流砂の遅れ距離を相変わず仮定しなければならなかったり、あるいは流れのモデルだけから無理に不安定性を導き出す等、性急な議論も生まれる結果となっている。結局この種の問題の検討にあたっては、Kennedy の論文にもどってそこで示唆された流砂の遅れ距離、底面せん断応力と河床形状との間の位相差を明らかにすることが必要であろう。

著者らは掃流砂運動のモデルに Euler 的に解釈した stochastic model を用い、流砂の非平衡性を取り入れることに成功し、流れについては従来のポテンシャル流理論に一種の抵抗則を導入して、不安定性解析によりほぼ合理的な結果を得た²⁾。しかし、この論文においてもすでに上述した遅れ距離や位相差の評価を行っておらず、砂面の不安定機構を明らかにするという目的からは不十分なままであると思われる。したがって、本論文では主としてこの著者らの先の論文²⁾を補足し、これらの遅れ距離、位相差を明らかにして若干の議論を行う。

2. 移動床砂面の不安定要因としての「遅れシステム」

まず、本章では以下の議論を明確にするため、移動床

砂面の不安定性解析の概要を示し、その主要点である「遅れシステム」の構成を明らかにする。

砂面を次式で表すことにする。

$$y(x) = a \cdot \sin \kappa(x - U_b t) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 a は砂面擾乱の振幅、 κ は角波数 ($\kappa = 2\pi/L$; L : 波長)、 U_b は擾乱の伝播速度であり、いま線形解析を行うため $a\kappa$ は十分小さく、その2次以上の高次項は無視する。一方、砂面形状の時間微分 $\partial y(x)/\partial t$ が、 $r_j a$ 、 ϕ_j をそれぞれその振幅および $y(x)$ に対する位相差として、

$$\partial y(x)/\partial t = r_j a \cdot \sin \{\kappa(x - U_b t) - \phi_j\} \dots \dots (2)$$

で表されるとすると、これを式(1)の時間微分と等置し、さらに $\dot{a}(t)/a(t)$ が x に依存しないことから次式を得る。

$$\kappa U_b = r_j \sin \phi_j, \dot{a}/a = r_j \cos \phi_j \dots \dots \dots (3)$$

r_j を正にとると、砂面の安定性、擾乱の進行方向は ϕ_j の大きさを調べる事ができる(表-1 参照)。

さて、この ϕ_j は以下に示すような構成となっている。すなわち、底面せん断応力 $\tau(x)$ と河床波形 $y(x)$ との位相差 ϕ_r 、河床砂礫の pick-up rate $p_s(x)$ の $\tau(x)$ に対する位相遅れ ϕ_{p_r} 、局所流砂量 $q_B(x)$ の $p_s(x)$ に対する遅れ距離 δ_{Bp} 、および $\partial y(x)/\partial t$ と $q_B(x)$ の位相差 ϕ_{jB} とからなっており、このうち ϕ_{p_r} はほぼ零と考えていい。これが流砂モデルを pick-up rate と step length に分けて扱う stochastic model の長所の1つである。このとき、 δ_{Bp} は流砂量の底面せん断応力に対する遅れ距離 $\delta_{B\tau}$ と考えてよく、 ϕ_j はこれらを用いて、

表-1 河床面擾乱の挙動の判定

Phase Lag ϕ_j	$\frac{\dot{a}}{a} = r_j \cos \phi_j$	$\kappa U_b = r_j \sin \phi_j$	Behavior of Bed Disturbance
$0 < \phi_j < \pi/2$	+	+	growth of sand waves (moving downstream)
$\pi/2 < \phi_j < \pi$	-	+	decay (flat bed)
$\pi < \phi_j < 3\pi/2$	-	-	
$3\pi/2 < \phi_j < 2\pi$	+	-	growth of sand waves (moving upstream)

* 正会員 工博 京都大学工学部教授 土木工学教室

** 正会員 工博 京都大学工学部助手 土木工学教室

$$\phi_{\dot{y}} = \phi_{\tau} + \kappa \delta_{B\tau} + \phi_{\dot{y}B} \dots \dots \dots (4)$$

と表される. 上式右辺について, 第1項は擾乱路床上の流れモデルから, 第2項は流砂モデルから, 第3項は流砂の連続式によって与えられる. $\delta_{B\tau}$ については3.で, $\phi_{\dot{y}B}$ は4.で検討される. まず $\phi_{\dot{y}B}$ について考察する.

流砂の連続式は ρ_0 を砂の空隙率として,

$$\{\partial y(x)/\partial t\} + \{1/(1-\rho_0)\} (\partial q_B/\partial x) = 0 \dots \dots (5)$$

で表される. 局所流砂量は, その擾動の振幅を $r_B a q_{B0}$ (q_{B0} は非擾乱平衡流砂量) とすると,

$$q_B(x) = q_{B0} [1 + r_B a \cdot \sin\{\kappa(x - U_b t - \delta_{B\tau}) - \phi_{\tau}\}] \dots \dots \dots (6)$$

となり, これを式(5)に代入して整理したものを,

$$\partial y(x)/\partial t = r_B a \cdot \sin\{\kappa(x - U_b t - \delta_{B\tau}) - \phi_{\tau} - \phi_{\dot{y}B}\} \dots \dots \dots (7)$$

と比較することから次の結果を得る.

$$r_B a = q_{B0} \kappa / (1 - \rho_0) \dots \dots \dots (8)$$

$$\phi_{\dot{y}B} = \pi/2 \dots \dots \dots (9)$$

3. 掃流砂量の底面せん断応力に対する遅れ距離

砂面擾乱の挙動を対象とする場合, 流砂は初期の軽微な擾乱の場合といえども非平衡状態にあり, 平衡状態の流砂量式の適用は不合理である. これに対し Euler 的に解釈した stochastic model ではこうした弊害を免れることができる²⁾. この状態での流砂の基礎式は次式で与えられ²⁾, x_0 は流砂の原点である.

$$p_d(x) = \int_0^{x-x_0} p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi \dots \dots \dots (10)$$

$$q_B(x) = \int_{x_0}^x p_s(x') \frac{dx'}{A_2 d^2} \cdot A_3 d^3 \cdot \int_{x-x'}^{\infty} f_X(\xi) d\xi \dots \dots \dots (11)$$

$$\partial y(x)/\partial t = \{p_d(x) - p_s(x)\} A_1 d \dots \dots \dots (12)$$

ここで, $p_d(x)$ は単位時間当たり砂粒1個の占める面積当りの砂粒落下確率密度である. また, A_1, A_2, A_3 はそれぞれ砂粒の1次元, 2次元および3次元形状に関する係数, $f_X(\xi)$ は step length の確率密度関数である.

ところで前論文では式(12)を用いて直接解析を行ったが, ここでは流砂の遅れ機構を明らかにするため式(11)と流砂の連続式(5)を併用する. 式(11)を式(5)に代入すると, 次の計算によって式(12)の形式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x)}{\partial t} &= -\frac{A_3 d}{A_2 (1-\rho_0)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x p_s(x') dx' \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x p_s(x') F_X(x-x') dx' \right\} \\ &= -\{A_3 d/A_2 (1-\rho_0)\} \{p_s(x) - p_s(x) F_X(0) \\ &\quad - \int_{x_0}^x p_s(x') f_X(x-x') dx'\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\{A_3 d/A_2 (1-\rho_0)\} \{p_s(x) \\ &\quad - \int_0^{x-x_0} p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi\} \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

ここに, $F_X(s)$ は step length の分布関数であり,

$$F_X(0) = 0, \lim_{s \rightarrow \infty} F_X(s) = 1 \dots \dots \dots (14)$$

である. 式(13)を式(12)と比較することから,

$$A_3/A_1 A_2 = 1 - \rho_0 \dots \dots \dots (15)$$

の関係式が得られる. 砂粒を球とすると ($A_3 = \pi/6, A_2 = \pi/4, A_1 = 1$), $(1-\rho_0)$ の値は $2/3$ となり, これについての砂に関する実験値とほぼ一致している.

さて, $p_s(x)$ と $\tau(x)$ が著者らの推定式³⁾で関係づけられ, $p_s(x)$ が p_{s0} を非擾乱時の pick-up rate として,

$$p_s(x) = p_{s0} [1 + r_p a \cdot \sin\{\kappa(x - U_b t) - \phi_{\tau}\}] \dots \dots \dots (16)$$

と表されているものとする. 式(16)に式(11) (ただし $x_0 \rightarrow -\infty$) を代入し, step length が平均値 A の指数分布に従う²⁾ とすると,

$$\begin{aligned} q_B(x) &= K p_{s0} d \cdot \int_{-\infty}^x [1 + r_p a \cdot \sin\{\kappa(x - U_b t) - \phi_{\tau}\}] \\ &\quad \cdot e^{-(x-x')/A} dx' \\ &= K p_{s0} A d + \frac{K p_{s0} d r_p a}{(1/A)^2 + \kappa^2} \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{A} \sin\{\kappa(x - U_b t) - \phi_{\tau}\} \right. \\ &\quad \left. - \kappa \cos\{\kappa(x - U_b t) - \phi_{\tau}\} \right] \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

となり, ここに,

$$K = A_3/A_2 \dots \dots \dots (18)$$

である. これを式(6)と等置することより, 次の結果が得られる.

$$\sin \kappa \delta_{B\tau} = \kappa A / \sqrt{1 + (\kappa A)^2} > 0 \dots \dots \dots (19)$$

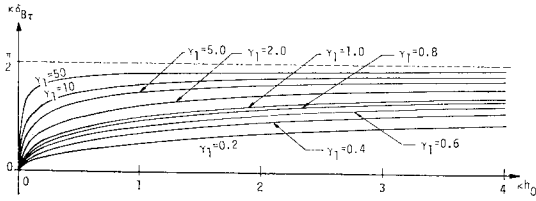
$$\cos \kappa \delta_{B\tau} = 1 / \sqrt{1 + (\kappa A)^2} > 0 \dots \dots \dots (20)$$

$$r_B/r_{\tau} = 1 / \sqrt{1 + (\kappa A)^2} \dots \dots \dots (21)$$

これより, 掃流砂の遅れ距離に起因する位相差は第1象限に属することがわかる. 平均 step length を前報²⁾ にならって,

$$A = \tau_1 h_0 \dots \dots \dots (22)$$

と表す (h_0 : 平均水深) と, $\kappa \delta_{B\tau}$ と κh_0 (無次元波数) との関係性を τ_1 をパラメータとして図-1 のように表すことができる. τ_1 は前報²⁾ でも述べたように一定値とは限らず, 流砂モデルと流れのモデルを結びつける際の容易さのための便法である. もし Einstein⁴⁾ によって示唆されるように A が粒径 d に比例しているなら, τ_1 は d/h_0 に比例したパラメータといえる. いずれにしても, 流砂の遅れ距離は著者らがすでに予想した⁵⁾ ように平均 step length と強く関係してはいるものの, 平均 step length をそのまま流砂の遅れ距離と考える^{6), 7)} のは正しくなく, 上述のようにむしろ位相差として扱え,



図一 掃流砂量の底面せん断応力に対する遅れ距離 δ_{H_r}

それが第 1 象限の値に限られる。こうした結果は step length が確定量でなく確率変数として扱って（ここでは指数分布している）初めて得られるものであることも付記しておく。なお、 A の水理条件に対する変化特性がより明確になれば r_1 をパラメーターでなく既知の関数として表示するのが好ましい。

4. 底面せん断応力と河床形状の位相差

擾乱路床上の流れについては、せん断流の効果と考えた優れた研究もみられる^{8)~11)}が、ここでは前論文²⁾に用いた簡単な補正を施したポテンシャル流モデルに基づいて底面せん断応力と河床形状との位相差 ϕ_r について検討する。

前論文では波状路床上での水脈の収縮・拡大を考慮し、さらに Yalin と Russell¹²⁾ による長波の場合のせん断応力の検討結果をもとに次のような一種の抵抗則の導入により、単にポテンシャル流モデルのみでは考慮し得ないせん断応力について検討した。

$$\tau(x) = \beta \rho U^2 \left\{ 1 - (\tau_2/F_r^2) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 h は水深、 β は非擾流に対する一種の抵抗係数、 τ_2 は実験定数、また F_r は Froude 数 ($=U_0/\sqrt{gh_0}$; g : 重力加速度、 U_0 : 一様流流速) である。式 (23) は林¹³⁾ の用いた式に似てはいるが、彼のモデルでは流砂の非平衡性の考慮を局所河床勾配に結びつけているのであり、著者らはすでにより合理的に流砂の非平衡性は別途考慮しており、ここでは先述したように流れの非対象性を考慮したものであり本質的にはまったく異なるものである。

砂面および水面を、

$$\eta(x, t) = a \cdot \sin \kappa(x - U_b t) - h_0 \dots\dots\dots (24)$$

$$\xi(x, t) = r_s a \cdot \sin \{\kappa(x - U_b t) - \phi_s\} \dots\dots\dots (25)$$

と表示すると、 $r_s a$ は水面の振幅、 ϕ_s は水面と砂面の位相差を表し、水深 h は $(\xi - \eta)$ で与えられる。一方、局所流速の振動分 $u(x) (=U(x) - U_0)$ は次式で表されるものとする。

$$u(x) = r_u a U_0 \sin \{\kappa(x - U_b t) - \phi_u\} \dots\dots\dots (26)$$

これらを式 (23) に代入して整理して得られる底面せん断応力の振動分 $\tau'(x) (= \tau(x) - \tau_0; \tau_0 = \beta \rho U_0^2)$ を、

$$\tau'(x) = r_\tau a \tau_0 \sin \{\kappa(x - U_b t) - \phi_\tau\} \dots\dots\dots (27)$$

と等置することにより次の結果が得られる。

$$\sin \phi_r = \{2 r_u \sin \phi_u + (\tau_2 \kappa / F_r^2) (r_s \cos \phi_s - 1)\} / r_\tau \dots\dots\dots (28)$$

$$\cos \phi_r = \{2 r_u \cos \phi_u - (\tau_2 \kappa / F_r^2) r_s \sin \phi_s\} / r_\tau \dots\dots\dots (29)$$

$$r_\tau^2 = \{2 r_u \sin \phi_u + (\tau_2 \kappa / F_r^2) (r_s \cos \phi_s - 1)\}^2 + \{2 r_u \cos \phi_u - (\tau_2 \kappa / F_r^2) r_s \sin \phi_s\}^2 \dots\dots\dots (30)$$

さて、 $r_u, \phi_u; r_s, \phi_s$ が明らかにされれば砂面の不安定性のもう 1 つの要因であるせん断応力と河床形状の位相差が明らかになる。ここでは波状路床上のポテンシャル流モデル^{11), 14)} によってこれらを与える。このとき水面波、局所流速ともその河床形状に対する位相差は 0 か π であるから、式 (28)~(30) において $\sin \phi_s$ および $\sin \phi_u$ を含む項は消滅する。またこのとき、水面波を

$$\xi = A(t) \sin \kappa(x - U_b t) \dots\dots\dots (31)$$

と置くことによって解析が簡単になり、その結果、

$$A(t)/a(t) = F_r^2 \kappa h_0 \operatorname{sech} \kappa h_0 / (F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0) \equiv R_* \dots\dots\dots (32)$$

が得られている。また振動流速については、

$$u(x) = F_* U_0 a \kappa \sin \kappa(x - U_b t) \dots\dots\dots (33)$$

が得られており、ここに、

$$F_* = (1 - F_r^2 \kappa h_0 \tanh \kappa h_0) / (\tanh \kappa h_0 - F_r^2 \kappa h_0) \dots\dots\dots (34)$$

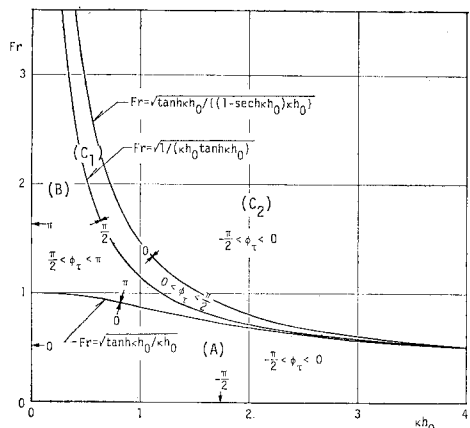
である。それゆえ式 (28)~(30) の残りの項も簡単になり、

$$\sin \phi_r = (\tau_2 \kappa / F_r^2) (R_* - 1) / r_\tau \dots\dots\dots (35)$$

$$\cos \phi_r = 2 F_* \kappa / r_\tau \dots\dots\dots (36)$$

$$r_\tau^2 = (\tau_2 \kappa / F_r^2)^2 (R_* - 1)^2 + (2 F_* \kappa)^2 \dots\dots\dots (37)$$

となる。 $\sin \phi_r, \cos \phi_r$ の符号が変化する規準は、式 (32), (34) を上式に代入することにより次の 3 つの方程式で表されることがわかる。



図二 底面せん断応力と河床形状との位相差 ϕ_r

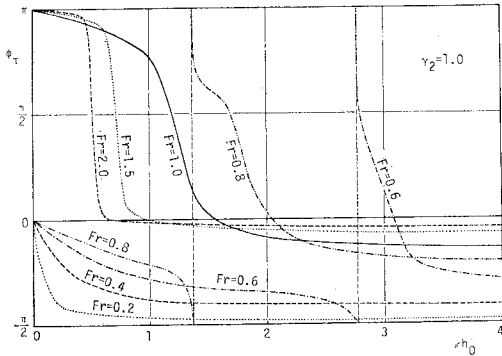


図-3 Froude 数をパラメーターとした ϕ_r と κh_0 の関係 ($r_2=1.0$ の場合)

$$F_r^2 = \tanh \kappa h_0 / \kappa h_0 \dots\dots\dots (38)$$

$$F_r^2 = 1 / \kappa h_0 \tanh \kappa h_0 \dots\dots\dots (39)$$

$$F_r^2 = \tanh \kappa h_0 / \{ \kappa h_0 (1 - \operatorname{sech} \kappa h_0) \} \dots\dots\dots (40)$$

上式によって ϕ_r の属する象限は容易に知られ、この結果を図-2に示した。また $r_2=1.0$ とした場合の ϕ_r と κh_0 の関係を Froude 数をパラメーターとして図-3に示してある。式(13)を導入する前のポテンシャル流モデルによる結果 ($r_2=0$ の場合でこのとき ϕ_r は 0 か π) に比較して興味ある結果の得られていることがわかる。

5. 結 論

本論文で用いた流れおよび流砂に対するモデルを導入した移動床砂面の不安定性解析の結果は前報²⁾に示されたとおりである。ここでは本論文で得られた遅れ距離、位相差についての結果を表-2に示し、表-1と比較して明らかになった事柄を述べる。なお表-2に示される領域 A, B, C₁, C₂ は図-2に指示されたとおりである。

表-1, 2 によるとポテンシャル流モデルをそのまま用いると ($r_2=0$)、B 領域のみ河床波が形成される (antidunes) のに対し、補正後のモデルでは C₂ を除く各領域で河床波形成の可能性のあることがわかる。ただし必ずしも形成されるとは限らず、実際詳細な解析結果²⁾では C₁ での河床波 (下流へ伝播する antidunes) は現れないし、A, B 領域の一部でも安定領域が確認された。

本論文でその機構が明確にされた不安定現象として河床波の形成が前報²⁾で確かにうまく説明された。しかし、

表-2 移動床砂面の不安定性解析結果

Region	Model of Flow over a Wavy Bed		Model of Bed Load		Continuity Eq. of Sediment Transport	Phase Lag	Bed Surface Behaviors	
	Potential Flow		Resistance Law	Stochastic Model				
	Water Surface ϕ_s	Local Velocity ϕ_{ij}	Shear Stress ϕ_r	$q_b \sim \tau$ $\kappa \delta_B \tau$				
A	π	0	$-\frac{\pi}{2} \sim 0$	$0 \sim \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	Total $\pi y / \delta t \sim \pi y(x)$ ϕ_y	Possibility of Sand Waves (Unstable Regions)	
B	0	π	$\frac{\pi}{2} \sim \pi$				$\pi \sim 2\pi$	Antidunes moving upstream ($3\pi/2 \sim 2\pi$)
C ₁			$0 \sim \frac{\pi}{2}$				$\frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{2}$	Stable
C ₂	0	0	$-\frac{\pi}{2} \sim 0$				$0 \sim \pi$	Antidunes moving downstream ($0 \sim \pi/2$)

実際現象に反して下流へ伝播する antidunes が説明できない等の問題が残されている。これは、本解析では流砂モデルとして掃流砂のみを対象としたことに起因しており、一般に upper regime での砂面の不安定性を論じるには浮遊砂についての考慮が必要である。浮遊砂の効果、モデルに含まれるパラメーター r_1, r_2 の評価が今後の課題といえよう。しかし、特に Froude 数の小さい場合 (lower regime) の小規模河床形態の形成機構は前報²⁾ならびに本論文によってきわめて明確にされたといつてよいだろう。

参 考 文 献

- Kennedy, J.F.: The Mechanics of Dunes and Antidunes in Eroding-Bed Channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 16, Part 4, pp. 521~544, 1963.
- 中川博次・辻本哲郎: 砂礫の運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程, 土木学会論文報告集, 第 291 号, pp. 53~62, 1979.
- 中川博次・辻本哲郎: 水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 244 号, pp. 71~80, 1975.
- Einstein, H.A.: Formulas for the Transportation of Bed Load, Trans. ASCE, Paper No. 2140, pp. 561~597, 1942.
- 辻本哲郎・中川博次: 河床波の成長過程に関する研究, 土木学会第 31 回年次学術講演会講演概要集, 第 2 部, II-181, p. 330, 1976.
- Engelund, F. and E. Hansen: Investigation for Flow in Alluvial Streams, Acta Polytechnica, Scand., Civil Eng. and Building Construction Series, Danish Academy of Science, Copenhagen, Denmark, 1966.
- 林 泰造・大西光陽: 河床安定理論の立場からみた小規模河床波の発生について, 第 23 回水理講演会論文集, 土木学会水理委員会, pp. 169~179, 1979.
- Engelund, F.: Instability of Eroding Beds, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 42, Part 2, pp. 225~244, 1970.
- Smith, J.D.: Stability of Sand Bed Subjected to a Shear Flow at Low Froude Number, Journal of Geophysical Research, Vol. 75, No. 30, pp. 5928~5940, 1970.
- Fredsøe, J.: On the Development of Dunes in Eroding Channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 64, Part 1, pp. 1~16, 1974.
- 日野幹雄・宮永洋一: 波状境界をもつ二次元管流の解析, 土木学会論文報告集, 第 264 号, pp. 63~75, 1977.
- Yalin, M.S. and R.C.H. Russell: Shear Stress Due to Long Waves, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 4, No. 2, pp. 55~98, 1966.
- Hayashi, T.: Formation of Dunes and Antidunes in Open Channels, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 96, HY 2, pp. 357~366, 1970.
- Milne-Thomson, L.M.: Steady Flow over a Sinuous Bottom, Theoretical Hydrodynamics, 5th Edition, McMillan, p. 444, 1968.

(1979.9.28・受付)