

積分方程式法による平板の固有振動問題の解析

ANALYSIS OF EIGENFREQUENCY PROBLEM OF THIN PLATE
BY INTEGRAL EQUATION METHOD

丹羽 義 次*・小林 昭 一**・北原 道 弘***

By Yoshiji NIWA, Shoichi KOBAYASHI and
Michihiro KITAHARA

1. はじめに

板の固有振動問題の解析は Rayleigh 以来、理論、実験、数値解析法など多くの分枝において発展してきた。Leissa により、これらの方面における総括的報告がなされている¹⁾。この中で数値解析的方法に限ってみても、Bessel 関数を含む超越方程式に持ち込む方法(円形または円環板)、固有値の上界を求める Rayleigh または Rayleigh-Ritz 法、下界を求める Weinstein 法とこれらの結合および改良法、そして Galerkin 法などの変分法的手法、成果の多くを日本の研究者に負う級数法、摂動法と等角写像の応用、そして差分法などがあげられる。なお最近では F.E.M. による解析も数多く行われている。これらの手法は、低次の固有値の解析に適しているとか、特別な形状あるいは境界条件の解析に適しているとか、それぞれに長所、短所があり、F.E.M. を除いて任意形状でかつ任意の境界条件の問題に適用できるといふ一般的解法ではない。

これらの難点を解消する新しい固有値解析法として、最近、積分方程式法による解析が2, 3試みられている。この方向の解析対象としては、Helmholtz 方程式の固有値問題(薄膜、一定水深域の表面重力波、音響波などの固有振動)、弾性面内固有振動問題、板の固有振動問題などである。

Helmholtz 方程式の固有値解析については、Tai & Shaw¹⁰⁾、De May^{11), 12)} などがあげられよう。彼らは、特性方程式の計算に際して、実部または虚部行列式を用いているために、高次固有値までも精度よく求めることが困難であった。また、Hutchinson¹³⁾ は放射条件を満足していない基本解を用いているため固有値以外の根

(たとえば円形状については第2種 Bessel 関数の零点)も同時に求まることになり、任意形状物体に対してはどれが真の固有値かを識別することが困難で、実用化に難点がある。

弾性面内固有振動問題を対象としたものには、上述の難点を解消するための提案とその数値的検証を行った著者らの報告⁷⁾がある。

板の固有振動問題については、四角形板に対し、四辺単純支持板の Green 関数を用いて慣性項を評価し、固定辺については分布曲げモーメントの重ね合わせにより境界条件を満足させた Kanazawa & Kawai の報告¹⁴⁾がある。しかしこの方法は、四角形以外の形状に適用することが困難である。最近では、3階までの層ポテンシャルを用いて(境界条件により、実際は2つのポテンシャルを用いる)積分方程式を構成した Vivoli らの注目すべき一連の研究^{15)~19)}がある。また、本論文の基礎となったものに岡野の研究⁸⁾がある。

本論文は、積分方程式法の板の固有振動問題の解析への適用性を検討したものである。具体的には、境界形状として、円形、正方形、円環という基本的な形状を選び、また境界条件として、固定、単純、自由支持を選んでそれぞれの組み合わせに対して、本手法の適用可能性および数値解析上の特性を検討した。

前半では、板問題に対する積分方程式の構成について、前論文⁷⁾を参照しながら、補足すべき点、板問題に特有な点に重点をおいて固有値問題を定式化し、後半では、前に提案した手法を板の各固有値問題の解析に適用した。なお、境界形状の取り扱い方として、境界を直線近似した場合の結果、さらに境界を曲線近似して高精度化した場合の結果についても考察した。後者の高精度近似により、他の手法にはみられないような本質的な特徴が明らかにされた。

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科

2. 偏微分方程式と境界条件

まず Fig. 1 に示すように、対象とする板の内部領域を D_- 、外部領域を D_+ 、その境界を ∂D とする。ここでは ∂D は滑らかと仮定しておく。単位外向き法線ベクトルを \mathbf{n} 、単位接線ベクトルを \mathbf{s} 、弧長パラメーターを s とする。便宜上 D_- 、 D_+ 内の点を X または Y 、 ∂D 上の点を x または y と記述することにする。

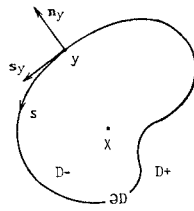


Fig. 1 Domain, boundary, normal and tangent vector

古典論によれば、等方均質な一様な厚さの平板の横変位 w を支配する運動方程式は次のようになる。

$$\Delta^2 w(X, t) + \frac{\rho h}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(X, t) = p(X, t)/K$$

ここに、 Δ はラプラシアン、 $p, \rho, h, K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ はそれぞれ、単位面積当りの横荷重、単位体積当りの質量、板厚、板剛性である。

以後、実際の変位場は実部をとって考えることとし、横荷重 p は時間に対して、角振動数を ω とする $e^{-i\omega t}$ 的調和振動を行っているとする。したがって横変位 w も同じ角振動数をもつ調和振動を行っている定常な状態を考えれば、定常状態の基礎偏微分方程式と境界条件(固有値問題の性質から同次境界条件を考える)は次のようになる。

$$Lu(X) \equiv (\Delta^2 - \lambda^4)u(X) = (\Delta + \lambda^2)(\Delta - \lambda^2)u(X) = q(X)/K \quad X \in D_- \dots \dots \dots (1)$$

$$B_j u(x) = 0 \quad (j=1, 2) \quad x \in \partial D \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 u, q は位置に関する複素数値関数である。

いま、境界値問題 (1), (2) の解 u が求まったとすれば、実際の変位場は次のように表される。

$$w(X, t) = R_e \{u(X) e^{-i\omega t}\}$$

以後、実部を表す記号 R_e と $e^{-i\omega t}$ を書くことは省略するが、実際の場合を考える場合は上の意味で実部を考えることにする。

またパラメーター λ と ω の関係は次のように表される。

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{K} \dots \dots \dots (3)$$

境界条件に用いる作用素 B_1, B_2 としては次の4つのうちから異なる2つを選ぶ^{注1)}。

注1) ここに定義したモーメント (M_n)、等価せん断力 (V_n) 作用素は通常用いられている M_n, V_n の $-1/K$ 倍となっている。実際のモーメント、等価せん断力が問題となる場合は、 $-KM_n u, -KV_n u$ を考えることにする。

$$T_r(\cdot) \dots \dots \dots (4)$$

$$T_r \partial_n(\cdot) \dots \dots \dots (5)$$

$$M_n \equiv T_r [d(\cdot) - (1-\nu) \partial_s^2(\cdot)] \dots \dots \dots (6)$$

$$V_n \equiv T_r \partial_n d(\cdot) + (1-\nu) \partial_s T_r \partial_n \partial_s(\cdot) \dots \dots (7)$$

ここで、 ν はポアソン比であり、 ∂_n, ∂_s はそれぞれ Fig. 1 に示した \mathbf{n}, \mathbf{s} 方向への偏微分を表す。また T_r は次のような境界極限として定義する。

$$T_r u(x) = \lim_{X \rightarrow x} u(X) \quad x \in \partial D, X \in D_+ \text{ or } D_-$$

$B_j (j=1, 2)$ として、たとえば、式 (4), (5) は固定、式 (4), (6) は単純、式 (6), (7) は自由支持境界条件を意味する。

以後、作用素または物理量において、2次元平面 R^2 内の点を明記する必要がある場合は ∂_n, \mathbf{n}_y などと添字 y をつけて記述することにする。

3. 積分方程式の構成

(1) 基本解と放射条件

R^2 において、基礎式 (1) を考え、 R^2 内の任意の点 Y に R^2 平面に垂直に単位の集中心力が作用する場合に R^2 内の任意の点 X で基本解 U が満足すべき微分方程式は次のようになる。

$$L_X U(X, Y; \lambda) = (\Delta^2 - \lambda^4)_X U(X, Y; \lambda) = -\delta(X, Y)$$

ここに L_X などの添字 X は L が点 X に作用することを明示するために付した。上式はスカラー方程式であり、また $L = (\Delta + \lambda^2)(\Delta - \lambda^2)$ と分解できることに注意すれば、板の振動問題における基本解は前論文に示した方法⁷⁾により次のように求まる。

$$U(X, Y; \lambda) = -\frac{i}{8\lambda^2} \{H_0^{(1)}(\lambda r) - H_0^{(1)}(i\lambda r)\} \dots \dots \dots (8)$$

ここに、 $H_0^{(1)}(\lambda r)$ は第1種0次の Hankel 関数であり、 $r = |X - Y|$ である。

ここで放射条件について触れておく。

放射条件は2次元定常問題では次のようである⁴⁾。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\partial_r U - i\lambda U) = O(r^{-1/2})$$

この条件は、物理的には外向きの波のみを選択することを意味している。いま求めた基本解がこの条件を満足していることを示し、同時に基本解の漸近的性質をも確かめておこう。

Hankel 関数の漸近表示(漸近展開第1項)は⁵⁾、

$$H_0^{(1)}(\lambda r) \sim \left(\frac{2}{\pi \lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r - \pi/4)}$$

$$H_0^{(1)}(i\lambda r) \sim \left(\frac{-2i}{\pi \lambda r}\right)^{1/2} e^{-\lambda r - i(\pi/4)}$$

となるので、基本解は実際には放射条件を $O(r^{-3/2})$ として満足していることがわかる。

さて、2. で述べたように、定常場の時間依存性は $e^{-i\omega t}$ であった。これを上の表示において考慮すれば、

$$H_0^{(1)}(\lambda r) e^{-i\omega t} \sim \left(\frac{-2i}{\pi\lambda r}\right)^{1/2} e^{-i(\omega t - \lambda r)}$$

$$H_0^{(1)}(i\lambda r) \sim \left(\frac{-2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2} e^{-i\omega t - \lambda r}$$

すなわち、基本解の第1項は外向きの調和円筒波を表しており、第2項は調和的擾乱が指数関数的に距離とともに減衰することを表している。

なお、擾乱を $e^{i\omega t}$ と仮定すれば、当然第2種 Hankel 関数 $H_0^{(2)}(\lambda r)$ が放射条件を満足する基本解となる。

(2) 層ポテンシャルと jump 条件

板問題のポテンシャルは、板の周上に分布する密度 μ と基本解 U との積として表示されるわけであるが、積分方程式を構成するうえでポテンシャルの性質、特に jump 条件と微分の関係の関係を明確にしておく必要がある。この点は数値解析上最も重要な点となるので、ここで簡単にまとめておく。

先にみたように、板の作用素が Helmholtz 作用素の積に分解できることから、これらポテンシャルの局所的性質は Helmholtz 方程式のポテンシャル、よって Laplace 方程式のポテンシャルに類似した性質をもつことは容易に推察される。板の方程式は Laplace 方程式に比べて微分階数が2階だけ高いのでポテンシャルの不連続性は2階微分高い法線方向微分に現れることになる。

まず、基本解の局所的性質を調べてみる。Hankel 関数の原点近傍の展開を用いれば³⁾、原点近傍の特異性は次のように表される。

$$R_e U(\lambda r) = \left[N_0(\lambda r) + \frac{2}{\pi} K_0(\lambda r) \right]$$

$$= \frac{1}{8\lambda^2} \left[-\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} (\lambda r)^2 + \dots \right) \left(r + \log \frac{\lambda r}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} (\lambda r)^2 + \dots \right) \right] \sim -\frac{r^2}{8\pi} \log r$$

.....(9)

すなわち、板の振動問題の特異性は重調和方程式の特異性 $-r^2 \log r$ に一致していることがわかる。

さて、0階、1階の層ポテンシャルを次のように定義する。

0階の層ポテンシャル

$$u_0(X) \equiv S\mu_0(X) = \int_{\partial D} U(X, y; \lambda) \mu_0(y) dS_y$$

$$X \in R^2 \dots \dots \dots (10)$$

1階の層ポテンシャル

$$u_1(X) \equiv D\mu_1(X) = \int_{\partial D} \{\partial_{n_y} U(X, y; \lambda) \mu_1(y)\} dS_y$$

$$X \in R^2 \dots \dots \dots (11)$$

この定義に基本解の原点近傍の特異性 (9) を考慮すれば、基本解の3階微分が Cauchy 積分の形となり、境界上では0階の層ポテンシャルは3階の法線方向微分に、1階の層ポテンシャルは2階の法線方向微分に不連続性が生じることがわかる。これらの点を考慮すれば、板問題のポテンシャルも古典ポテンシャル論と同様な性質をもち²⁾、前報告にまとめたものと一致する¹⁾。

次に、境界条件と係わりのある不連続性を考えよう。境界条件 (4)~(7) を参照すれば、3階の法線方向微分は、ラプラシアン Δ と関係して $\Delta \partial_n, \partial_n \Delta$ という形で現れることがわかる。すなわち1階の層ポテンシャルによる曲げモーメント項、0階の層ポテンシャルによるせん断力項において、不連続性が現れることがわかる。この不連続量の値は、 ΔU が調和関数であることに注意すれば、調和関数の基本的性質から次のように簡単に導かれる。

$$\partial_{n_x} \Delta_x u_0(x^-)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0(x) + \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} \Delta_x U(x, y; \lambda)\} \mu_0(y) dS_y$$

.....(12)

$$\partial_{n_x} \Delta_x u_0(x^+)$$

$$= -\frac{1}{2} \mu_0(x) + \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} \Delta_x U(x, y; \lambda)\} \mu_0(y) dS_y$$

.....(13)

$$\Delta_x u_1(x^-)$$

$$= -\frac{1}{2} \mu_1(x) + \int_{\partial D} \{\Delta_x \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y$$

.....(14)

$$\Delta_x u_1(x^+)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_1(x) + \int_{\partial D} \{\Delta_x \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y$$

.....(15)

ここに、 x^-, x^+ は内部および外部極限値であることを示している。たとえば、(14) を導く方針のみ示しておく。ほかもまったく同様である。 $X \in D_-, x \in \partial D$ に対して、

$$\Delta_x u_1(x^-) = \lim_{X \rightarrow x^-} \int_{\partial D} \{\Delta_x \partial_{n_y} U(X, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y$$

$$= \lim_{X \rightarrow x^-} \int_{\partial D} \{\partial_{n_y} \Delta_x U(X, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y$$

を考える。 U の特異性 (9) を考慮すると、

$$\Delta_x U \sim -\frac{1}{2\pi} \{\log(\lambda r) + 1\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log \frac{1}{\lambda r} - 1 \right\}$$

$$\partial_{n_y} \Delta_x U \sim -\frac{1}{2\pi r} r_{,n_y}$$

.....(16)

となる。後は、古典ポテンシャル論とまったく同じ方法(たとえば Kellogg²⁾ 参照)により、

$$\oint \partial(\Delta_X U)/\partial n_y dS_y = 0$$

と密度の連続性を用いれば結果が従う。これより、 Δu_0 、 Δu_1 はそれぞれ古典ポテンシャル論における一重層、二重層ポテンシャルの性質をもつことがわかる。また微分が作用する点が y になった場合 $(\partial_{n_y} \Delta y, \Delta y)$ には、jump 量の符号は式 (12)、(13) においては逆転し、式 (14)、(15) においてはそのままであることを注意されたい。

ここでは、当面の数値解析に必要となる、0 階、1 階の層ポテンシャルのみを定義したが、特異性を示す式 (9) を参照すれば、基本解の 3 階までの法線方向微分を含む、より高階のポテンシャルをも同様に定義できることがわかる。数値解析上は、基本解自身の特異性の弱い 0 階、1 階の層ポテンシャルを用いるのが有利である。

(3) Green 積分表示と層ポテンシャル表示による固有値決定積分方程式の誘導

a) Green 積分表示による固有値決定積分方程式

まず、板の内部問題に対する Green の第 3 公式を示せば次のようになる。ここでは $q=0$ とする。

$$\begin{aligned} u(X) = & \int_{\partial D} [U(X, y; \lambda) \{V_n u(y)\} \\ & - \{\partial_{n_y} U(X, y; \lambda)\} \{M_n u(y)\} \\ & + \{M_{n_y} U(X, y; \lambda)\} \{\partial_n u(y)\} \\ & - \{V_{n_y} U(X, y; \lambda)\} u(y)] dS_y, \quad X \in D. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(17)$$

境界上の点 $x \in \partial D$ に対しては、上式右辺第 4 項に不連続性が現れることに注意して、式 (12) で述べた注意を考慮すれば、境界上の表示式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(x) = & \int_{\partial D} [U(x, y; \lambda) \{V_n u(y)\} \\ & - \{\partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{M_n u(y)\} \\ & + \{M_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{\partial_n u(y)\} \\ & - \{V_{n_y} U(x, y; \lambda)\} u(y)] dS_y, \quad x \in \partial D \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(18)$$

また、 $T_r \partial_{n_x} u(x)$ を考えれば、式 (17) 右辺第 3 項に不連続性が現れる点に注意して、式 (12) を考慮すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_{n_x} u(x) = & \int_{\partial D} [\{\partial_{n_x} U(x, y; \lambda)\} \{V_n u(y)\} \\ & - \{\partial_{n_x} \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{M_n u(y)\} \\ & + \{\partial_{n_x} M_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{\partial_n u(y)\} \\ & - \{\partial_{n_x} V_{n_y} U(x, y; \lambda)\} u(y)] dS_y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(19)$$

式 (18) および (19) により、板の境界上で与えられた 2 つの境界条件に対し、2 つの未知量を有する 2 つの境界積分方程式を構成できる。これより、固有値問題に

対する同次境界条件を考慮すれば、Green 積分表示による固有値決定積分方程式が次のように得られる。

(i) 固定条件： $T_r u(x) = T_r \partial_{n_x} u(x) = 0 \quad x \in \partial D$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\partial D} U(x, y; \lambda) \{V_n u(y)\} dS_y \\ & - \int_{\partial D} \{\partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{M_n u(y)\} dS_y = 0 \\ & \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} U(x, y; \lambda)\} \{V_n u(y)\} dS_y \\ & - \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{M_n u(y)\} dS_y = 0 \\ & \dots\dots\dots(20) \end{aligned} \right\}$$

(ii) 単純支持条件： $T_r u(x) = T_r M_n u(x) = 0 \quad x \in \partial D$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\partial D} U(x, y; \lambda) \{V_n u(y)\} dS_y \\ & + \int_{\partial D} \{M_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{\partial_n u(y)\} dS_y = 0 \\ & \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} U(x, y; \lambda)\} \{V_n u(y)\} dS_y + \frac{1}{2} \{\partial_n u(x)\} \\ & + \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} M_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{\partial_n u(y)\} dS_y = 0 \\ & \dots\dots\dots(21) \end{aligned} \right\}$$

(iii) 自由条件： $T_r M_n u(x) = T_r V_n u(x) = 0 \quad x \in \partial D$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\partial D} \{M_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{\partial_n u(y)\} dS_y + \frac{1}{2} u(x) \\ & - \int_{\partial D} \{V_{n_y} U(x, y; \lambda)\} u(y) dS_y = 0 \\ & \frac{1}{2} \{\partial_n u(x)\} \\ & + \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} M_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \{\partial_n u(y)\} dS_y \\ & - \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} V_{n_y} U(x, y; \lambda)\} u(y) dS_y = 0 \\ & \dots\dots\dots(22) \end{aligned} \right\}$$

b) 層ポテンシャル表示による固有値決定積分方程式
板の微分作用素は式 (1) に示したような分解が可能であること、そして 2 つの境界条件 (2) が与えられる点に注意すれば、解 u は 2 つの metaharmonic 関数 (Helmholtz 方程式の解) の和^{注2)}として表される³⁾。

ここで、この 2 つの metaharmonic 関数として、先に定義した板の 0 階、1 階の層ポテンシャルを用いることができる。よって、横荷重 $q=0$ の場合、層ポテンシャルによる板の横変位の表示式は次のようになる。

注2) Vekua³⁾によれば、 $\Delta^k(\Delta + \kappa_1)^{k_1} \dots (\Delta + \kappa_m)^{k_m} U = 0$ の解は、 $U(X, A) = V(X) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} r^j \frac{\partial U_{ij}(X; \kappa_i)}{\partial r^j}$ と表される。ここに、 V, U_{ij} はそれぞれ $\Delta^k V = 0, \Delta U_{ij} + \kappa_i U_{ij} = 0$ の解である。現問題に対しては、 $k=0, k_1=k_2=1, \kappa_1=\lambda^2, \kappa_2=-\lambda^2$ となる。この概念はすでに基本解を求める過程 3. (1) において自然に使用されている。

$$u(X) = \int_{\partial D} U(X, y; \lambda) \mu_0(y) dS_y - \int_{\partial D} \{\partial_{n_y} U(X, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y = (S\mu_0)(X) - (D\mu_1)(X) \dots\dots\dots (23)$$

3つの支持条件に応じ、境界条件(4)~(7)を適用し、jump条件(12),(14)に注意すれば、層ポテンシャル表示による固有値決定積分方程式が次のように得られる。

(i) 固定条件: $T_r u(x) = T_r \partial_n u(x) = 0 \quad x \in \partial D$

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\partial D} U(x, y; \lambda) \mu_0(y) dS_y \\ &- \int_{\partial D} \{\partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y = 0 \\ &\int_{\partial D} \{\partial_{n_x} U(x, y; \lambda)\} \mu_0(y) dS_y \\ &- \int_{\partial D} \{\partial_{n_x} \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(ii) 単純支持条件: $T_r u(x) = T_r M_n u(x) = 0 \quad x \in \partial D$

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\partial D} U(x, y; \lambda) \mu_0(y) dS_y \\ &- \int_{\partial D} \{\partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y = 0 \\ &\int_{\partial D} \{M_{n_x} U(x, y; \lambda)\} \mu_0(y) dS_y - \left[\frac{1}{2} \mu_1(x) \right. \\ &\left. + \int_{\partial D} \{M_{n_x} \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

(iii) 自由条件: $T_r M_n u(x) = T_r V_n u(x) = 0 \quad x \in \partial D$

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\partial D} \{M_{n_x} U(x, y; \lambda)\} \mu_0(y) dS_y - \left[\frac{1}{2} \mu_1(x) \right. \\ &\left. + \int_{\partial D} \{M_{n_x} \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y \right] = 0 \\ &- \frac{1}{2} \mu_0(x) + \int_{\partial D} \{V_{n_x} U(x, y; \lambda)\} \mu_0(y) dS_y \\ &- \int_{\partial D} \{V_{n_x} \partial_{n_y} U(x, y; \lambda)\} \mu_1(y) dS_y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

さてここで、Green積分表示式(17)と層ポテンシャル表示式(23)の関係を考えておこう。板の境界上の各点には、2つの境界条件(2)が課されていることを考えれば、板の横変位の表示式として2つのポテンシャルで十分であることは先に述べた。Green表示式において、境界上に分布する等価せん断力と曲げモーメントの影響を重ね合わせるとすれば、内部問題の変位表示として次式を得る。

$$u(X) = \int_{\partial D} U(x, y; \lambda) \{V_n u(y)\} dS_y$$

これは、Chicurelら¹⁸⁾が静弾性問題と板問題の解析に用いた力の重ね合わせによるReflection methodと基本的には同じものである。層ポテンシャル表示式も上式と同じ物理的意味をもつわけで、Fig. 2には2つのポテンシャルの重ね合わせの状況を概念図に示しておいた。

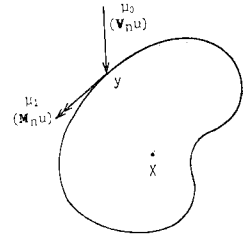


Fig. 2 Superposition of moment and equivalent shear density

以後の数値解析には、この点を考慮し、便宜上層ポテンシャル表示による固有値決定積分方程式を用いることにする。

4. 固有値問題と数値解析法

3.において構成した固有値決定積分方程式はGreen積分表示、層ポテンシャル表示どちらの場合においても一般に次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} &T_r \int_{\partial D} B_1^1 U(x, y; \lambda) \mu^1(y) dS_y \\ &\quad + T_r \int_{\partial D} B_1^2 U(x, y; \lambda) \mu^2(y) dS_y = 0 \\ &T_r \int_{\partial D} B_2^1 U(x, y; \lambda) \mu^1(y) dS_y \\ &\quad + T_r \int_{\partial D} B_2^2 U(x, y; \lambda) \mu^2(y) dS_y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 B_i^j , μ^j ($i, j=1, 2$)は3つの境界条件に応じ、式(20)~(22)または(24)~(26)いずれかの対応する量を表す。

いま、境界値問題(1),(2)に対し、固有値を求める問題は、境界積分方程式(27)に非自明解が存在するためのパラメーター λ の値を求める問題として定式化されたわけである。

さて、式(27)の固有値を求めるための数値解析法について考えよう。積分方程式法による数値解析法一般については、密度の近似と境界形状の近似、そして積分法が問題になると考えられよう。固有値問題の本手法によるとらえ方⁷⁾においては、密度の概念は固有値を求めるうえでは直接的には必要としない。よって、境界形状の近似と積分法がまず問題となろう。これについて本節および以下の節で議論する。また、複素行列式の評価法に関する方法論としては、前に述べた方法⁷⁾を適用する。

本節では、積分方程式を離散化する方法について述べ、密度を一定で近似するという仮定のもとに一般式を

示す。境界を直線近似した場合の一般式，数値計算過程，および結果については 5. に示す。また曲線上の積分法とその結果の比較および本手法の特性については 6. で述べる。

境界を N 個に分割し，“場の量は中央点で評価し，密度は区間内で一定”と仮定する。このとき， I : field point を代表する点， J : source point を代表する点とすれば，式 (27) は次のように離散化される。Fig. 3 を参照されたい。

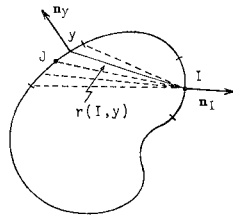


Fig. 3 Integral method, field point I and source point y

$$\left. \begin{aligned} \sum_{J=1}^N \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) \mu^{(1)}(J) + \sum_{J=1}^N \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) \mu^{(2)}(J) \\ = 0 \\ \sum_{J=1}^N \beta^{(1)}(I, J; \lambda) \mu^{(1)}(J) + \sum_{J=1}^N \beta^{(2)}(I, J; \lambda) \mu^{(2)}(J) \\ = 0 \end{aligned} \right\} (I=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(28)$$

上式において，恒等的に零でない密度が存在するときのパラメーター λ の値が求める固有値となる。

上の仮定のもとに，層ポテンシャル表示による固有値決定積分方程式について J 区間から I 点への影響係数を書き下せば次のようになる。

変位影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} U(I, y) dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) &= - \int_{S_J} \partial_{n_y} U(I, y) dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

回転角影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} \partial_{n_I} U(I, y) dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) &= - \int_{S_J} \partial_{n_I} \partial_{n_y} U(I, y) dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

曲げモーメント影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} [A_I U(I, y) - (1-\nu) \partial_{s_I}^2 U(I, y)] dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) &= - \int_{S_J} [A_I \partial_{n_y} U(I, y) \\ &\quad - (1-\nu) \partial_{s_I}^2 \partial_{n_y} U(I, y)] dS_y - \frac{1}{2} \delta_{IJ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

等価せん断力影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} [\partial_{n_I} A_I U(I, y) \\ &\quad + (1-\nu) \partial_{s_I} T_r \partial_{n_I} \partial_{s_I} U(I, y)] dS_y - \frac{1}{2} \delta_{IJ} \\ \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) &= - \int_{S_J} [\partial_{n_I} A_I \partial_{n_y} U(I, y) \\ &\quad + (1-\nu) \partial_{s_I} T_r \partial_{n_I} \partial_{s_I} \partial_{n_y} U(I, y)] dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

ここで (31)₂, (32)₁ の積分は Cauchy の主値の意味に，(32)₂ の積分は，Hadamard の発散積分の有限部分の意味に解釈する⁶⁾。

この表示において，代表点 I と積分点 y が一致する点を除き，微分を実行した結果は次のようになる。

変位影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} [U] dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} [U'(-r, n_y)] dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots(33)$$

回転角影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} [U' r, n] dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} \left[\left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) r, n(-r, n_y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} U' (n \cdot n_y) \right] dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

曲げモーメント影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} \left[\left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) \{1 - (1-\nu)(r, s)^2\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} U' (1+\nu) \right] dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} \left[\left\{ U''' - 3 \left(\frac{1}{r} U'' - \frac{1}{r^2} U' \right) \right\} \right. \\ &\quad \cdot \{1 - (1-\nu)(r, s)^2\} (-r, n_y) \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{r} U'' - \frac{1}{r^2} U' \right) \{(\nu+3)(-r, n_y) \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu)(r, s)(s \cdot n_y) \right] dS_y - \frac{1}{2} \delta_{IJ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

等価せん断力影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, J; \lambda) &= \int_{S_J} \left[\left\{ U''' - 3 \left(\frac{1}{r} U'' - \frac{1}{r^2} U' \right) \right\} \right. \\ &\quad \cdot \{1 + (1-\nu)(r, s)^2\} (r, n) \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{r} U'' - \frac{1}{r^2} U' \right) (5-\nu)(r, n) \right] dS_y \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\delta_{IJ} \\
 & = \int_{S_J} \left\{ U'''' + \frac{1}{r} \left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) \right\} (r, n) dS_y \\
 & - \frac{1}{2}\delta_{IJ} + (1-\nu) \int_{S_J} \left\{ U''''(r, s)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r} \left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) (1-3(r, s)^2) \right\} (r, n) dS_y \\
 & \alpha^{(2)}(I, J; \lambda) \\
 & = \int_{S_J} \left[\left\{ U'' - 6\frac{1}{r} U'''' \right. \right. \\
 & \left. \left. + 15 \left(\frac{1}{r^2} U'' - \frac{1}{r^3} U' \right) \right\} (r, n) (-r, n_y) \right. \\
 & \left. \cdot \{1 + (1-\nu)(r, s)^2\} \right. \\
 & \left. + \left\{ \frac{1}{r} U'''' - 3 \left(\frac{1}{r^2} U'' - \frac{1}{r^3} U' \right) \right\} \right. \\
 & \left. \cdot \{ (1 + (1-\nu)(r, s)^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y) \right. \\
 & \left. + 2(1-\nu)r, nr, s(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_y) \right. \\
 & \left. + r, n(-r, n_y)(7-\nu) \right. \\
 & \left. + \left\{ \frac{1}{r^2} U'' - \frac{1}{r^3} U' \right\} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y) (5-\nu) \right] dS_y \\
 & = \int_{S_J} \left[\left\{ U'' - 3\frac{1}{r^2} \left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) \right\} \right. \\
 & \left. \cdot (r, n) (-r, n_y) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r} \left\{ U'''' + \frac{1}{r} \left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) \right\} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y) \right] dS_y \\
 & + (1-\nu) \int_{S_J} \left[U''(r, s)^2 r, n(-r, n_y) \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{1}{r} U'''' - 3\frac{1}{r^2} \left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) \right\} \right. \\
 & \left. \cdot \{6(r, s)^2 r, n(-r, n_y) - r, n(-r, n_y) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (r, s)^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y) - 2r, nr, s(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_y) \right\} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{r^2} \left(U'' - \frac{1}{r} U' \right) \right. \\
 & \left. \cdot \{3(r, s)^2 r, n(-r, n_y) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y)\} \right] dS_y \\
 & \dots\dots\dots(36)
 \end{aligned}$$

ここに、 U' などは U の r による微分を意味し、 r, n , r, n_y などはそれぞれ I 点、 y 点における法線方向の微分を、 \mathbf{n}, \mathbf{n}_y などはそれぞれ I 点、 y 点における値を意味する。また、式 (36) では、等号第 2 項に 2 つの異なる力による影響係数を分離して示しておいた。第 1、第 2 の積分がそれぞれ、せん断力、ねじりモーメントに起因するせん断力の影響係数である。それぞれの影響を分離して調べる場合には、参考となる。

ここで、一般式 (33)~(36) に現れる基本解の微分をまとめておこう。 $z = \lambda r$ とおけば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 UR(z) &= \frac{1}{8\lambda^2} \left[N_0(z) + \frac{2}{\pi} K_0(z) \right] \\
 UI(z) &= \frac{1}{8\lambda^2} [-J_0(z)]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

$$\left. \begin{aligned}
 UR'(z) &= \frac{1}{8\lambda} \left[-N_1(z) - \frac{2}{\pi} K_1(z) \right] \\
 UI'(z) &= \frac{1}{8\lambda} [J_1(z)]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(38)$$

$$\left. \begin{aligned}
 UR''(z) &= \frac{1}{8} \left[-\left\{ N_0(z) - \frac{1}{z} N_1(z) \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\pi} \left\{ K_0(z) + \frac{1}{z} K_1(z) \right\} \right] \\
 UI''(z) &= \frac{1}{8} \left[J_0(z) - \frac{1}{z} J_1(z) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(39)$$

$$\left. \begin{aligned}
 UR'''(z) &= \frac{\lambda}{8} \left[\left\{ \frac{1}{z} N_0(z) + \left(1 - \frac{2}{z^2}\right) N_1(z) \right\} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{z} K_0(z) + \left(1 + \frac{2}{z^2}\right) K_1(z) \right\} \right] \\
 UI'''(z) &= \frac{\lambda}{8} \left[-\frac{1}{z} J_0(z) - \left(1 - \frac{2}{z^2}\right) J_1(z) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

$$\left. \begin{aligned}
 UR''(z) &= \frac{\lambda^2}{8} \left[\left(1 - \frac{3}{z^3}\right) \left\{ N_0(z) - \frac{2}{z} N_1(z) \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{3}{z^3}\right) \left\{ K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) \right\} \right] \\
 UI''(z) &= \frac{\lambda^2}{8} \left[-\left(1 - \frac{3}{z^3}\right) \left\{ J_0(z) - \frac{2}{z} J_1(z) \right\} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

ここに、 UR, UI は基本解 U の実部、虚部を表し、 $J_n(z), N_n(z), K_n(z)$ は第 1 種、第 2 種、および変形 Bessel 関数を表している。

以下、5., 6. で具体的に数値解析例を示すが、 I, J 区間が一致しない場合については、上に示した式 (33)~(36) が一般式となる。 I, J 区間が一致する場合には、境界を直線近似した場合、または曲線近似した場合によってさまざまな近似法が考えられよう。

上に示した影響係数は一般に次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & \alpha^{(i)}(I, J; \lambda) \\
 & = \int_{S_J} [U(r; \lambda) \text{ およびその微分} \\
 & \quad \cdot [r, n, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y) \text{ など境界形状に関係した量}] dS_y
 \end{aligned}$$

次の 5., 6. ではこれら影響係数を数値積分により数値的に評価することになる。上式からわかるように、この評価法は境界の近似法に關係する。ここで、後に用いる積分法を明確にしておく。5. では境界を多角形で近似し、第 2 の [] 内の量は J 番目の直線区間内で定数と考へて、基本解に關係する量のみを数値積分する。以後これを直線上の積分による方法とよぶ。6. では円弧上で数値積分を行い、境界形状に關係する量をも数値積分に組み込む方法を採用し、影響係数の評価の高精度化について検討する。以後これを曲線上の積分による方法とよぶ。

5. 数値解析例（直線上の積分による方法）

4. では境界を N 個に分割しただけで、境界形状についてはなら仮定を設けなかった。ここでは、境界を N 多角形で近似（すなわち、各分割区間を直線近似）して、この直線上での積分について述べ、次に、これによる数値解析結果について考察しよう。

(1) 直線上の積分法

I, J 区間が一致しない場合は式 (33)~(36) を用いればよく、問題は I, J 区間が一致する場合の積分の評価である。ここでは、Bessel 関数を級数展開し、次に積分するという方法を用いた。以下 $I=J$ の場合について、影響係数の積分を具体的に示しておこう。

J 区間を直線近似しているから、式 (33)~(36) において、 $r_{,ny}=0, r_{,n}=0, \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_y=0$ 、また $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y=1, r_{,s}=1$ であることに注意すれば (Fig. 4 を参照されたい)、各影響係数は次のようになる。

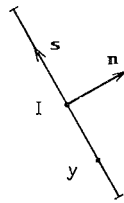


Fig. 4 Integral on straight line segment, case $I=J$

変位影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, I; \lambda) &= \int_{s_I} U(I, y; \lambda) dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, I; \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(42)$$

回転角影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, I; \lambda) &= 0 \\ \alpha^{(2)}(I, I; \lambda) &= \int_{s_I} \left[\frac{1}{r} U' \right] dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots(43)$$

曲げモーメント影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, I; \lambda) &= \int_{s_I} \left[\nu U'' + \frac{1}{r} U' \right] dS_y \\ \alpha^{(2)}(I, I; \lambda) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(44)$$

等価せん断力影響係数

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(1)}(I, I; \lambda) &= -\frac{1}{2} \\ \alpha^{(2)}(I, I; \lambda) &= (2-\nu) \int_{s_I} \left[\frac{1}{r} U''' \right] dS_y \\ &\quad - (1-2\nu) \int_{s_I} \left[\frac{1}{r^2} U'' - \frac{1}{r^3} U' \right] dS_y \end{aligned} \right\} \dots\dots(45)$$

上の (42)~(45) の計算に必要な Bessel 関数の展開については、たとえば文献 5) を参照されたい。後の計算の便宜上、Bessel 関数の原点近傍の特異性をまとめてお

けば次のようになる。

$N_0(z)$	$N_1(z)$	一般に $N_\nu(z)$
$\frac{2}{\pi} \left(\log \frac{z}{2} + r \right)$	$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{z}$	$-\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z} \right)^\nu$
$K_0(z)$	$K_1(z)$	一般に $K_\nu(z)$
$-\left(\log \frac{z}{2} + r \right)$	$\frac{1}{z}$	$2^{\nu-1}(\nu-1)! z^{-\nu}$

式 (42)~(45) に必要な基本解の積分は次のようになる。ここでは $z=\lambda r$ であり $\overline{UR(z)}$ などは r に関する積分を意味する。

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{UR(z)} &= \frac{1}{8\lambda^3} \frac{2}{\pi} \left[\left(\log \frac{z}{2} + r - \frac{4}{3} \right) \frac{z^3}{6} \right. \\ &\quad \left. + \left(\log \frac{z}{2} + r - \frac{83}{42} \right) \frac{z^7}{8064} \right] \\ \overline{UI(z)} &= \frac{1}{8\lambda^3} \left[z - \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{320} z^5 - \frac{1}{16128} z^7 \right] \\ \frac{1}{r} \overline{UR'(z)} &= \frac{1}{8\lambda} \frac{2}{\pi} \left[\left(\log \frac{z}{2} + r - \frac{3}{2} \right) z \right. \\ &\quad \left. + \left(\log \frac{z}{2} + r - \frac{28}{15} \right) \frac{z^5}{960} \right] \\ \frac{1}{r} \overline{UI'(z)} &= \frac{1}{8\lambda} \left[-\frac{1}{2} z + \frac{1}{48} z^3 - \frac{1}{1920} z^5 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{129024} z^7 \right] \\ \overline{UR''(z)} &= \frac{1}{8\lambda} \frac{2}{\pi} \left[\log \frac{z}{2} + r - \frac{1}{2} \right] z \\ &\quad + \left(\log \frac{z}{2} + r - \frac{5}{3} \right) \frac{z^5}{192} \\ \overline{UI''(z)} &= \frac{1}{8\lambda} \left[-\frac{1}{2} z + \frac{1}{16} z^3 - \frac{1}{384} z^5 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{18432} z^7 \right] \\ \frac{1}{r} \overline{UR'''(z)} &= \frac{\lambda}{8} \frac{2}{\pi} \left[\left(\log \frac{z}{2} + r - \frac{31}{20} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{5}{144} z^3 - z^{-1} \right] \\ \frac{1}{r} \overline{UI'''(z)} &= \frac{\lambda}{8} \left[\frac{3}{8} z - \frac{5}{288} z^3 + \frac{7}{15360} z^5 \right] \\ \frac{1}{r^2} \overline{UR''(z)} - \frac{1}{r^3} \overline{UR'(z)} &= \frac{\lambda}{8} \frac{2}{\pi} \left[\left(\log \frac{z}{2} + r - \frac{7}{4} \right) \frac{z^3}{144} - z^{-1} \right] \\ \frac{1}{r^2} \overline{UI''(z)} - \frac{1}{r^3} \overline{UI'(z)} &= \frac{\lambda}{8} \left[\frac{1}{8} z - \frac{1}{288} z^3 + \frac{1}{15360} z^5 \right] \end{aligned} \right.$$

(2) 数値計算結果と考察

上に示した諸式を用いて数値計算を実行した結果を Table 1~9 に示す。幾何形状としては、最も基本的な円形と正方形を選んだ。また、多連結領域の例として円

Table 1 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	3.196	4.611	5.906	6.306	7.144	7.799
Integral Eq. (λ_j)	3.2	4.6	5.9	6.3	7.2	7.9
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	0.13	0.29	0.10	0.10	0.78	1.30

Table 2 Eigenvalues of clamped square plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	5.999	8.568	10.405	11.473	11.500	12.851
Integral Eq. (λ_j)	6.1	8.6	10.5	11.5 (11.51)	11.5 (11.53)	12.9
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	1.68	0.37	0.91	0.24 (0.32)	0.00 (0.26)	0.38

Table 3 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=28, \Delta\lambda=0.01$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	3.196	4.611	5.906	6.306	7.144	7.799
Integral Eq. (λ_j)	3.21	4.64	5.94	6.34	7.18	7.84
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	0.44	0.63	0.58	0.54	0.50	0.53

Table 4 Eigenvalues of clamped square plate ($N=28, \Delta\lambda=0.01$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	5.999	8.568	10.405	11.473	11.500	12.851
Integral Eq. (λ_j)	6.14	8.62	10.47	11.51	11.53	12.86
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	2.53	0.61	0.62	0.32	0.26	0.07

Table 5 Eigenvalues of simply supported circular plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1, \nu=0.3$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	2.231	3.734	5.065	5.455	—	6.965
Integral Eq. (λ_j)	2.2	3.8	5.1	5.5	6.4	7.0
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	1.39	1.77	0.67	0.82	—	0.50
$j_{n,s}$	2.405	3.832	5.136	5.520	6.380	7.016

	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	—	8.376	8.614	—	—	—
Integral Eq. (λ_j)	7.6	8.4	8.66	8.79	9.8	10.0
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	—	0.30	0.53	—	—	—
$j_{n,s}$	7.588	8.417	8.654	8.771	9.761	9.936

環を考えた。円形の半径は 1.0, 正方形の 1 辺は 1.0, 円環の外半径を 1.0 とし, 正規化している。また, 境界分割数の変化と固有値との関係を明示するために, **Table 1, 2** には **Fig. 5, 6** を加えておいた。ここでの数値計算に用いた境界分割数 N , 固有パラメータの分割 $\Delta\lambda$ は次のようなものである。 $N=28$: 円形, 正方形

Table 6 Eigenvalues of simply supported square plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
NASA SP-160* ($\bar{\lambda}_j$)	4.443	7.025	8.886	9.935	11.327	12.953
Integral Eq. (λ_j)	4.4	7.0	8.9	9.9	11.3	13.0
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	0.97	0.36	0.16	0.35	0.24	0.36

	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	13.329	14.050	15.708	16.019	16.918	17.772
Integral Eq. (λ_j)	13.3	14.0	15.7	16.0	16.9	17.7
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	0.22	0.36	0.05	0.12	0.11	0.41

* $\lambda_{mn} = \pi\sqrt{m^2 + n^2}$

Table 7 Eigenvalues of free circular plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1, \nu=0.3$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	2.292	3.014	3.497	4.530	4.648
Integral Eq. (λ_j)	2.4	3.2	3.5	4.6	4.6
$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	4.71	6.17	0.08	1.55	1.03

Table 8 Eigenvalues of clamped annular plates ($N=56, \Delta\lambda=0.1$)

R1/R2	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_1$)	3.196	5.225	6.723	9.445	15.748	49.297
Integral Eq. (λ_1)	3.2	5.4	6.9	9.5	15.9	47.1
$ \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 /\bar{\lambda}_1$ (%)	0.13	3.35	2.63	0.58	0.97	0.42

領域, $N=56$: 円環領域, $\Delta\lambda=0.1$. ここでは, N と $\Delta\lambda$ をこのように固定したが, 後の **6.** で, これらについては再検討を行うことにする。

各 **Table** に示した $\bar{\lambda}_n$ は Leissa により NASA SP-160⁹⁾ に示された結果であり, λ_n が本手法により得られた結果である。また, これらの値の相対誤差をパーセントで示しておいた。ここで比較値として採用した $\bar{\lambda}_n$ は, 正方形単純支持板以外は, すべてなんらかの近似的手法によって得たものである。詳細な点については Leissa⁹⁾ に示された文献に譲るが, 周波数方程式が存在するものについては参考のために下の注 3) に示しておいた。

個々の問題について, 得られた結果を考察してみよ

注3) Clamped circular plate (**Table 1, 3**):

$$J_n(\lambda)I_{n+1}(\lambda) + I_n(\lambda)J_{n+1}(\lambda) = 0$$

Simply supported circular plate (**Table 5**):

$$J_{n+1}(\lambda)/J_n(\lambda) + I_{n+1}(\lambda)/I_n(\lambda) = 2\lambda/(1-\nu)$$

Free circular plate (**Table 7**):

$$\begin{aligned} & [\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu)\{\lambda J_n'(\lambda) - n^2 J_n(\lambda)\}] / [\lambda^2 I_n(\lambda) \\ & - (1-\nu)\{\lambda I_n'(\lambda) - n^2 I_n(\lambda)\}] \\ & = [\lambda^2 I_n'(\lambda) + (1-\nu)n^2\{\lambda J_n'(\lambda) - J_n(\lambda)\}] / [\lambda^2 I_n'(\lambda) \\ & - (1-\nu)n^2\{\lambda I_n'(\lambda) - I_n(\lambda)\}] \end{aligned}$$

これら周波数方程式における n は Nodal diameter の数を表す¹⁾。

Table 9 Eigenvalues of simply supported annular plates on both edges ($N=56$, $\Delta\lambda=0.1$, $\nu=0.3$)

R1/R2	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_i$)	2.231	3.808	4.593	6.325	10.488	31.432
Integral Eq. (λ_i)	2.2	4.1	4.9	6.5	10.6	31.1
$ \bar{\lambda}_i - \lambda_i /\bar{\lambda}_i$ (%)	1.39	7.67	6.68	2.77	1.45	1.06

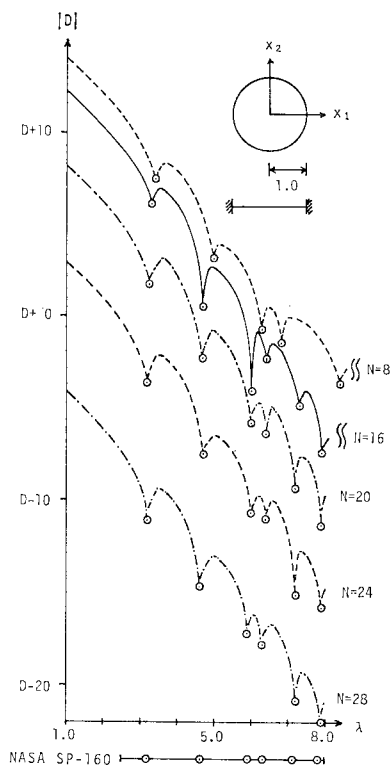


Fig. 5 Eigenvalues of clamped circular plate ($\Delta\lambda=0.1$)

う。Fig. 5, Fig. 6 は、それぞれ円形固定、正方形固定板について、本手法により固有値を求める過程を境界分割数 N に対してプロットしたものである。横軸は固有パラメーター λ であり、縦軸は複素行列式の値の絶対値 $|D|$ である。図の下部には Leissa⁹⁾ の Table における値を示しておいた。これらの図から、固有値の正しい位置を知るには $N=16$ で十分であることがわかる。もちろん分割数が多くなるほど求まる固有値の精度はよくなるわけであるが、以下に示す各 Table では一応 $N=28$ に対する結果を示すことにする。またこの図には示していないが、実際は $\lambda=30$ までの固有値をもれなく、ある程度の精度 (ほぼ 1% 以内) で求めるには、 $N=28$ で十分ということが確認されている。この点については後の 6. でも述べるのでここでは省略してお

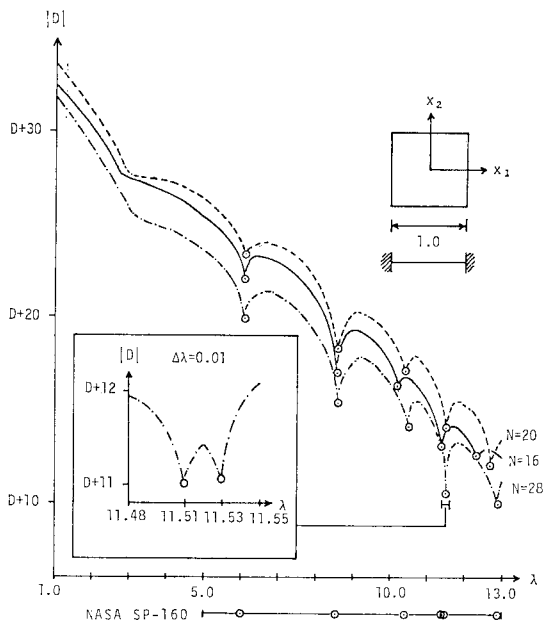


Fig. 6 Eigenvalues of clamped square plate ($\Delta\lambda=0.1$)

く。また、この図は、固有パラメーターの分割を $\Delta\lambda=0.1$ として計算している。Fig. 6 における第 4, 第 5 固有値をみればわかるように、0.1 以内に接近している 2 つの固有値は、さらに固有パラメーターを細分割 (Fig. 6 に示したものは $\Delta\lambda=0.01$) すれば求まることがわかる。

Table 1, 2 は、Fig. 5, 6 における $N=28$ の場合について $\Delta\lambda=0.1$ として Leissa の Table と比較したものである。これより、本手法による結果はこれらの結果とほぼ 1% 以内の誤差で、円形、正方形の場合とも一致していることがわかる。正方形の場合 $\bar{\lambda}_4$ と $\bar{\lambda}_5$ が 0.1 より近いため $\Delta\lambda=0.1$ ではこの差異は追跡できないが、Table 2 にかっこで示したように $\Delta\lambda=0.01$ とすれば、より正確に λ_4, λ_5 が求まることがわかる。実用上は、この程度の差は問題とならないと思われるが念のため、同じ形状、分割数に対して $\Delta\lambda=0.01$ として計算した結果を Table 3, 4 に示しておいた。Table 1, 2 と 3, 4 を比較すれば、 $\Delta\lambda=0.1, 0.01$ とともに相対誤差でほぼ 1% 以内という点では変化はなく、この意味では $\Delta\lambda=0.1$ で十分であると考えられる。ただ、Table 2 におけるように、固有パラメーターの分割幅 0.1 より近くに 2 つ、または、それ以上の固有値が存在する場合に、これら固有値をもより正確に求めようとする場合には、パラメーターの分割幅をより小さくする必要があるということである。

以上固定板については、本手法のもつ特徴を説明するという意味もあり詳しく検討したが、以下手法はまった

く同じであるから得られた結果のみを示す。

Table 5, 6 は、単純支持板に対する結果である。この場合もほぼ1%以内の相対誤差で固有値が求まることがわかる。**Table 5**において空白の箇所は、Leissaの**Table**には載っていないものであるが、注3)に示した円形単純支持板に対する周波数方程式をみればわかるように、nodal diameterの数 n が多くなる時、また高周波数域(λ が大きくなる時)では、この方程式の根は、Bessel関数 $J_n(z)$ の零点に近い(もちろん一致はしない。正しくは隣り合う零点の間)ことがBessel関数の性質を考慮すればわかる。この点をも考慮して、**Table 5**の下部には、Bessel関数の零点を示しておいた。

Table 7は円形自由支持板に対する結果である。第1, 第2固有値に対する値の相対誤差はいままでのものよりも多少劣るが、高次になれば、ほぼ1%の誤差となっており、自由支持板に対する本手法の有効性が理解されよう。

Table 8, 9は円環領域の固定, 単純支持条件に対する結果であり、第1固有値について内半径と外半径の比 $R_1/R_2=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ に対して計算した。 R_1/R_2 が0に近いものが1.0に近いものに比べて精度が劣るのは、1つには数値計算上、行列を組んだ場合、内、外半径の比が0に近づくとき2つの境界上の積分核のもつ特異性の差が大きくなるため行列の性質が悪くなること、また、この比が1.0に近い場合は、薄い円環形状に近づくわけであるが、この場合向かい合う2辺の影響が卓越するが、これが大きさのそろった優対角項(この場合、部分行列の対角項)を構成し、行列の性質がよくなっているためと考えられる。また、 $R_1/R_2=0$ に対する値は**Table 1, 5**に示した中実な板に対する値を示しておいた。**Fig. 7, 8**は R_1/R_2 に対する λ_1 の値の傾向を知るために**Table 8, 9**の結果を図化しておいた。

以上の結果より、固定, 単純, 自由支持板に対し、本手法により求めた固有値は、Leissaの**Table**に示された値とほぼ1%以内の相対誤差内にあることがわかった。また高次固有値ほど正確に求まる傾向にあることがわかる。この点が本手法のもつ最も特徴的な点の1つであることは、前の報告⁷⁾でも述べたとおりである。ここでは、円形, 正方形, 円環という基本的な形状についてのみ計算を行ったが、本論文の目的の1つである積分方程式法の板の固有値解析への適用の可能性と、そのだいたいの精度を確認するという点に関しては、これまでの数値計算でほぼ達成されたものと考えられる。

境界形状の変化に対する融通性は積分方程式法の最も得意とするところであり、プログラムはまったくそのまま適用できる。さらに複雑な境界形状、そして支持条件

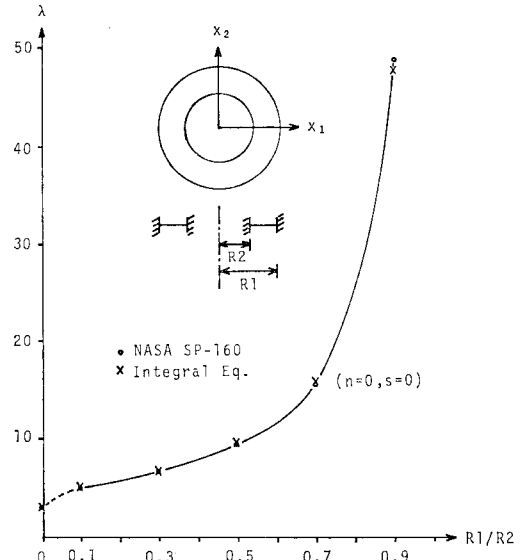


Fig. 7 Eigenvalues of clamped annular plates ($N=56, \Delta\lambda=0.1$)

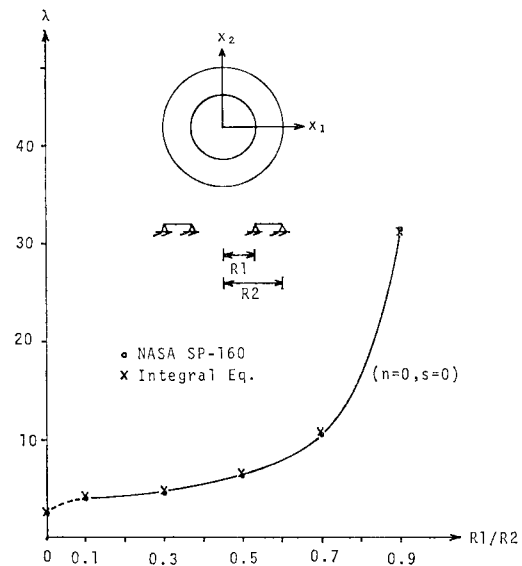


Fig. 8 Eigenvalues of simply supported annular plates on both edges ($N=56, \Delta\lambda=0.1, \nu=0.3$)

を組み合わせた問題などは次の機会に考えたい。

6. 曲線上の積分による解の高精度化および直線上の積分による解との比較検討

本手法のもつ特徴は、いわゆる変位関数に相当するものが基礎方程式を満足する基本解を求めることにより決定されている点であろう。残る問題は与えられた幾何形状のもとで**4.**に示した影響係数をいかに精度よく評価するかということであろう。前節**5.**では、円形形状板

に対しては境界を内接多角形で近似していた。よって境界分割数 N は境界形状そのものの近似度と積分の精度の両方に関係していたと思われる。また前報告⁷⁾においても、数値計算に際しては次の3つの問題があることを指摘しておいた。すなわち ① 境界形状の近似, ② 数値積分法, ③ 固有パラメーターの分割である。本節ではこれらの点を考慮し, 4. で述べたように, 境界形状に関係する量を数値積分に組み込む方法すなわち, 曲線上の積分による方法を採用する。まず, この方法によると境界分割数 N がある意味で nodal line 数を決めていること, N を固定して積分の精度を上げれば, N によって決まるモードに対応する固有値はすべて正確に求まることを数値例でもって示そう。次に本節に示す曲線上の積分法による結果と, 5. に示した直線上の積分法による結果との比較検討を行う。

なお問題の性質を明確にするために, 円形の固定板を解析の対象とした。

(1) 曲線上の積分法

曲線上で積分を行う際には, 5. で述べたような単純化は望めない。基本的には 4. に示した一般式を数値積分にどのように組み込むかが問題になる。

いまの場合, 形状が円形であることを考慮すると 4. の一般式に現れる境界形状に関する量 $r, n, r, n_y, n \cdot n_y$ などは, Fig. 9 に示した記号によれば次のようになる。

$$r, n = -r, n_y = \cos \frac{1}{2} (\pi - \tau), \quad n \cdot n_y = \cos \tau$$

積分法としては, ここでも Gauss 積分法を採用する。

Fig. 9 は境界分割数 $N=4$ に対し Gauss 8 分点積分法を用いた場合の計算法を説明している。Fig. 9 (a) は $I=1, J=2$ の場合であり, ● が各分割区間の中央点 (代表点), ⊙ は 8 個の Legendre 多項式の零点を示している。Fig. 9 (b) は $I=J=1$ の場合で, 分割区間の半分と同じ手法を適用している。

(2) 数値計算結果と考察

a) 積分方程式法による固有値解析における境界分割

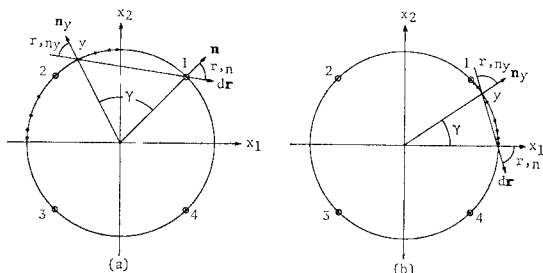


Fig. 9 Integral method on arc segment, (a) Case $I=1, J=2$, (b) Case $I=J=1$

Table 10 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=1, \Delta\lambda=0.1, 8$ point Gauss, arc segment)

$n=0$			
s	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$\frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_j}{\bar{\lambda}_j}$ (%)
0	3.196	3.2	0.13
1	6.306	6.3	0.01
2	9.439	9.5	0.65
3	12.577	12.9	2.57
4	15.716	15.6	0.74
5	18.857	19.2	1.82
6	21.997	23.2	5.47
7	25.138	26.5	5.42
8	28.279	31.9	12.80
9	31.420	—	—

Table 11 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=1, \Delta\lambda=0.1, 48$ point Gauss, arc segment)

$n=0$			
s	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$\frac{ \bar{\lambda}_j - \lambda_j }{\bar{\lambda}_j}$ (%)
0	3.196	3.2	0.13
1	6.306	6.3	0.10
2	9.439	9.4	0.41
3	12.577	12.6	0.18
4	15.716	15.7	0.10
5	18.857	18.9	0.23
6	21.997	22.0	0.01
7	25.138	25.1	0.15
8	28.279	28.3	0.07
9	31.420	31.4	0.06

Table 12 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=2, \Delta\lambda=0.1, 8$ point Gauss, arc segment)

s	$n=0$			$n=1$		
	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$\frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_j}{\bar{\lambda}_j}$ (%)	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$\frac{ \bar{\lambda}_j - \lambda_j }{\bar{\lambda}_j}$ (%)
0	3.196	3.2	0.13	4.611	—	—
1	6.306	6.3	0.10	7.799	8.2	5.14
2	9.439	9.5	0.65	10.958	10.9	0.53
3	12.577	12.6	0.18	14.109	14.1	0.06
4	15.716	15.8	0.53	17.256	17.5	1.41
5	18.857	18.9	0.23	20.401	20.5	0.49
6	21.997	22.2	0.92	23.545	—	—
7	25.138	—	—	26.689	26.9	0.79
8	28.279	28.5	0.78	29.832	30.0	0.56
9	31.420	31.2	0.70	32.976	32.5	0.90

Table 13 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=2, \Delta\lambda=0.1, 48$ point Gauss, arc segment)

s	$n=0$			$n=1$		
	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$\frac{ \bar{\lambda}_j - \lambda_j }{\bar{\lambda}_j}$ (%)	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$\frac{ \bar{\lambda}_j - \lambda_j }{\bar{\lambda}_j}$ (%)
0	3.196	3.2	0.13	4.611	—	—
1	6.306	6.3	0.10	7.799	8.1	3.86
2	9.439	9.4	0.41	10.958	10.9	0.53
3	12.577	12.6	0.18	14.109	14.0	0.77
4	15.716	15.7	0.10	17.256	17.4	0.83
5	18.857	18.9	0.23	20.401	20.5	0.49
6	21.997	22.0	0.01	23.545	23.4	0.62
7	25.138	25.1	0.15	26.689	26.8	0.42
8	28.279	28.3	0.07	29.832	30.0	0.56
9	31.420	31.4	0.06	32.976	32.9	0.23

数 N の意味について

上に述べた方法によれば、境界形状の近似はほぼ正確であると考えてよかろう。ここでは曲線上の積分法を採用した場合の境界分割数 N の意味を調べてみよう。

Table 10~13 はこの目的のために行った結果である。**Table** における n は nodal diameter (節直径) の数, s は nodal circle (節円) の数であり, λ_j は Leissa の **Table** の値⁹⁾, λ_j は本手法により得られた結果, 次に相対誤差をパーセントで示している。**Table 10, 11** は境界分割数を $N=1$ 注4), **Table 12, 13** は境界分割数を $N=2$ とそれぞれ固定し, また固有パラメーターの分割を $\Delta\lambda=0.1$ として数値積分法を Gauss 8 分点から 48 分点積分法へと変化させた結果である。まず $N=1$ に対する **Table 10, 11** をみれば, $n=0$ に対する低次固有値については 8 分点積分法で十分であり, 高次固有値をも正確 (相対誤差で 1% 以内) に求めようとすれば 48 分点で十分であることがわかる。この 2 つの **Table** で確認できた最も重要な点は, $n=0$ すなわち節直径のない対称モードにおいて, 節円の数の増加による固有値は数値積分の精度が適切なものであればすべて求まるといふ点である。**Table 12, 13** についても同じことがいえる。境界分割数を $N=2$ と指定すれば節直径の数を $n=1$ と指定したことになるが, これら **Table** からわかるように $n=0, 1$ に対する固有値はすべて求まることがわかる。特に **Table 13** において, $n=0$ に対する結果は対称モードに対応する **Table 11** に示したものとまったく一致しており, さらに $n=1$ に対応する反対称モードに対応する値が, これもほぼ 1% 以内の相対誤差で新し

く求まっていることがわかる。

以上の結果をまとめれば, 本手法にいう境界分割数 N とは, **4.** で各分割区間で密度を一定と仮定したことにより, 境界密度の分布を規定している。よって, ここで示したような簡単な幾何形状の物体に対しては, 節直径の数 (変数分離可能系においては角座標方向の節) を決めていることがわかる。径方向の節は, 原理的には無限個, 基本解が自動的に生成することがわかる。この点, 境界形状に沿った曲線上で積分を行えば, いわゆる周波数方程式と同じ意味のものがどんな形状に対しても作成できるわけである。

また, 任意形状板に対しては節直径のような明確な線は出ないわけであるが, 被積分関数に含まれる基本解とその導関数の組み合わせは, 内部の複雑な節線をも十分に追跡し得るものと考えられる。この任意曲線上での積分は, 数値計算上はかなりやっかいな問題とは思われるが, ここで例示した数値例からわかるように, 本手法による固有値解析法では, 境界と交わるような節線 (nodal line) モードに対応する固有値は境界分割数に依存するが, 境界と交わらない節線に対応する固有値はすべて求まる。このことは, 領域内部で分割を行う他の数値解析法とは著しく相違する点であろう。

b) 直線上の積分による方法と曲線上の積分による方法との比較検討

境界分割数 N は積分路として境界曲線そのものを用的場合は先に示したような明確な意味をもつが, いままで一般に行われてきたように境界を多角形で近似して直線上で積分を行う場合には, N は境界形状の近似度と

Table 14 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=28, \Delta\lambda=0.1, 8$ point Gauss, straight line segment)

$s \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3.196 3.2 0.13	4.611 4.6 0.24	5.906 5.9 0.10	7.144 7.2 0.78	8.347 8.4 0.63	9.526 9.5 0.27	10.687 10.6 0.81	11.835 11.9 0.55	12.971 13.0 0.22	14.098 14.2 0.72	15.218 15.2 0.12
1	6.306 6.3 0.10	7.799 7.8 0.01	9.197 — —	10.536 10.6 0.61	11.837 11.9 0.53	13.107 13.2 0.71	14.355 14.4 0.31	15.585 15.6 0.10	16.799 16.8 0.006		
2	9.439 — —	10.958 11.0 0.38	12.402 12.5 0.79	13.795 — —	15.150 15.2 0.33	16.475 — —	17.776 17.8 0.14	19.058 19.0 0.30			
3	12.577 12.5 0.61	14.109 14.2 0.64	15.579 15.6 0.13	17.005 17.1 0.56	18.396 — —	19.758 19.8 0.21					
4	15.716 — —	17.256 — —	18.745 — —	20.192 20.3 0.53							
5	18.857 — —	20.401 20.5 0.49	21.901 21.7 0.92								

注 4) ここでいう $N=1$ とは, まったく境界分割が行われていないことを意味するので注意されたい。境界の周全体が 1 つの要素となっているという意味である。

Table 17 Eigenvalues of clamped circular plate ($N=28$, $4\lambda=0.01$, 8 point Gauss, arc segment)

$s \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3.196	4.611	5.906	7.144	8.347	9.526	10.687	11.835	12.971	14.098	15.218
	3.20	4.61	5.91	7.14	8.34	9.51	10.66	11.83	12.90	13.98	14.99
	0.12	0.02	0.07	0.06	0.08	0.17	0.25	0.04	0.55	0.84	1.50
1	6.306	7.799	9.197	10.536	11.837	13.107	14.355	15.585	16.799		
	6.31	7.80	9.20	10.53	11.80	13.09	14.32	15.58	16.66		
	0.06	0.01	0.03	0.06	0.31	0.13	0.10	0.03	2.00		
2	9.439	10.958	12.402	13.795	15.150	16.475	17.776	19.058			
	9.44	10.96	12.40	13.79	15.13	16.44	17.71	18.90			
	0.01	0.02	0.02	0.04	0.13	0.21	0.37	0.83			
3	12.577	14.109	15.579	17.005	18.396	19.758					
	12.58	14.11	15.51	17.00	18.37	19.69					
	0.02	0.007	0.44	0.03	0.14	0.34					
4	15.716	17.256	18.745	20.192							
	15.72	17.26	18.74	20.17							
	0.03	0.02	0.03	0.11							
5	18.857	20.401	21.901								
	18.86	20.40	21.89								
	0.02	0.005	0.05								

からみて当然の帰結であろう。次に、直線上の積分法と曲線上の積分法のどちらの方法によっても、 $4\lambda=0.01$ の場合には、すべての固有値が1%以内の相対誤差内で求まっている。これは直線上の積分法でも、いまの問題では $N=28$ で円形がほぼ近似できているためであろう。また低次固有値については、どちらの方法によっても $4\lambda=0.1$ に対し、十分精度よく求まっている。このように、形状特性を表現するに十分な分割数を選んだ場合には、2つの数値積分法による結果には大きな差はないようである。

さらに、固有値が場の大域的性質に支配される点を考慮して境界分割を行えば、固有値問題に対する境界分割数は少なくとも低次固有値に対しては、他の問題（たとえば局所的な性質が重要となるような応力を求める問題）に対するものよりも、より少ない分割数で十分なものとなる。

ただ、1つの問題は、指定するパラメーターの分割幅 4λ 以内、またはこの近くに2つ以上の固有値が存在する場合、この固有値は求まらないか、求まりにくいという点であろう。低次固有値についてはこの心配はほとんどないが、高次固有値になると一般にその間隔が近くなるのでこの点注意を要する。これら4つの Table 作成に際しては、相当広い固有パラメーターの区間を考えたがある周波数帯に限定して正確な固有値を求めたい問題の場合には、本手法は特に偉力を発揮しよう。

最後に計算時間についてふれておこう。たとえば、曲線上の数値積分による方法で $N=4$ の場合、1回の計算で約 1.5 milli seconds (1979 年現在 FACOM M-190, GE Compiler, TSS 端末出力) であった。計算時間の問題は用いる計算機の性能や、コンパイラなどによっ

ても異なってくるので一概にはいえないが、容量の点とここに示した本手法の特徴を考えれば、本手法は小型計算機でも十分な方法であるといえる。

7. おわりに

ここで得られた結果をまとめると次のようになる。

本手法によれば、

(1) 境界形状によらず、固定、単純、自由、3つの境界条件に対し、固有値は相当精度よく (NASA SP-160 の Table との比較においてほぼ 1% 以内) 求まる。

(2) 高次固有値も、低次固有値とまったく同程度の精度で求まる。

(3) 本手法による固有値解析法では、境界と交わるような節線 (nodal line) モードに対応する固有値の数は境界分割数に依存する。しかし、境界と交わらない節線 (円) モードに対応する固有値の数は境界分割数には無関係である。例示したように、円形板では全周を一区間としても、いわゆる節円に対応した固有値はすべて求まる。

(4) 従来の直線上の積分による方法によっても、境界形状特性を評価するに十分な分割数を選べば、曲線上の積分による方法とほぼ同程度の結果を得ることができる。

(5) ある周波数帯に限定して正確な固有値を必要とする場合、本手法は特に有効となる。

なお、本論文作成にあたり、本研究に関する問題点の指摘とご討議をいただいた福井卓雄講師 (現、福井大学

勤務)ならびに岡野伸一氏(現,三井造船(株)勤務)に深く感謝の意を表したい。また,本計算には京都大学大型計算機センター FACOM M-190 を使用したことを付言しておく。

参 考 文 献

- 1) Rayleigh, J.W.S. : The Theory of Sound, Vol. I, Ch. IX, X, Dover, 1945.
- 2) Kellog, O.D. : Foundations of Potential Theory, Dover, 1953.
- 3) Vekua, I.N. : New Methods for Solving Elliptic Equations, Appendix II, North-Holland, 1967.
- 4) Sommerfeld, A. : Partial Differential Equations in Physics, § 28, Accademic Press, 1949.
- 5) Watson, G.N. : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Second ed., Cambridge, 1966, または Abramowitz, M. and I.A. Stegun : Handbook of Mathematical Functions, Dover, 1972.
- 6) Schwartz, L. : 超函数の理論, 原書第3版(岩村他, 訳), 第2章, 岩波, 1971.
- 7) 丹羽義次・小林昭一・北原道弘 : 弾性固有値問題の積分方程式による解法, 土木学会論文報告集, No. 285, pp. 17~28, 1979.
- 8) 岡野伸一 : 積分方程式法による平板の固有振動の解析, 京都大学大学院工学研究科修士論文, 昭和51年.
- 9) Leissa, A.W. : Vibration of Plates, NASA SP-160, 1969.
- 10) Tai, G.R.C. and R.P. Shaw : Helmholtz equation eigenvalues and eigenmodes for arbitrary domains, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 56, No. 3, pp. 796~804, 1974.
- 11) De Mey, G. : Calculation of eigenvalues of the Helmholtz equation by an integral equation, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, No. 1, pp. 59~66, 1976.
- 12) De Mey, G. : A simplified integral equation method for the calculation of the eigenvalues of Helmholtz equation, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 11, No. 8, pp. 1340~1342, 1977.
- 13) Hutchinson, J.R. : Determination of membrane vibrational characteristics by the boundary integral equation method, In : Recent Advances in Boundary Element Methods, Ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, London, pp. 301~316, 1978.
- 14) Vivoli, J. : Mise on equation et conditions aux limites pour les problemes de plaque, 7-th International Congress on Acoustics, Budapest, pp. 613~616, 1971.
- 15) Vivoli, J. : Vibrations de plaques et potentiels de couches, Acoustica, Vol. 26, No. 6, pp. 305~314, 1972.
- 16) Vivoli, J. and P. Filippi : Eigenfrequencies of thin plates and layer potentials, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 55, No. 3, pp. 562~567, 1974.
- 17) Kanazawa, T. and T. Kawai : On the lateral vibration of anisotropic rectangular plates (Studied by the integral equation), Proceedings of the 2nd Japan National Congress for Appl. Mech., pp. 333~338, 1952.
- 18) Chicurel, R. and E.W. Suppiger : The reflection method in elasticity and bending of plates, ZAMP, Vol. 15, No. 6, pp. 629~638, 1964.

(1979.6.14・受付)