

積分方程式法による弾塑性問題の解析

APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION METHOD TO
ELASTOPLASTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

小林 昭一*・西村 直志**

By Shoichi KOBAYASHI and Naoshi NISHIMURA

1. 序

今日、積分方程式法は線形問題、特に静弾性学の境界値問題の解法としてしばしば用いられている。一方、弾塑性問題などの非線形問題への応用可能性については比較的初期の段階から指摘されているにもかかわらず、その後の進展をみていない現状である。その原因としては、① 必ずしも数値計算に適しているとはいえない積分表示が使われていたこと、② 研究者の間に積分方程式の特異性や、塑性論そのものへの認識不足があったこと、などが指摘されよう。たとえば弾性論の Green 公式を弾塑性へ拡張した Swedlow-Cruse の式^{1),2)}は、応力境界値問題へ適用した場合、本論文で述べる一重層ポテンシャル法に比較して積分計算量が多くなる。また応力関数を用いる方法^{3),4)}も、変位が求めにくいうえ、3次元への拡張ができないこと、用いる近似関数を高次のものとせねばならないこと⁵⁾などの欠点がある。さらに Swedlow-Cruse の式を直接平面問題に適用してきたこれまでの研究には誤りがあることが最近ようやく注意されている⁶⁾ (もっともこの文献 5) には、微積分の順序交換に関する重大な誤りがある。多少ともポテンシャル論の知識を有する者にとって、このことは文献 6) の指摘を待つまでもないであろう)。このように、積分方程式法による弾塑性問題の解析に関する研究は、事実上この手法の良否をうんぬんする段階には達していないとみてよい。

一方、著者らは近年弾性学の応力境界値問題の解法としての一重層ポテンシャル法の有利さを指摘してきた。一重層ポテンシャル法の場合、Green 公式と違って二重層ポテンシャルを含まず、関数近似および積分計算量の面で有利である⁷⁾。この手法を弾塑性問題へ応用すれば、

従来の積分方程式による解法より有効な手法となり得るのである。さらに、積分方程式法本来の利点である未知数の個数の減少、および特異性の表現の容易さを生かすことにより、FEM, FDM などの従来の手法以上の結果を期待することも可能であろう。たとえば、弾塑性境界は一重層ないしは微分した物体ポテンシャルの密度の不連続面として表現できることを以下に示すが、特異面としての弾塑性境界を他の方法で表現することは容易ではない。本論文はそのような観点から新しい積分方程式法による弾塑性問題の定式化の可能性を検討したものである。まず一重層ポテンシャル法を用いた弾塑性問題の解析法を定式化する。次に二重層ポテンシャルの利点を生かす得るのはクラックの問題であることに注目し、二重層ポテンシャル法によるクラックの弾塑性解析法について述べる。最後にこれらの手法の適用性を検討する意味で、ごく簡単な数値例を若干示す。

2. 準 備

以下で必要となる結果を参照の便宜のために掲げる。

(1) 塑性学からの準備

a) 構成仮定

本論文で扱う増分理論による微小変形弾塑性構成式は次の形に表示され得るものである。なお、簡単のために単一降伏条件の場合に限定する。

(i) 降伏関数:

$$f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}) \dots \dots \dots (1)$$

ここに $\boldsymbol{\tau}$ は応力、 $\boldsymbol{\xi}$ は内部パラメーター (の組)、たとえば塑性ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^p$ 、塑性仕事 $\int \boldsymbol{\tau} : d\boldsymbol{\epsilon}^p$ (\int は $\int \boldsymbol{\tau} : d\boldsymbol{\epsilon}^p = \int \tau_{ij} d\epsilon^p_{ij}$ 等を表す) など (の組) である。 $f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$ なる $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi})$ のみ実現し得る。完全弾塑性体では $\boldsymbol{\xi}$ は現れない。

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科

(ii) 流れ則

連合流れ則を仮定する。すなわち、

$$d\epsilon^p = \frac{\partial f}{\partial \tau} d\lambda \dots \dots \dots (2)$$

ここに $d\lambda$ は、

$$\begin{cases} d\lambda = 0 & \frac{\partial f}{\partial \tau} : d\tau < 0, f = 0 \text{ または } f < 0 \text{ のとき} \\ d\lambda > 0 & \frac{\partial f}{\partial \tau} : d\tau > 0, f = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となるパラメーターである。 $\frac{\partial f}{\partial \tau} : d\tau = 0, f = 0$ のとき、硬化があれば $d\lambda = 0$ 、完全弾塑性体では $d\lambda > 0$ である。

(iii) 移行 (発展) 式

$$d\xi = \theta(\tau, \xi) : d\epsilon^p \dots \dots \dots (3)$$

を仮定する。塑性ひずみ (この場合 $\theta_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$)、塑性仕事 (この場合 $\theta = \tau$) など (の組) はこの条件を満たす。

以上の仮定のもとに、

$$d\epsilon^p = \frac{\partial f}{\partial \tau} (D : d\epsilon) \dots \dots \dots (4)$$

となる。ここに D は次の形の増分量によらない 2 階のテンソル、

$$D = \frac{\frac{\partial f}{\partial \tau} : C}{\frac{\partial f}{\partial \tau} : C : \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial f}{\partial \xi} * \theta : \frac{\partial f}{\partial \tau}} \dots \dots \dots (5)$$

であり、 $d\epsilon$ はひずみ増分である。また式 (5) で C は弾性常数テンソル (一応等方性を仮定して $C : \epsilon = \lambda 1 \text{ tr } \epsilon + 2\mu \epsilon$ とするが、この仮定は必ずしも必要ではない)、 $*$ は適当な積である (たとえば、文献 8) p. 67 参照)。完全弾塑性体では $\frac{\partial f}{\partial \xi} * \theta : \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ である。

b) つり合い式

3 次元の場合、および平面ひずみ状態でのつり合い式は、

$$A^* du - (C : d\epsilon^p) \cdot \nu = 0 \text{ in } D^e \cup D^p \dots \dots \dots (6)$$

$$\overset{n^e p}{T} du = \overset{n^e p}{T} du^+ - (C : d\epsilon^p) \cdot n^e p \text{ on } \partial D^e p \dots \dots \dots (7)$$

となる。ここに $D^e (D^p)$ は弾 (塑) 性域、 $\partial D^e p$ は弾塑性境界を表し、 $n^e p$ は塑性域から弾性域を向く方向を正とした、 $\partial D^e p$ に立てた単位法線ベクトルである。 ν はグラディエントである。 A^* は Navier 作用素

$$A^* = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \quad (\Delta : \text{ラプラシアン}) \dots \dots \dots (8)$$

 $\overset{n}{T}$ は弾性表面力作用素

$$\overset{n}{T} = \lambda n \nabla \cdot + \mu \left(\frac{\partial}{\partial n} + \nabla n \cdot \right) \dots \dots \dots (9)$$

である。諸量の肩に付けた +, - は、本論文では、後述の二重層ポテンシャルの符号に合わせてそれぞれ内, 外部極限を表すことにする。式 (7) での内 (外) 部極限は

塑 (弾) 性側からの極限となる。 $d\epsilon^p$ は一般に 0 にはならない。なお、平面ひずみでは、 $C : d\epsilon^p$ における $\text{tr } d\epsilon^p$ は $d\epsilon^p_{11} + d\epsilon^p_{22} + d\epsilon^p_{33}$ と解すべきである。平面応力状態を考える場合は、上の諸式で λ を $2\mu\lambda/(\lambda+2\mu)$ で置き換えるとよい。この場合、 $C : d\epsilon^p$ における $\text{tr } d\epsilon^p$ は $d\epsilon^p_{11} + d\epsilon^p_{22}$ と解すべきであり、体積塑性ひずみ $= 0$ と仮定しても一般には $\text{tr } d\epsilon^p = -d\epsilon^p_{33} \neq 0$ であることに注意しなければならない。

(2) ポテンシャル論からの準備⁷⁾ $\Gamma(x, y)$ を無限弾性体の Green テンソルとする。

(i) 一重層ポテンシャル

$V(x) = \int_{\partial D} \Gamma(x, y) \cdot \varphi(y) dS_y$ は ∂D を超えて連続であり、 ∂D への内 (外) 部極限は、

$$\overset{n}{T} V^\pm(x) = \pm \frac{\varphi(x)}{2} + \int_{\partial D} \overset{n}{T} \Gamma(x, y) \cdot \varphi(y) dS_y, \quad x \in \partial D \dots \dots \dots (10)$$

を満たす。 n は x における ∂D の外向き単位法線ベクトルであり、 φ は一重層密度とよばれるベクトル値関数である。また $\overset{n}{T}$ は Γ に前から作用し、微分は x に関してとる。 dS_y は変数 y に関する積分を意味する。

(ii) 二重層ポテンシャル

$$\begin{aligned} W(x) &= \int_{\partial D} \Gamma_I(x, y) \cdot \phi(y) dS_y, \quad \Gamma_I(x, y) \\ &= \Gamma(x, y) \overset{\leftarrow n}{T} \text{ は,} \\ W^\pm(x) &= \mp \frac{\phi(x)}{2} + \int_{\partial D} \Gamma_I(x, y) \cdot \phi(y) dS_y, \\ & \quad x \in \partial D \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

を満たす。ここに ϕ は二重層密度とよばれるベクトル値関数であり、 $\Gamma(x, y) \overset{\leftarrow n}{T}$ における \leftarrow は $\overset{n}{T}$ を Γ に後から作用させ、微分は y に関してとることを意味する。 n は点 y でのものである。

(iii) 物体ポテンシャル

$X(x) = \int_D \Gamma(x, y) \cdot \chi(y) dV_y$ は、 D において Poisson の公式

$$A^* X(x) = -\chi(x) \quad x \in D \dots \dots \dots (12)$$

を満たす。ここに χ は物体ポテンシャル密度とよばれるベクトル値関数である。

以下の記述においては、ほとんど自明であるのでアーギュメントは省略して表記することにする。

3. 積分方程式法による弾塑性問題の解析

式 (6) は、弾塑性変位増分場が物体力 $-(C : d\epsilon^p) \cdot \nu$ を伴った弾性変位 (増分) 場とみなし得ることを示している。また、式 (7) は $\partial D^e p$ において $\overset{n^e p}{T} du$ が大きさ

$(\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) \cdot \mathbf{n}^{e^b}$ の不連続を有することを示している。それゆえ、式 (10), (12) を考慮して、変位増分 $\mathbf{d}\mathbf{u}$ を、

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} dV + \int_{\partial D^{e^b}} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}^{e^b} dS \dots (13)$$

と仮定してよい。式 (6), (7), (10), (12) より、

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} + (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \dots (14)$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}^{e^b} - (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) \cdot \mathbf{n}^{e^b} = \mathbf{0} \dots (15)$$

を得る。式 (13) へ、式 (14), (15) を代入して Gauss の定理を用いれば、

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \mp (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) dV \dots (16)$$

となる。ここ (および以下) で複号は上が内部、下が外部問題に対応する。 \mathbf{n} は ∂D に立てた外向き単位法線ベクトルである。いま、

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \mp (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) \cdot \mathbf{n}$$

とおくと、

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) dV \dots (17)$$

を得る。これを時間で積分すれば、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\phi} dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) dV \dots (17)'$$

を得る。ここに \mathbf{u}_0 は初期変位であり、 \hat{D}^b は全過程において降伏の生じた部分の和集合である。

式 (17) から計算される境界条件および流れ則を連立すれば、 $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$, $\mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b$ を未知数として弾塑性解析を行うことができる。しかし流れ則の特性を生かすことによつて、より数値解析に適した積分表示式を得ることができる。実際、

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{D} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon} \dots (18)$$

とおくと (式 (4), (5) 参照), 式 (17) は、

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : \left(\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) dV \dots (19)$$

と書き直される。 dV はスカラーであることに注意すべきである。

以上のようにして得られた式 (19) が一重層ポテンシャル法による弾塑性解析の基礎式である。式 (19) を用いて境界条件を表示し、流れ則 (18) と連立して解けば、弾塑性変位増分場を求めることができる。

次に以上の結果の変形として、複数降伏条件、およびクラックの問題に対する結果を記す。

(i) 複数降伏条件の場合、

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} dS + \sum_{i=1}^N \int_{(f^i=0)} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : \left(\mathbf{C} : \frac{\partial f^i}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) dV \dots (20)$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\nu}^i = \mathbf{D}^i : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon} \quad 1 \leq i \leq N \text{ s.t. } f^i(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}^i) = 0 \dots (21)$$

のように拡張できる。

(ii) クラックの場合、二重層ポテンシャルを用いて、

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \mathbf{d}\mathbf{u}_0 + \int_S \boldsymbol{\Gamma}_I \cdot \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\phi}} dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : \left(\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) dV \dots (22)$$

および式 (18) の連立となる (ただし、式 (18) の $\mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}$ の項に $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nu} \mathbf{d}\mathbf{u}_0 + \mathbf{d}\mathbf{u}_0 \boldsymbol{\nu})$ の項が加わる)。ここに S はクラック面、 $\mathbf{d}\mathbf{u}_0$ は $\mathbf{D}^* \mathbf{d}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ を満たす変位増分場である。式 (22) は式 (17) を得たのとはほぼ同じ方法で得られるが、Swedlow-Cruse の式¹⁾において極限移行を行っても得られる。なお式 (11) より $\mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ はクラックの開口変位増分の 2 倍を意味することになる。

最後に 2 つ注意を付け加える。

㊸ 式 (17) は $\mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^e + \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b$, $\mathbf{d}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^e$, $\mathbf{d}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ のみから得られる。したがって、加速度項が無視できる範囲では粘塑性理論にも適用できる。その場合、 $\mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b$ は $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\xi}$ のみで定まることが多く、未知関数は $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$ のみとなる。

㊹ 式 (17), (18) から得られる積分方程式を陽に書き下すためには、 $\boldsymbol{\nu} \mathbf{d}\mathbf{u}$ の D^b での値および ∂D への極限形を求めればよい。たとえば 3 次元問題の場合、 D^b においては、

$$\boldsymbol{\nu} \mathbf{d}\mathbf{u} = \mathbf{Y} : (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) + \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) dV \dots (23)$$

となる。ここに \mathbf{Y} は、任意の 2 階のテンソル $\boldsymbol{\epsilon}$ に対して、

$$\mathbf{Y} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{15\mu} \left(\frac{3\lambda + 8\mu}{\lambda + 2\mu} \boldsymbol{\epsilon} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \mathbf{1} \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \right) \dots (24)$$

となる 4 階のテンソルである。また \int は主値積分を意味する。式 (23) の ∂D への極限形は、

$$\boldsymbol{\nu} \mathbf{d}\mathbf{u} = \pm \hat{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \pm (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2} \mathbf{Y} : (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) + \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} dS + \int_{D^b} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\Gamma} \overleftarrow{\boldsymbol{\nu}} : (\mathbf{C} : \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^b) dV \dots (25)$$

と書ける。ここに $\hat{\mathbf{S}}$ は ∂D の外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} を用いて、任意のベクトル $\boldsymbol{\phi}$ に対して、

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\phi} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \dots (26)$$

となる 3 階のテンソルである。 D^b での主値積分は、 ∂D

上に中心を有する半径 ϵ の半球を D^p から除いて積分を行い、 $\epsilon \downarrow 0$ としたときの極限である。

たとえば応力境界値問題では、式 (25) から計算される表面力増分に対する境界条件と、式 (23), (25) から計算される流れ則を連立して解くことになるが、得られる方程式の可解性を一般的に議論することは容易ではない。しかし $d\epsilon^p$ が与えられた場合、Fredholm の諸定理⁹⁾により容易に、内部問題については与えられた表面力増分 df が、合力=0, 合モーメント=0 の条件を満たすとき、また外部問題では常に解けることを示すことができる。いいかえれば、物理的に適切な条件のもとで、 D^p で滑らかな、任意の $d\epsilon^p$ を有する弾塑性変位増分場は、一重層によるポテンシャル表示式 (17) をもつことになる。

4. 数値計算法

本節では、本論文で採用した数値計算法について述べる。3. で述べた一重層ポテンシャル法による一般の応力境界値問題の解法を例にとる。

数値計算法は、弾性の場合と基本的には変わらない。すなわち、未知関数 $d\phi, d\psi$ を適当な形状関数を用いて離散化し、選点法によって離散化された $d\phi, d\psi$ に関する連立方程式を得、これを解いて近似解を構成する。また、増分計算の方法も、FEM などで用いられているものと本質的に変わらない。個々の問題点について、本論文で用いた解決策を以下に述べる。

① 積分の評価法

$\partial D, D^p$ を有限個の要素に分割してモデル化し、各要素上で未知関数を一定とする。その場合、計算すべき積分は解析的に評価したものを用いる。特異積分を扱う場合、常に微積分の順序交換の不可能性が問題となるが、ここでの方法によれば直接微分操作によって式 (23), (25) のような形を意識することなく、境界条件や流れ則を構成することができる。

② 塑性域の評価法

D^p はあらかじめ降伏の予想される部分を要素分けしておき、各要素図心にとった代表点での応力が $f(\sigma, \xi) = 0$ を満たした時点から除荷が生ずるまで、その要素が D^p を構成するものとする。なお D^p のモデル化は、物理的、工学的判断によって行わねばならない。

③ 境界条件における $d\epsilon^p$ の処理法

∂D に接する物体要素では、代表点を ∂D にとっておけば境界条件に現れる $d\epsilon^p$ の処理が容易である。

④ 増分計算法

いわゆる単純増分法を用いる。増分幅は物体要素を 1 個ずつ降伏させるように決定する。また、すべての降伏

した物体要素で計算された $d\psi$ が非負であることを確かめ、負のものがある場合にはその要素が除荷したものとみなして増分計算をやり直す。連立方程式を解いた直後に除荷判定ができるのも本手法の利点の 1 つである。

⑤ 連立方程式の解法

各ステップの解の精度をそろえるためには直接法を用いるのがよいと考えられる。ここで Crout 法を用いている。

なお、クラックの問題については 5. (3) をみていただきたい。

5. 数値解析例

本節ではいままでに述べた手法の 2 次元問題への適用例を示す。

(1) 円孔の押拡

円孔の押拡問題 (Fig. 1) は、平面ひずみ状態、Tresca の降伏条件、非硬化の仮定のもとに、部分的に解析的に解くことができ⁹⁾、工学的に重要な応力に対する解析解が知られている。それゆえ数値解析精度の検証に適した問題の 1 つである。ここでは無限完全弾性体中の円孔の押拡問題を解析する。

数値解析に用いた条件は次のようである。 $E=2.1 \times$

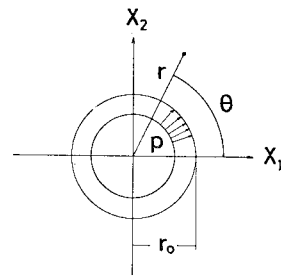


Fig. 1 Circular hole subject to internal pressure.

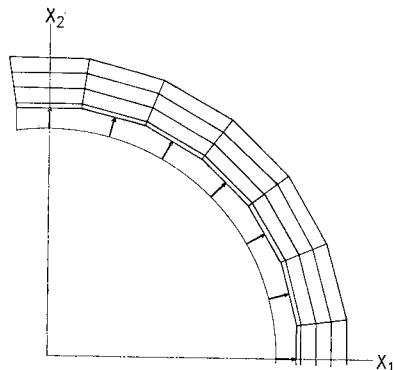


Fig. 2 Model of circular hole.

10⁶kg/cm², $\nu=0.3$, $\sigma_y=2500$ kg/cm². 降伏条件は von Mises として硬化は考えない (なお Tresca の条件を用いた解析解で σ_y を $2\sigma_y/\sqrt{3}$ で置き換えれば von Mises の条件による解析の近似解となることが知られている⁹⁾). もちろん平面ひずみを仮定した. 内圧 p は 1500, 1650, 2000 kg/cm² (0.6, 0.66, 0.8 σ_y) の 3 ケースとした. 数値計算に用いたモデルを Fig. 2 に示す. 原点对称問題として解析したので, 表面要素 12, 物体要素 48 を使用したことになる. また寸法は最も外側にある頂点が半径 1.070, 1.070, 1.200 r_0 の円周上に乗るように決定した. なお解析解から求まる各ケースの塑性域半径は, 各ケースそれぞれ 1.020, 1.074, 1.213 r_0 である.

次に解析結果を示す. Fig. 3 には周応力 $\tau_{\theta\theta}$ の解析結果を示した. 実線は解析解に上記の修正を加えたものである. 各ケースともかなり良好な結果である. 誤差は最大のもので約 4% である. Fig. 4 は τ_{rr} の解析結果である. 図の ∇ は弾塑性境界を表している. これもかなり良好な結果であり, 誤差は最大のもので約 5% である.

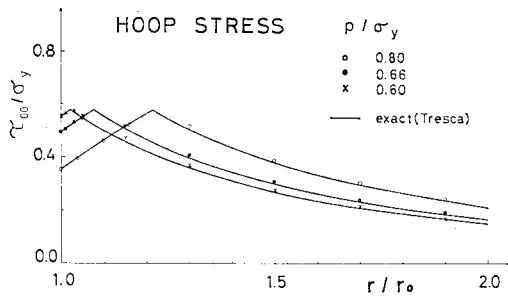


Fig. 3 Hoop stress around a circular hole subject to internal pressure.

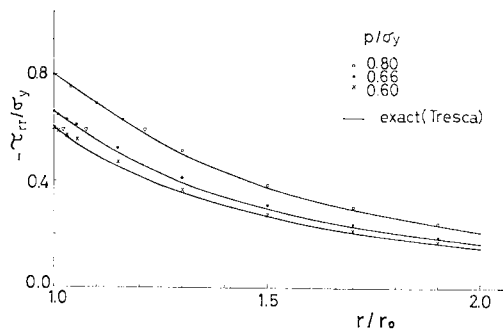


Fig. 4 τ_{rr} around a circular hole subject to internal pressure.

Table 1 $\tau' : \tau' / \frac{2}{3}\sigma_y^2$ in the plastic zone; circular hole subject to internal pressure, $p=0.8\sigma_y$.

r/r_0	1 (Boundary)	1.041	1.101	1.160
$\tau' : \tau' / \frac{2}{3}\sigma_y^2$	1.0006	1.0008	1.0006	1.0006

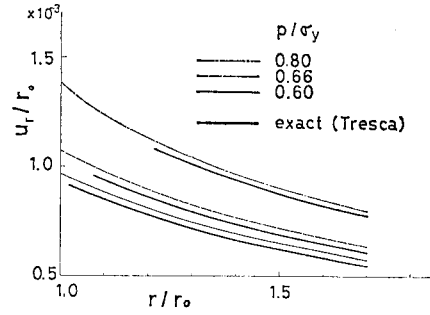


Fig. 5 Displacement around a circular hole subject to internal pressure.

ある. なお, これらの図から一般に弾性域の応力を精度よく求めることが, 塑性域の応力の評価より困難であることがわかる. Table 1 は $p=0.8\sigma_y$ の場合の塑性域での降伏条件の満足度を示している. もちろん正解では $\tau' : \tau' / \frac{2}{3}\sigma_y^2 = 1$ となる (τ' : 偏差応力). これより単純増分計算によっても累積誤差はあまり問題にならないことがわかる. もっとも, この数字自体は, 応力増分が正確に求まっておれば単純増分計算でも達成し得る程度の値であることを示すことができるので, 特に驚くべきものではない. むしろ応力が正確に求まっていることの証明と考えてよいであろう (なお $d\epsilon^p = \tau' : d\epsilon / \frac{2}{3}\sigma_y^2$ という表示式は自己修正特性, すなわち誤差によって $f(\tau) \neq 0$ となった場合, $f(\tau)$ を 0 にもどす方向を向く特性を有していることを示すことができる).

最後に変形に関する計算結果を Fig. 5 に示す. 太線は解析解 (弾性域での結果のみ知られている) である. これをみると結果はやや過大 (誤差 6% 程度) である. 一重層ポテンシャル法を用いた場合, この程度の粗いメッシュでは変位の精度がこの程度となること, およびメッシュの細分によって精度を向上させ得ることは, 弾性問題の解析における実績に照らして予想し得るものである.

以上のように, かなり分割が粗いにもかかわらず, 十分良好な結果が得られたといえよう.

(2) 円孔を有する板の二軸引張

Tresca または von Mises の降伏条件に従う, 円孔を有する無限非圧縮完全弾塑性体が無限遠方で二軸的に引張を受ける場合 (Fig. 6) の解析解は, Галин (Galín) によって求められている⁹⁾. 本節ではこの問題についての解析解と数値結果を比較する.

数値解析に用いた材料特性は, Poisson 比以外は 5. (1) におけるものと同一である. Poisson 比は非圧縮性を近似的に満たし, かつ数値精度を損なわないために

0.45 とした。応力状態は、無限遠で $\tau_{11}^0=1750 \text{ kg/cm}^2$ ($0.70 \sigma_y$), $\tau_{22}^0=1875 \text{ kg/cm}^2$ ($0.75 \sigma_y$) の場合、および $\tau_{11}^0=1875 \text{ kg/cm}^2$ ($0.75 \sigma_y$), $\tau_{22}^0=2125 \text{ kg/cm}^2$ ($0.85 \sigma_y$) の 2 ケースとした。応力径路は一樣な初期応力 σ^0 を与え、境界での表面力を $\sigma^0 \cdot n \rightarrow 0$ とするよう選んだ。数値計算用のモデルとしてはケース 1 の場合 5. (1) の $p=0.8 \sigma_y$ の解析に用いたもの、ケース 2 の場合には Fig. 7 に示したものをを用いた。

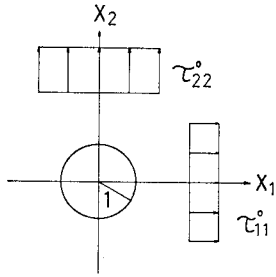


Fig. 8 Circular hole subject to biaxial tension.

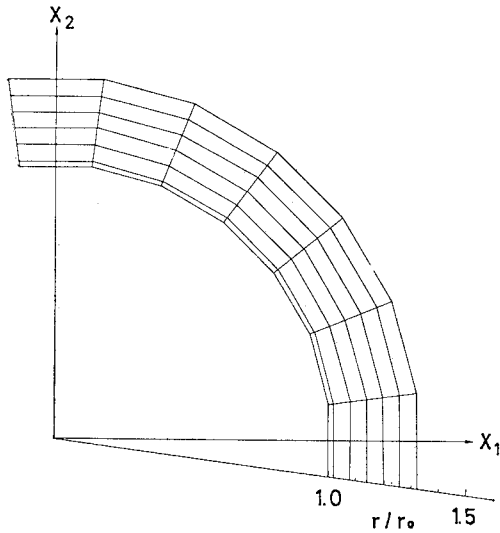


Fig. 7 Model of circular hole for Galin's problem.

次に解析結果を示す。Fig. 8 (a), (b) は各ケースの塑性域を示している。太線は解析解 (楕円) を示し、斜

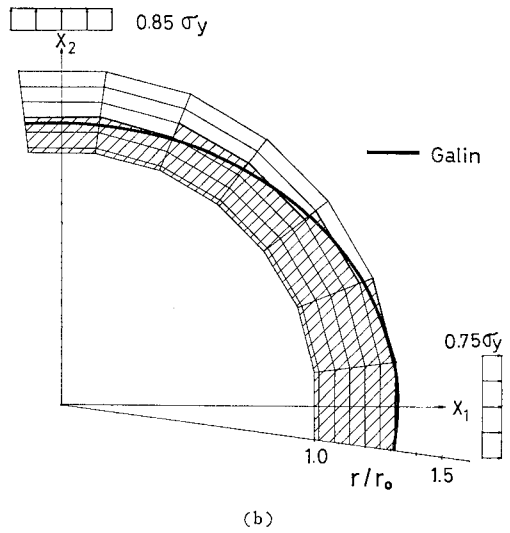
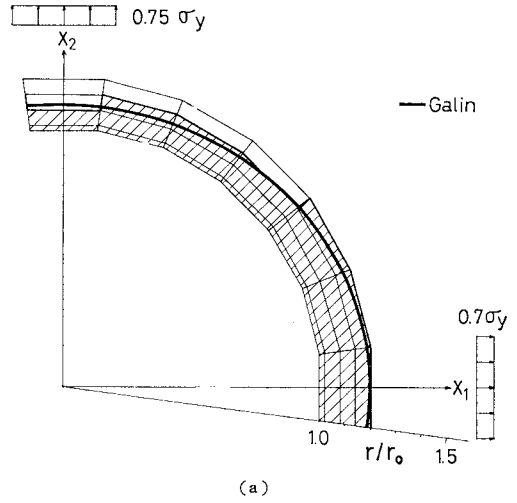


Fig. 8 Plastic zone around a circular hole subject to biaxial tension.

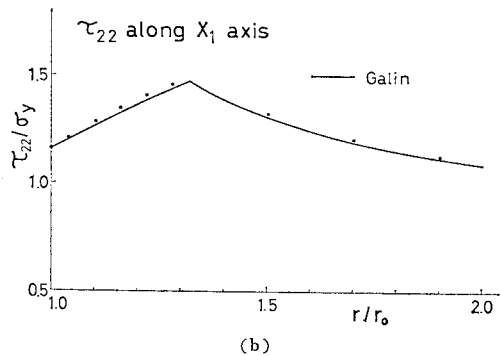
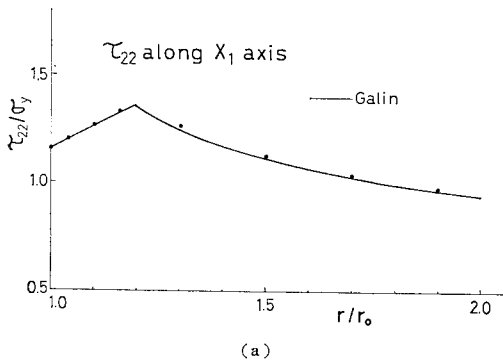


Fig. 9 τ_{22} along x_1 axis; circular hole subject to biaxial tension.

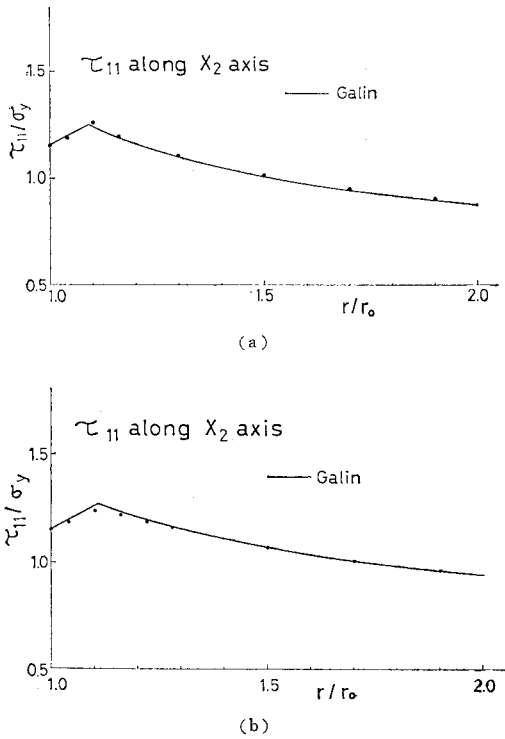


Fig. 10 τ_{11} along x_2 axis; circular hole subject to biaxial tension.

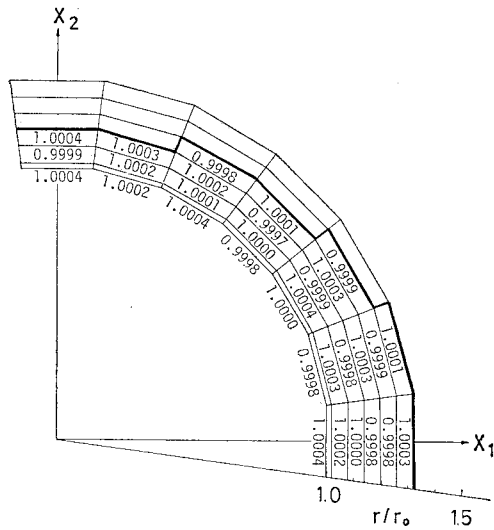


Fig. 11 $\tau' : \tau' / \frac{2}{3} \sigma_y^2$ in the plastic zone; circular hole subject to biaxial tension.

線は数値結果を示している。両者はかなりよく一致している。Fig. 9 (a), (b) は各ケースの x_1 軸に沿う τ_{22} の分布を示している。おのおの 2, 1% 程度の誤差である。Fig. 10 (a), (b) は各ケースの x_2 軸に沿う τ_{11} の分布である。これも弾塑性境界が正解とモデルとは多

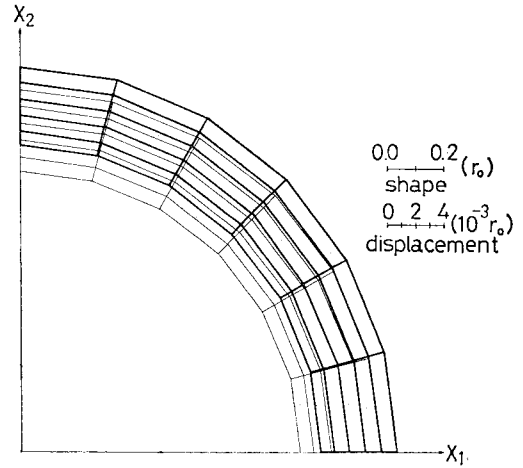


Fig. 12 Deformation around a circular hole subject to biaxial tension.

少ずれているにもかかわらず良好な結果である。Fig. 11 は、ケース 2 の $\tau' : \tau' / \frac{2}{3} \sigma_y^2$ を表す。数値的な誤差の影響、および上述の $d\epsilon^p$ の自己修正特性のために $\tau' : \tau' / \left(\frac{2}{3} \sigma_y\right)^2 < 1$ のところもあるが、全体的に $\tau' : \tau' / \frac{2}{3} \sigma_y^2 \approx 1$ が十分良好な精度で達成されており、累積誤差が小さいといえよう。最後に Fig. 12 にケース 2 について計算された円孔周辺の変形を示す（解析解は弾性域におけるもののみ知られている）。

(3) クラックの弾塑性解析

クラック先端近傍の弾塑性解析は、近年盛んな非線形破壊力学の基礎データともなるもので、重要である。その数値解析法としては FEM が広く用いられているが、特殊な要素を用いるなどの工夫が行われることが多い。一方、二重層ポテンシャルは、特異性が高いため一重層ポテンシャルより多少使いにくい点があるが、その物理的実体の変位の不連続であるため、使い方さえ注意すれば自然なクラック解析手法となると考えられる。なお、いわゆる体積力法¹⁰⁾は、Poisson 比=0 とした場合に二重層ポテンシャルがダブルットを積分したものになることを利用したものと考えてよい。

さて、弾塑性解析を行う前に次の点に注意する。すなわち、被圧クラック (Pressurized Crack) に関する弾性問題の場合、二重層・Galerkin 法は選んだ近似関数空間、すなわち選んだ形状関数 ϕ^I ($1 \leq I \leq N$) に対して、

$$W^I = \int \Gamma^I \cdot \phi^I dS \quad 1 \leq I \leq N$$

で張られる N 次元線形空間におけるポテンシャルミナム原理に等価である。これは式 (11) および $\Delta^* W^I = 0$ から明らかである。そこで、区分線形近似 (二重層密

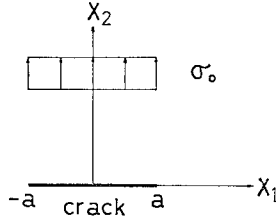


Fig. 13 Central crack subject to mode I tension.

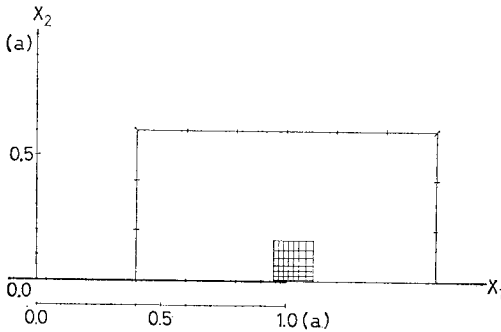


Fig. 14 Model of central crack.

度は、一重層密度より高次の近似をすべきであることがわかっている⁴⁾。二重層・Galerkin 法を用いて、無限板中のモード I の荷重を受ける中央クラック (Fig. 13) の問題を弾性解析した。モデルは Fig. 14 のクラックの部分である (8 自由度)。その結果、平面ひずみ、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, 半クラック長 5 cm の条件下で、 $\tau_{22}^0 = \sigma_0 = 1000 \text{ kg/cm}^2$ の場合、ひずみエネルギー密度 W , 表面力 t , 変位 u で次のように定義される J 積分,

$$J = \int_c W dx_2 - \int_c t \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} ds \dots \dots \dots (27)$$

は、6.811 kg/cm と求まった。正解 6.807 と比較して誤差は 0.06% である。以上のようにして二重層・Galerkin 法は、非常に有効なクラックの弾性解析法であることがわかる。

次に弾塑性解析に上の手法を応用する。すなわち、境界条件に Galerkin 法を用いる。ただし流れ則に関しては、簡単のために選点法を用いる。なお、この場合、弾性のときと違ってクラックチップでの二重層密度 $d\phi$ は 0 でない。本来この点を考慮すべきであるが、ここでは簡単のためにこれを無視し、小規模降伏の場合のみを解析する。

材料特性は、 $H' = d\bar{\sigma}/d\epsilon^p = 0.05 E$ の等方硬化を仮定した以外は 5. (1) と同一である。クラックとしては Fig. 13 の半クラック長 5 cm の中央クラックを選び、応力条件は無限遠でのモード I の引張応力 $\sigma^0 = 600, 800, 1000 \text{ kg/cm}^2$ ($0.24, 0.32, 0.40 \sigma_y$) の 3 ケースとした。応力径路は $\tau_{22}^0 = \sigma_0$ を初期応力として与えるもの

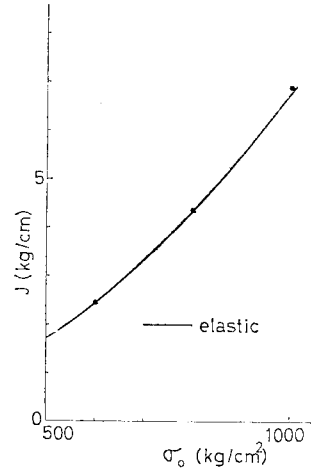


Fig. 15 J integral for central crack subject to mode I tension.

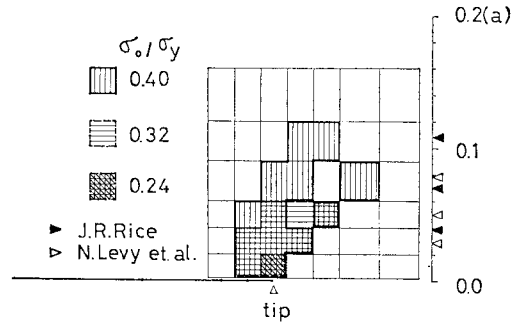


Fig. 16 Plastic zone near the crack tip.

と、無限遠の応力が 0 から σ^0 まで漸増するものの 2 つを解析したが、結果に大差がなかったので以下では前者の結果を述べる。なお、解析に用いたモデルは Fig. 14 に示すものであって、図の外側のループを用いて J 積分を評価した。

Fig. 15 は J 積分の計算結果である。実線は弾性のものである。これより小規模降伏の条件は十分に満足されていることがわかる。Fig. 16 は塑性域形状の解析結果である。最大塑性域寸法については J. Rice が J 積分および剛塑性理論を用いた近似式を得ている¹¹⁾。また N. Levy らは FEM を用いて小規模降伏のときの最大塑性域寸法評価式を得ている¹²⁾。Fig. 16 中にそれらから予測される結果をあわせて記入してある。これらを比較するとほぼ数値結果は妥当なものといえよう。ただし Fig. 16 で $\sigma^0 = 1000 \text{ kg/cm}^2$ ($0.4 \sigma_y$) の場合、塑性域に「穴」が生ずるのは物理現象かどうかは不明である。計算上は、これらの要素は降伏後除荷するという結果になる。

このように、クラックの解析については円孔の問題と比較してやや不十分である。この点については前述のク

ラックチップでの二重層密度の問題や、体積積分の項における de^p のクラックチップでの処理（特異性）などについての研究が今後必要であろう。

最後に、計算時間について述べる。たとえば本論文の 5. (2) で述べた円孔板の二軸引張のケース 2 の場合、31 ステップの増分計算に 16 秒の CPU time を要した（京都大学大型計算機センターの M 190 使用）。これより、十分高速なアルゴリズムであると結論できる。ただし演算時間は使用する積分計算用のルーチンの効率に大きく左右され得ることを指摘する。

6. 結 論

一重層ポテンシャル法による弾塑性解析法が定式化され、その変形として二重層ポテンシャル法によるクラックの弾塑性解析法が定式化された。これらは、従来の弾塑性解析法に比べて積分計算量が少なく、十分実用的なものであることが特色である。

数値解析例として円孔の押込、円孔を有する板の二軸引張、クラックの弾塑性解析を行った。前二者では、十分高精度の解析が高速で行われることがわかった。

なお、本論文で示された手法は、2 次元解析だけでなく、3 次元解析にもそのまま使用できる。特に、各物体要素の未知数が 1 個という性質は 3 次元の場合にも保存され、実用的な 3 次元解析手法となることが予想される。それゆえ、今後この方面への適用が期待できよう。

参 考 文 献

- 1) Swedlow, J.L. and T.A. Cruse : Formulation of Boundary Integral Equations for Three-Dimensional Elasto-Plastic Flow, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, pp. 1673~1683, 1971.
- 2) Rzasnicki, W. and A. Mendelson : Application of Boundary Integral Method to Elastoplastic Analysis of V-notched Beams, *Int. J. Fracture*, Vol. 11, No. 2, pp. 329~342, 1975.
- 3) この方面の review として、Mendelson, A. : *Boundary-Integral Methods in Elasticity and Plasticity*, NASA, TN D-7418, 1973. Mendelson, A. and L.U. Albers : *Application of Boundary Integral Equations to Elastoplastic Problems, Boundary-Integral Equation Method; Computational Applications in Applied Mechanics* (Ed. by T.A. Cruse & F.J. Rizzo), *Proc. ASME; AMD-Vol. 11*, 1975. などがある。
- 4) 小林昭一・西村直志 : 積分方程式法の解析精度の向上に関する考察, *土木学会論文報告集*, No. 291, pp. 15~26, 1979.
- 5) Mukherjee, S. : Corrected Boundary-Integral Equations in planer Thermoelastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13, pp. 331~335, 1977.
- 6) Bui, H.D. : Some Remarks about the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 14, pp. 935~939, 1978.
- 7) Kupradze, V.D. : *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, (Tr. by H. Gotfrend), Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1965.
- 8) R. ヒル : 塑性学, 培風館, 1954.
- 9) Galin, L.A. (Галин, Л.А.) : Plane Elasto-Plastic Problem, Plastic Zones around Circular Openings in Plates and Beams (in Russian), *P.M.M.*, Vol. 10, pp. 367~386, 1946.
- 10) Savin, G.N. : Stress Concentration around Holes, (Tr. by E. Gros), Pergamon, 1961.
- 11) Nishitani, H. and Y. Murakami : Stress Intensity Factors of an Elliptical Crack or a Semi-Elliptical Crack Subject to Tension, *Int. J. Fracture*, Vol. 10, No. 3, pp. 353~368, 1974.
- 12) Rice, J.R. : Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture, Chapt. 3 in "FRACTURE" (Ed. by H. Liebowitz), Vol. 2, Academic Pr., 1967.
- 13) Levy, N., P.V. Marchal, W.J. Ostergren and J.R. Rice : Small Scale Yielding Near a Crack in Plane Strain; A Finite Element Analysis, *Int. J. Fracture Mech.*, Vol. 7, No. 2, pp. 143~156, 1971.

(1979.7.24・受付)