土木学会論文報告集
第304号・1980年12月
【論　文】

変形し得る多孔体中の流れの支配式に関する考察

SOME CONSIDERATIONS ON THE GOVERNING EQUATIONS OF FLOW THROUGH DEFORMABLE POROUS MEDIA

山　上　拓　男*
By Takuo YAMAGAMI

1. まえがき

近年，土構造物が浸透水に起因して変形ないし破壊する現象の予測法を確立する気運が急速に高まりつつある．こうした土-水相互作用場の系統だった解析法を確立するためには，飽和・不飽和領域を含め変形し得る多孔体中の流れの支配式を明確にしなければならない．幸いなことに変形し得る多孔体中の流れは，多くの場合飽和領域に限定されてはいるけれども，圧密論に先駆的研究をみることができる．したがって既往の圧密論を詳細に吟味し，その中から有用な手掛りを得ようとする態度はごく自然ななりゆきであろう．

本論文はこのような観点のもとに，飽和・不飽和領域を一体とした変形し得る多孔体中の流れの支配式を模索する過程で明らかとなった 2，3 の特筆すべき事項を取りまとめたものである．すなわち，Terzaghi に始まるいくつかの圧密支配式の誘導過程をつぶさに調べていたある時期に，既往の圧密論には2つの異なった理論構成のあることに気づいた．それは端的にいえば，固相・液相間の相対速度および固体部分の質量保存則の導入の有無にある．すなわち第1の方法は固定された座標系に対する液相の速度のみを考えたもの，第2のそれはさらに固相の変位速度をも考慮したもので，後者の場合は結局固相・液相間の相対速度を導入したことになる．そして奇妙なことに両理論の結論は見事に一致するのである．

変形し得る多孔体の意義は正に固相が変位速度をもち得ることであって，この意味で第2の方法が正しいといわざるを得ない．にもかかわらず，両者が一致する点に大きな疑問を抱き種々検討したところ，第1の方法には力学の基本原理である固相の質量保存則の欠如という重大な誤りのあることが明らかとなった．

ところがこの誤りをダルシー則の表示に伴うあいまいさが補って，結果的には正しい圧密支配式に到達していることが判明した．

以下このような点を中心に議論を展開する．その構成は **2**．で一般的な基礎式を要約し，これに基づいて **3**．で代表的な圧密論を取りあげ，力学の基本原理の立場から，詳細な検討と考察を加えている．

2. 基礎方程式

本研究で対象とする系はいかなる場合でも，その熱的効果は無視し得るものとする．すると一般に変形し得る多孔体中の流体の運動を規定する基礎式は，流体・固体について，少なくとも力学の基本法則である質量保存則（連続の式）と運動量保存則（運動方程式）を満たさねばならない．無論これらに付随して材料の構成則や状態方程式あるいは適合条件式などを考慮せねばならないことはいうまでもない．

ここではこれら力学の基本法則にのっとって，Zaslavsky[1]，Bear・Zaslavsky・Irmay[2]，Verruijt[3]，Bear[4]，Yong・Warkentin[5] らを参照しつつ，本論文で必要とする範囲内に限定して基礎式を整理しておく．なお，ここでいう多孔体とは主として土を想定しているため，断わりなく固相・液相・気相という言葉と，土粒子・水・空気なる用語を混同して用いる．

いま，運動下にある固相・液相および気相の3相よりなる系を考え，各相にそれぞれ添字 s, w, a を付して区別する．まず，空間に固定された座標系に関して，単位面積当りの質量流量を $\boldsymbol{n}_s, \boldsymbol{n}_w, \boldsymbol{n}_a$，容積流量を $\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_w, \boldsymbol{q}_a$，また，液相・気相の間隙を流れる真の流速を $\boldsymbol{v}_w, \boldsymbol{v}_a$，固相の変位速度を $\boldsymbol{v}_s$ で表す．さらに，各相の質量密度を ρ_s, ρ_w, ρ_a，間隙率 n，飽和度 S_w，気体飽和度 S_a($S_w+S_a=1$)，容積含水率 $\theta=S_w n$ とする．このとき次の関係が認められる．

* 正会員　工博　徳島大学講師　工学部建設工学科

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{n}_s=\rho_s\boldsymbol{q}_s,\ \boldsymbol{n}_w=\rho_w\boldsymbol{q}_w,\ \boldsymbol{n}_a=\rho_a\boldsymbol{q}_a\\ \boldsymbol{q}_s=(1-n)\boldsymbol{v}_s,\ \boldsymbol{q}_w=S_wn\boldsymbol{v}_w=\theta\boldsymbol{v}_w,\ \boldsymbol{q}_a=S_an\boldsymbol{v}_a\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

（1） 質量保存則

一般化された保存則[6]によれば，運動下にある各相について化学反応等が存在しないとしたときの質量保存則は，その一般形が次式で与えられる．

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}+\mathrm{div}(g_\alpha \boldsymbol{V}_\alpha)=0 \quad (\alpha=s,\ w,\ a) \cdots\cdots(2)$$

ここに，g_α：系の単位体積当りに含まれる α 相の質量，t：時間，$\boldsymbol{V}_\alpha$：固定された座標系に関する α 相の速度ベクトル．

これより，各相の質量保存則は次の3式となる．

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-n)\rho_s]+\mathrm{div}[(1-n)\rho_s\boldsymbol{v}_s]=0 \cdots\cdots(3\text{-}1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_wn\rho_w)+\mathrm{div}(S_wn\rho_w\boldsymbol{v}_w)=0 \cdots\cdots(3\text{-}2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_an\rho_a)+\mathrm{div}(S_an\rho_a\boldsymbol{v}_a)=0 \cdots\cdots(3\text{-}3)$$

ところで，変形し得る多孔体中の流れの特徴的な一面は，各相が相対運動しているところにあるのであって，この事実は次式で表現される．

$$\boldsymbol{q}_w=\boldsymbol{q}_r+\theta\boldsymbol{v}_s \cdots\cdots(4\text{-}1)$$

ここに，$\boldsymbol{q}_r$＝運動している固体粒子に対する相対的な液相の容積流量．この式はまた，式 (1) を用いて次のようにも表し得る．

$$\boldsymbol{q}_r=S_wn(\boldsymbol{v}_w-\boldsymbol{v}_s)=\boldsymbol{q}_w-S_wn\boldsymbol{v}_s \cdots\cdots(4\text{-}2)$$

この関係を用いると，液相の質量保存則，式 (3-2)，は，

$$\mathrm{div}[\rho_w(\boldsymbol{q}_r+\theta\boldsymbol{v}_s)]+\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w\theta)=0 \cdots\cdots(5)$$

さらに，個々の固体粒子を非圧縮性（ρ_s=const.）とすれば，固体部分の質量保存則は式 (3-1) より，

$$\mathrm{div}[(1-n)\boldsymbol{v}_s]=(1-n)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{grad}\,n =\frac{\partial n}{\partial t} \cdots\cdots(6)$$

ここで液体も非圧縮性（ρ_w=const.）として式 (5)，(6) を変形すると，不飽和土に対する拡散方程式として知られる[7]次式が導かれる．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_r=-\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\theta}{1-n}\left[\boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{grad}\,n+\frac{\partial n}{\partial t}\right] -\boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{grad}\,\theta \cdots\cdots(7)$$

また，液体は圧縮性であるが，多孔体は完全飽和すなわち2相構成とするときは，$S_w=1$ および $\theta=n$ であるから，式 (5) より，

$$\mathrm{div}[\rho_w(\boldsymbol{q}_r+n\boldsymbol{v}_s)]+\frac{\partial}{\partial t}(\rho_wn)=0 \cdots\cdots(8)$$

よって，式 (6)，(8) から，

$$\mathrm{div}(\rho_w\boldsymbol{q}_r)+\rho_w\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_s+n\boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{grad}\,\rho_w +n\left(\frac{\partial\rho_w}{\partial t}\right)=0 \cdots\cdots(9)$$

ここで，液体の圧縮率を β とし，ρ_w が圧力 p のみの関数とすれば，

$$\partial\rho_w/\partial p=\beta\rho_w \quad \text{すなわち} \quad \rho_w=\rho_0\exp(\beta p) \cdots\cdots(10)$$

ここに，ρ_0：任意の基準状態の質量密度．

このとき式 (9) は，

$$\mathrm{div}(\rho_w\boldsymbol{q}_r)+\rho_w\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_s=-n\rho_w\beta\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{grad}\,p\right) \cdots\cdots(11)$$

いま，多孔体の変形を微小変形とし，固定された座標系に関する構造骨格の変位ベクトルを $\boldsymbol{u}_s=(u,v,w)$ とすれば，

$$\boldsymbol{v}_s=\partial\boldsymbol{u}_s/\partial t \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_s=\partial\varepsilon_v/\partial t \cdots\cdots(12)$$

ここに，ε_v：骨格の体積ひずみで膨張を正とする．

よって式 (11) は，

$$\mathrm{div}(\rho_w\boldsymbol{q}_r)+\rho_w\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}=-n\rho_w\beta\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{grad}\,p\right) \cdots\cdots(13)$$

最後に，液体を非圧縮性（ρ_w=const.，$\beta=0$）とすると，

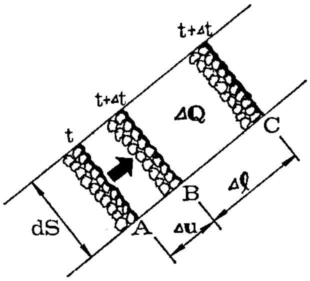
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_r+\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}=0 \cdots\cdots(14)$$

上式が水および土粒子が運動下にあるときの連続の式であり，特に左辺第1項に $\boldsymbol{q}_w$ ではなく，水の土粒子に対する相対速度 $\boldsymbol{q}_r$ が現れている点に注意せねばならない．

（2） 運動方程式

多孔体中の流体の運動は緩慢であり，慣性効果を無視できるとする周知の事実をここでも認める．同時に，固体部分の変形も準静的過程を経るものとする．このような仮定のもとでは，固相の運動方程式は単に静的なつり合い方程式で表され，他方，流体の運動方程式としてはダルシーの法則が採用されることもきわめて普遍的なことがらである．この意味ではなんら疑問をはさむ余地はない．問題はダルシー則の式示方法である．元来この法則は剛体中の流れに適用されたもので，見掛けの流速が動水勾配に比例することを簡潔に述べたものである．しかしながら，目下の対象である変形し得る多孔体中の流れに対しては，この法則のもつ意義は必ずしも明確ではない．それは固体・流体がともに運動しているため，見掛けの流速の定義に2通りの可能性，すなわち固定された座標系に関する流速と，固相に対する相対速度，が考えられるからである．しかしダルシーの法則は固相に対する相対的な流量を規定すべきものであるから，やはりゲルセバノフが最初に指摘したといわれている相対速度

に基づく表示が論理的なものと考えられよう．後述のように，現在でも依然としてダルシー則に現れる流速には混乱が見受けられるが，相対速度に基づく表示の妥当なことはたとえば熱力学的立場[8]や混合体論[9]からも裏づけされている．これと関連して，1955 年以降における Biot の理論にはいずれも相対速度が導入されているが，なぜそのような相対速度を用いるかの説明がないとして，混合体論の立場から Raats[9] が批判している点興味深いものがある．



図―1 相対速度に基づくダルシー則の意味を示す概念図

図―1 はここで採用するダルシー則の意味を示す概念図である．なお，以後特に断わらない限り多孔体は完全飽和とする．任意時刻 t にAにあった水・土粒子が，それから Δt 時間後に土粒子はBに，水粒子はCに移動しているものとする．このとき土粒子に相対的な流量，すなわち BC 間にある水量 $\Delta \boldsymbol{Q}$ が動水勾配に比例するとするものである．図より，

$$\Delta \boldsymbol{Q}=(\Delta \boldsymbol{l}+\Delta \boldsymbol{u})dSn-\Delta \boldsymbol{u}dSn=\Delta \boldsymbol{l}dSn$$
$$=n\boldsymbol{v}_w dS\Delta t-\Delta \boldsymbol{u}dSn=(-\boldsymbol{k}\,\mathrm{grad}\,H)dS\Delta t \quad\cdots\cdots(15\text{-}1)$$

よって式 (4-2) より，

$$\boldsymbol{q}_r=n(\boldsymbol{v}_w-\Delta \boldsymbol{u}/\Delta t)=n(\boldsymbol{v}_w-\boldsymbol{v}_s)=-\boldsymbol{k}\,\mathrm{grad}\,H \quad\cdots\cdots(15\text{-}2)$$

ただし，$\Delta \boldsymbol{u}$：Δt 間の固相の変位，$\Delta \boldsymbol{l}$：Δt 間の液相と固相の相対変位，dS：微小面積要素，$\boldsymbol{k}$：透水係数テンソル，H：全水頭．

式 (15-2) を式 (14) に代入すれば $\mathrm{div}(\boldsymbol{k}\,\mathrm{grad}\,H)=\partial\epsilon_v/\partial t$ となって周知の支配微分方程式が導かれる．そしてこの式そのものは従来から認められているけれども，ここで示した誘導過程は固相の質量保存則と相対速度に基づくダルシー則が考慮されている点で完全であるということができよう．

3．圧 密 論

変形し得る多孔体中の流れの代表例として圧密現象をあげることができる．周知のとおり圧密論には大別して Terzaghi 系列と Biot 系列があり，両者に内包される物理的背景は吉国[10]に詳しい．そして一般に間隙水の連続の条件と粘土骨格のつり合い条件を具備している点で Biot 理論の優位性が認められている．ただし，いわゆる Terzaghi の1次元圧密に限っては両理論の構成は一致し，異論をはさむ余地はないと考えられている．はたしてそうであろうか．ここでは前節の基礎式にのっとって既往のいくつかの圧密論を再吟味してみたい．

(1) Terzaghi の1次元圧密論

まず最初に，本文で意図する議論に最もよく適合する形でまとめられた Terzaghi の1次元圧密支配式の誘導過程として，吉国の論文[10] pp. 23〜25 を引用しその要点を摘記する．

「……つり合い方程式は，

$$\frac{\partial\sigma_z'}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

ここに，σ_z'：鉛直方向有効垂直応力，u：過剰間隙水圧．式 (16) を積分し，有効応力と間隙水圧の和を全応力とすると，

$$\sigma_z=\sigma_z'+u=\mathrm{const.}$$

境界条件を入れると，

$$\sigma_z=\sigma_z'+u=p \quad\cdots\cdots(17)$$

ここに，p：圧密荷重．

次に Hooke の法則より，

$$d\epsilon_z=m_v d\sigma_z' \quad\cdots\cdots(18)$$

これは一般化された Hooke 則に $\epsilon_x=\epsilon_y=0$ の条件を入れたもので，

$$m_v=\frac{1}{\lambda+2\mu}$$

である．ただし，ϵ_z：鉛直方向垂直ひずみ，m_v：体積圧縮係数，λ, μ：Lame's constants.

式 (17) を時間で微分し，$\dot{p}=0$ を考えるならば，

$$\dot{\sigma}_z'=-\dot{u} \quad\cdots\cdots(19)$$

であり，式 (18) に式 (19) を代入すれば，

$$\dot{\epsilon}_z=-m_v\dot{u} \quad\cdots\cdots(20)$$

一方，連続の条件は，

$$\dot{\epsilon}=\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad\cdots\cdots(21)$$

であり，Darcy 則と $\epsilon_x=\epsilon_y=0$ を考えるなら，

$$\dot{\epsilon}_z=-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad\cdots\cdots(22)$$

となる．ただし，ϵ：体積ひずみ (圧縮を正)．

式 (22) に式 (20) を代入すると圧密の方程式が得られる．

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial t}=C_v\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\ \text{ここに，}\\ C_v=\dfrac{k}{\gamma_w m_v}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(23)$$

そこで式 (23) が導かれる過程で持ち込まれた条件式は，1) つり合い方程式，2) 応力-ひずみ関係，3) 間隙流体の運動方程式，4) 連続の条件式，と表に現れていないけれども，5) ひずみの適合条件，の5条件である．……」

以上が吉国の記述のうち本論文で必要とする箇所である．そして最後にまとめられた 1)～5) から明らかなように，Terzaghi 理論は先に述べた力学の基本法則の中で固体部分の質量保存則以外はいずれも陽な形で満たされていることがわかる．それでは式 (23) が土粒子に関する質量保存則を満たしているか否かを検討しよう．理論構成の必要上，あらかじめ土粒子の質量保存則を強く意識した前述の基礎式に基づいて1次元圧密支配式を導いておく．ただし，通常 Terzaghi の1次元圧密論に課せられる仮定はここでもすべて認めるものとする．

固定された座標系に関して間隙水の容積流量（見掛けの流速）を v_z とする．これは先の $\boldsymbol{q}_w$ に相当するものである．また土粒子の変位速度を v_s，v_s で運動している土粒子に対する間隙水の相対的な容積流量を v_{zr} とする．v_{zr} は $\boldsymbol{q}_r$ に相当．まず質量保存則式 (3-2) から $\rho_w=\text{const.}$，$S_w=1$ として，

$$\partial v_z/\partial z+\partial n/\partial t=0 \quad\cdots\cdots(24)$$

また式 (14) から，

$$\partial v_{zr}/\partial z+\partial \varepsilon_z/\partial t=0 \quad\cdots\cdots(25)$$

ここに，ε_z は鉛直方向のひずみでいまの場合 $\varepsilon_v=\varepsilon_z$ である．さらに式 (4-1) より，

$$v_z=v_{zr}+nv_s \quad\cdots\cdots(26)$$

よって，

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial v_{zr}}{\partial z}+n\frac{\partial v_s}{\partial z}+v_s\frac{\partial n}{\partial z} \quad\cdots\cdots(27)$$

しかるに，

$$v_s\frac{\partial n}{\partial z}=\frac{v_s}{(1+e)^2}\frac{\partial e}{\partial z}\quad (e:\text{間隙比})$$

は他の項に比べて高次の微小量と考えられるのでこれを無視し[11]，かつ，

$$\frac{\partial v_s}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}\quad \text{ここに } w:\text{鉛直変位}$$

に注意すると，式 (27) は，

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial v_{zr}}{\partial z}+n\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \quad\cdots\cdots(28)$$

ゆえに式 (24)，(25)，(28) から，

$$\frac{\partial n}{\partial t}=(1-n)\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \quad\cdots\cdots(29)$$

あるいはこの関係は式 (6) において高次微小項 $\boldsymbol{v}_s\cdot\text{grad}\, n$ を省略して直接的に求めることもできる．いずれにしても土粒子が運動下にあるとき直観的に，

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \quad\cdots\cdots(30)$$

とはできないことを指摘しておきたい．このことはたとえば式 (6) において，

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\text{div}\,\boldsymbol{v}_s-\text{div}(n\boldsymbol{v}_s) \quad\cdots\cdots(31)$$

上式右辺第1項と第2項は n の物理的意味を考えれば同一のオーダーであり，第2項を無視して直ちに，

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\text{div}\,\boldsymbol{v}_s=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad\cdots\cdots(32)$$

とはできないことと符合する．

さて，ここで相対速度に基づくダルシーの法則，式 (15-2)，を導入すれば，

$$v_{zr}=-k\frac{\partial H}{\partial z}=-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z} \quad\cdots\cdots(33)$$

これより，

$$\frac{\partial v_{zr}}{\partial z}=-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad\cdots\cdots(34)$$

ここに，k：透水係数，γ_w：水の単位重量，u：過剰間隙水圧．

よって式 (25)，(29) および (34) より，

$$\frac{\partial n}{\partial t}=(1-n)\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad\cdots\cdots(35)$$

しかるに圧縮係数 a_v の定義，および全応力一定の仮定から，

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{1}{(1+e)^2}\frac{\partial e}{\partial t}=\frac{a_v}{(1+e)^2}\frac{\partial u}{\partial t} \quad\cdots\cdots(36)$$

ゆえに式 (35)，(36) から，体積圧縮係数 m_v を導入して，

$$\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{a_v}{1+e}\frac{\partial u}{\partial t}=m_v\frac{\partial u}{\partial t}$$

すなわち，

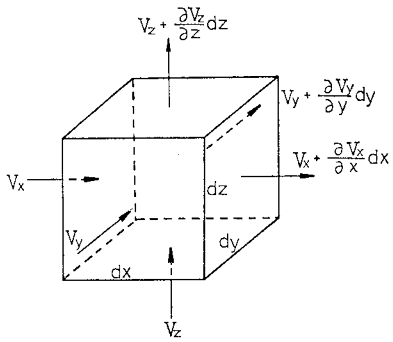
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{m_v\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad\cdots\cdots(37)$$

これは Terzaghi の圧密方程式，式 (23)，にほかならない．したがって式 (16)～(23) の誘導過程と式 (24)～(37) のそれは，際立った相違点があるにもかかわらず，結論のみは完全に一致するのである．そこでこの際立った相違点を明確にするため，式 (24)，(29) から先の式 (21) に相当する式を書き下せば，

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}=-\frac{1}{1-n}\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad\cdots\cdots(38)$$

（ひずみの正・負の定義が逆である点に注意）

そしてこの式は土粒子の質量保存則が考慮されている点で完全であり，n の意味を考えるならば上式と式 (21) を等価とみなすことは到底無理な話である．よって式 (21) に基づく式 (23) は誤りであるといわざるを得ない．にもかかわらずこの式が厳密な圧密方程式，式 (37)，と一致するとはいかなることであろうか．結論から先にいえば，Terzaghi の誘導過程には質量保存則の欠如とは別にもう1つの誤りがあり，これら2つの誤りが相殺されて結果的に正しい方程式に到達しているのである．これについては後に詳しく述べるとして，ここで正しくは



図—2 微小要素に基づく連続の式の記述

体積ひずみの時間微分が式 (38) であるべきところを式 (21) で記述したゆえんを Yong・Warkentin[12] の表現に習って考えてみよう．それは図—2の微小要素に注目して，間隙水の連続の条件を式示することから始まる．

「……図で dt 間に流入する水の量を Q_{in} とすると，

$$Q_{in}=(v_x dydz+v_y dxdz+v_z dxdy)dt \quad\cdots(39)$$

流出する水の量を Q_{out} とすると，

$$Q_{out}=\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}dx\right)dydzdt+\left(v_y+\frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)dxdzdt+\left(v_z+\frac{\partial v_z}{\partial z}dz\right)dxdydt \quad\cdots\cdots(40)$$

ここで v_x, v_y, v_z は xyz 方向の流れの速度である．

$$Q_{out}-Q_{in}-\text{体積変化}=0 \quad\cdots\cdots(41)$$

の関係から，V を微小要素の体積として，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}dxdydzdt+\frac{\partial v_y}{\partial y}dxdydzdt+\frac{\partial v_z}{\partial z}dxdydzdt=\frac{\partial V}{\partial t}dt \quad\cdots\cdots(42)$$

1次元の流れが1次元の圧密に対応すると仮定すると式 (42) は，

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}dxdydzdt=\frac{\partial V}{\partial t}dt \quad\cdots\cdots(43)$$

となる.……」いま，式 (43) の両辺を $V=dxdydz$ で割ってやれば，

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad\cdots\cdots(44)$$

となって式 (21) が求められた (式 (44) のひずみは圧縮を正)．

以上の Yong らの記述には重大な欠陥が指摘される．それは式 (43) であって，厳密な見方をすれば，この式の左辺を導く際には微小要素は変形しないものとしており，一方，右辺は正に左辺で無視した変形量そのものを表していることである．なお，微小変形を前提とする限り，左辺導出において，変形に注意を払ったとしてもそれが微小であるから無視するとの見方もできよう．しかしこのときは右辺も当然微小であり，$\partial V/\partial t$ のみを残す理由は見当らないのである．この点は特に重要であって，多くの著者が，微小変形を仮定する限り式 (43) が成り立つという錯覚に落ち入っている点は是非とも改められねばならない．なお，この間に含まれるあいまいさは 1965 年プリンストン大学で開催された地下水会議の席で，Jacob の式の誘導に関連してすでに批判されているところである[13),14)]．そして上記の誤りの根源は図—2で考えた微小要素がそもそも変形し得るとしたところにある．このような微小要素に着目して連続の条件を記述する場合には，要素は空間に固定し，その要素への収支と内部貯留量の変化を考慮すべきで，その結果がたとえば式 (24) となるのである．フローリン[15)]は正にこの方法を用いて圧密支配式を導いている．

ここで，微小要素が変形し得るとすることに伴う誤差の程度を一般的な3次元場で間接的に評価してみよう．まず式 (42) から，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\dot{\varepsilon} \quad\cdots\cdots(45)$$

あるいはこの式を **2**. の記号を用いて表せば次のようである．

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}_w=\dot{\varepsilon}_v \quad\cdots\cdots(46)$$

しかるに正しくは式 (14) より，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}_r=\dot{\varepsilon}_v \quad\cdots\cdots(47)$$

ただし，比較の便宜上式 (47) の体積ひずみは圧縮を正としている．そして式 (4-2) から，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}_r=\operatorname{div}\boldsymbol{q}_w-n\operatorname{div}\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{v}_s\cdot\operatorname{grad}n \quad\cdots\cdots(48)$$

上式右辺第3項を無視して式 (47) に代入すると，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}_w=\dot{\varepsilon}_v+n\operatorname{div}\boldsymbol{v}_s \quad\cdots\cdots(49)$$

さらに，$\operatorname{div}\boldsymbol{v}_s=-\dot{\varepsilon}_v$ (圧縮ひずみを正) に注意すれば，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}_w=(1-n)\dot{\varepsilon}_v \quad\cdots\cdots(50)$$

すなわち式 (46) を用いることは，式 (50) で1に対して n を無視することに相当し，決して許されない操作である．

なお，最初に設定した要素の変形を認める場合には，その要素自体の運動を考えねばならず，必然的に物質導関数に基づく表示が要請される．いずれにしてもこれらの結論の一般化がたとえば式 (2) で表されたのである．また圧密論ではあまり普遍的ではないが，Gibson・England・Hussey[16)] が用いた Lagrange 座標の導入も可能ではあろう．

さて，前述した Terzaghi の誘導過程における他の1つの誤りとは，いうまでもなくダルシー則に相対速度を用いていない点である．すなわち，正しくは，

$$v_{zr}=v_z-nv_s=-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z} \quad\cdots\cdots(51)$$

とすべきところを，

$$v_z = -\frac{k}{r_w}\frac{\partial u}{\partial z} \quad \cdots\cdots(52)$$

としたことに起因する．飽和粘土の圧密を間隙水の脱水に伴って，それと同量だけ容積が減少する現象ととらえる限り，v_z と v_s は同一のオーダーと考えられ，式 (51) で v_s に比して nv_s を省略することは近似的にも許されない．式 (51) の近似式として式 (52) が認められるのは，$n \ll 1$ もしくは $v_s \ll v_z$ のときであるが，これらは実在の粘土を考えるならばいずれも否定されるべきものであろう．

以上，式 (43) と式 (52) に伴うあいまいさが互いに打ち消し合って，結果的に正しい方程式に至ったことは偶然とはいえ非常に重要な意味を含むのである．それは，もし仮にこれら2つのあいまいさのうちいずれか一方，たとえば式 (43) を回避して厳密に正しい式，式 (24)，を採用し，他方ダルシー則は依然として式 (52) を用いたとすれば，どのような結果になるのかをみれば明らかとなる．

まず式 (36) から，

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{a_v}{(1+e)^2}\frac{\partial u}{\partial t} = (1-n)m_v\frac{\partial u}{\partial t} \quad \cdots\cdots(53)$$

これを式 (24) に代入して，

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -(1-n)m_v\frac{\partial u}{\partial t} \quad \cdots\cdots(54)$$

これに式 (52) を持ち込めば，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{(1-n)m_v r_w}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots(55)$$

となって，既往の式に比べ圧密係数が相当に異なったものとなる．そして式 (55) ではなく式 (37) の妥当なことは，Terzaghi が圧密論を世に出して以来の数々の実績が物語っているとおりであろう．これらの事実をいいかえるならば，厳密な圧密方程式に至るためには次の2つのアプローチのいずれかをとらねばならないということである．

i） 間隙水，土粒子の質量保存則を満たす式 (24)，(25)と，相対速度に基づくダルシー則式(33)を採用する．

ii） ともにあいまいな式 (43)（あるいは式 (44)）と式 (52) を採用する．

まえがきでも述べたように，圧密論の構成にはこれら2通りの手法が見受けられる．特に，いわゆる土質力学のテキストの多くのものがいずれも ii) の手法を用いており，筆者の手元ではわずかにフローリンの著書あるいはこれに基づく Lujo Šuklje[17] の著書にすっきりとした形で i) が持ち込まれているのみである．しかしそこにおいても i), ii) を対比させた議論や，これらに内在する意義といったものはなんら説明されていない．

上述の結論から，飽和粘土に限定した圧密論を展開する限りは，基本的には誤りであるけれども，多くのテキストにみられる ii) の方法を用いて問題ない．しかしながら，飽和・不飽和領域を一体とした変形し得る多孔体中の流れの支配式や，あるいは不飽和土の圧密方程式を導く際には i) の概念が指導的役割を果たすと予想される．この意味で飽和粘土の圧密論にしてもやはり i) のフローリン流の手法を採用することが望ましい．

（2） Biot の圧密論

おびただしい数に上る Biot の成果の中で，圧密理論と関連して特に親しまれてきたのは 1941 年および 1955 年に J.A.P. に発表された論文[18),19)]である．とりわけ前者は Biot の3次元圧密論として不動の地位を確保しており，いまさら異論をはさむなどおこがましいほどに広く認められてきた．しかし前にもふれたように，1次元圧密では Biot 理論と Terzaghi 理論の構成は一致すること，および Terzaghi の理論構成には重大な誤りが指摘されたこと，の2つの事実から類推して Biot 理論にも当然同様な誤りのあることが予知されるのである．

a） 1941 年の論文[18)]

この理論の基礎は骨格の弾性挙動と間隙水がダルシー則に従うとすることで，理論的体系としては完備されたものとさえいわれている[20)]．しかもこの論文は飽和粘土のみならず間隙空気の存在を認めた理論構成をとっているが，彼のおいた不飽和粘土に対する仮定はあまり満足できるものでなく，それほど賛同は得られていない[10)]．しかしここでの議論の対象は飽和状態であり，不飽和についてはなんらふれないことにする．

さて，Biot 理論の骨子は骨組のつり合い方程式と間隙水の連続式を連立させることであった．このうち骨組のつり合い方程式についてはなんら疑問点は見当らない．問題は連続の式である．以下この点を明らかにするため原論文からいくつかの式を引用しつつ議論するが，そのつど左側に原文中の式の番号を付して出典を明確にしたい．まず，無ひずみ状態の容積含水率，および間隙率をそれぞれ v_0, n_0，載荷後任意時点のそれらを v, n として，

$$\theta = v - v_0 \quad \cdots\cdots(56)$$

で定義される含水率の変化量 θ が導入される[21)]．完全飽和の場合は当然

$$\theta = n - n_0 \quad \cdots\cdots(57)$$

である．そしてポテンシャルエネルギーの存在の仮定のもとに若干の理論展開の後，次式が導かれる．

$$(2.12) \quad \theta = \alpha\varepsilon + \sigma/Q \quad \cdots\cdots(58)$$

ここに，α：完全飽和で間隙水が非圧縮性のとき 1 となる定数，ε：体積ひずみ，σ：間隙水圧，Q：完全飽和で間隙水が非圧縮性のとき無限大となる定数．

さらに，単位時間・単位面積当りの各軸方向の容積流量

を V_x, V_y, V_z として次式でダルシー則を表示：

$$(4.2)\quad V_x=-k\frac{\partial\sigma}{\partial x},\ V_y=-k\frac{\partial\sigma}{\partial y},\ V_z=-k\frac{\partial\sigma}{\partial z} \quad\cdots\cdots(59)$$

他方，水を非圧縮性とすれば，含水率の変化は微小要素の境界を介してその中に単位時間に入ってくる水の量に等しくなければならないとして，

$$(4.3)\quad \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{\partial V_x}{\partial x}-\frac{\partial V_y}{\partial y}-\frac{\partial V_z}{\partial z} \quad\cdots\cdots(60)$$

とした．そして式 (58)，(59) および (60) より次式が導かれる．

$$(4.4)\quad k\nabla^2\sigma=\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{Q}\frac{\partial\sigma}{\partial t} \quad\cdots\cdots(61)$$

Biot はこの連続の式 (61) とつり合い方程式が変位成分および間隙水圧を決定すべき基礎式であるとした．しかし以上の過程には先と同様土粒子の質量保存則がまったく満たされていないのである．なぜなら，いま完全飽和を考えると，$\alpha=1$, $Q=\infty$ であることから式 (58) は次式となる．

$$\theta=\varepsilon \quad\cdots\cdots(62)$$

さらに式 (57) を考えるなら Biot 理論は結局次式を認めたことになる．

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \quad\cdots\cdots(63)$$

しかるに正しくは土粒子の質量保存則より，

$$\frac{\partial n}{\partial t}=(1-n)\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \quad\cdots\cdots(64)$$

であることはすでに式 (27)～(32) で指摘しておいた．これらの事実が質量保存則の欠如の証左である．さて，式 (1) および式 (3-2) から式 (60) の正しいことは明白である．しかしこれを直ちに式 (59) と結びつける点がうなずけない．やはり相対速度に基づくダルシー則を用いるべきである．すなわち式 (15-2) より，固相の変位速度 V_{sx}, V_{sy}, V_{sz} を導入して，

$$\left.\begin{aligned} V_x-nV_{sx}&=-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\\ V_y-nV_{sy}&=-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\\ V_z-nV_{sz}&=-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(65)$$

この式をそれぞれ x, y, z で微分して辺々あい加えれば，

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}-n\left(\frac{\partial V_{sx}}{\partial x}+\frac{\partial V_{sy}}{\partial y}+\frac{\partial V_{sz}}{\partial z}\right) -\left(V_{sx}\frac{\partial n}{\partial x}+V_{sy}\frac{\partial n}{\partial y}+V_{sz}\frac{\partial n}{\partial z}\right)=-\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2\sigma \quad\cdots\cdots(66)$$

上式左辺第3項は他の項に比べ微小であるから省略し，さらに式 (57)，(60)，(64) および $(\partial V_{sx}/\partial x+\partial V_{sy}/\partial y+\partial V_{sz}/\partial z)=\partial\varepsilon/\partial t$ に注意すれば結局式 (66) は，

$$\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2\sigma=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \quad\cdots\cdots(67)$$

となって，飽和状態に限定するとき，式 (61) 自体の正しいことは証明された (Biot の透水係数には水の単位重量を含めている点に注意)．

以上により Biot 理論の場合も，Terzaghi の1次元圧密論と同様土粒子の質量保存則の欠如と，ダルシー則に相対速度を導入していない誤りが相殺されて，結果的に正しい式に至っていると解釈できる．

b) 1955 年の論文[19]

この研究は Biot 自身がそのまえがきで述べているように，等方線形弾性体に限定した先の論文を，異方線形弾性を含むより一般的な場へ拡張することを意図したものである．そのため原論文では間隙水のみならず骨格材料の圧縮性も想定されている．しかし筆者の目的は Biot の理論構成に力学の基本原理が持ち込まれているか否かを検討することにあるため，原論文中等方線形弾性および構成材料の非圧縮性を仮定した部分のみを議論の対象としたい．

さて，1941 年の論文に比べ，この論文の特徴的な差異はなんといっても応力テンソルの表示形態とダルシー則に相対速度を導入したことであろう．すなわち間隙中の流体圧を p，間隙率を f としたとき，

$$(2.4)\quad \sigma=-fp \quad\cdots\cdots(68)$$

で土粒子・水混合体単位断面積当りの水の部分に作用する直応力を定義し，残りの骨格部分に働く直応力 σ' を

$$\sigma'=\sigma_e-(1-f)p \quad\cdots\cdots(69)$$

で表した[22]．ここに，σ_eは有効応力である．ただし応力は引張りを正，水圧は圧縮を正としていることに注意．したがって全応力 σ_t は，

$$\sigma_t=\sigma'+\sigma=\sigma_e-p \quad\cdots\cdots(70)$$

となって通常の土質力学の概念と一致する．しかし式 (69) の右辺第2項は個々の土粒子内部には作用し得ても，粒子間には伝達し得ない量であり，土粒子を非圧縮性と考える場合にはこのような定義はほとんど無意味のように思える．粒子間を点接触と仮定し，土粒子・水共に非圧縮性とした圧密論を展開する限り，通常の土質力学で用いられる間隙水圧と有効応力の概念が妥当と思えるがどうであろうか．ともあれ以上の定義のもとに Biot はダルシー則を次式で表した．

$$(4.4)\quad \partial\sigma/\partial x=b(\dot{U}_x-\dot{u}_x),\ \text{etc.} \quad\cdots\cdots(71)$$

ここに，U_x, u_x などはそれぞれ間隙水および骨格の (見掛けの) 変位，ドットは時間微分を意味する．ただし上式で物体力は無視されている．そしてここに至って初めてダルシー則に相対速度が持ち込まれたのである．

さて Biot は構成材料が非圧縮性の場合，次式が成り立つとした．

(4.10)　$f\varepsilon+e(1-f)=0$ …………………(72)

ここに，

(2.6)　$\varepsilon=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$ …………………(73)

および，

(4.2)　$e=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}$ …………………(74)

はそれぞれ間隙水および骨格の（見掛けの）体積ひずみである．そしてこれらをつり合い方程式と，結果として連続式に持ち込むことで，最終的に，

(4.16)　$f^2(2N+S)\nabla^2 e=b\dfrac{\partial e}{\partial t}$ …………(75)

を得，この式は先の論文の非圧縮性の場合に一致すると結んでいる．

以上が Biot の第2の論文の要約であるが，このままでは固相の質量保存則が満されているか否かは不明である．しかし式（72）が正に質量保存則を表現しているのである．この点を明らかにするため，石原[22]に習って骨格構造部分・間隙水部分の見掛けの体積をそれぞれ V_b，V_a，間隙率を n とすると，土粒子・間隙水ともに非圧縮性のとき次式が成り立つ．

$$\frac{dV_b}{V_b}=\frac{dn}{1-n},\quad \frac{dV_a}{V_a}=-\frac{dn}{n} \quad\cdots\cdots(76)$$

これを Biot の記号で表せば次式となる．

$$e=\frac{df}{1-f}\ ;\ \varepsilon=-\frac{df}{f} \quad\cdots\cdots(77)$$

これより式（72）の成り立つことが確かめられる．さらに式（77）から，

$$(1-f)\dot{e}=\dot{f}\ ;\ f\dot{\varepsilon}=-\dot{f} \quad\cdots\cdots(78)$$

ゆえに，

$$f\dot{\varepsilon}+(1-f)\dot{e}=0 \quad\cdots\cdots(79)$$

も成立する．すなわち式（72）と式（79）は等価である．しかるに式（4-2）を目下の記号を用いて表した式

$$f(\boldsymbol{v}_w-\boldsymbol{v}_s)=\boldsymbol{q}_r \quad\cdots\cdots(80)$$

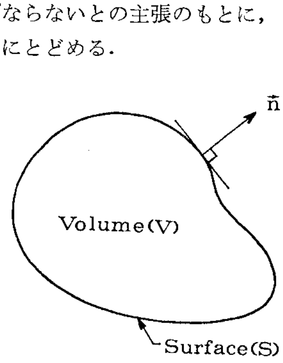
において，両辺の発散をとって，高次微小項を省略し，$\dot{e}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_s$，$\dot{\varepsilon}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_w$ および式（14）に注意すると結局式（79）が導かれる．よって式（79）あるいはこれに等価な式（72）は質量保存則を満たしていることが証明された．

このように Biot の第2の論文は，応力テンソルの表示形態の特異性とあいまって筆者には理解しがたい面も少なくないが，ともあれ当面の関心事である相対速度と土粒子の質量保存則はともに考慮されているのである．

（3）　その他の圧密論

これまでに述べてきた議論は Terzaghi 系列の代表的な圧密論である Schiffman[23] の方程式の誘導過程や，大槇[24,25]の圧密論のそれにも当てはまる．ただし紙数の都合上その詳細は割愛し，変形し得る多孔体中の流れを対象とする限り，土粒子の質量保存則と相対速度に基づくダルシー則を満たさねばならないとの主張のもとに，結論の要点のみを指摘するにとどめる．

Schiffman は飽和粘土中に図—3に示すような任意の体積 V，表面 S なる閉じた領域を考え，この閉じた領域の全体積変化は流出した水量に等しいとして圧密方程式を導いた．その際彼が用いた手法のうち，ダルシーの法則は固定された座標系に関する流速に基づく表示をとっている．そして図—3の領域 V が失った水量がその体積変化に等しい事実を表現する手段として，まず前者の領域 V が失った水量を式示する際には V は空間に固定されていると考え，他方，V の体積変化を記述する場合は V は変形し得るとした．こうした不明確な取り扱いをしているため彼の誘導過程には次元の不一致などがみられ，そのあいまいさはすでに吉国[10]が厳しく批判しているとおりである．しかし何よりも大きい問題点は，彼の用いた手法には土粒子実質部分の質量保存則が満たされていないことである．この難点を解消するには図—3で領域 V を空間に固定し，表面 S を介して流出した水量が V 内の貯留量の変化に等しいと考えねばならない．そして相対速度に基づくダルシー則と，土粒子部分の質量保存則を持ち込めば，その結論は吉国[10]，赤井・足立[26]らが書き改めた式に一致することが知られるのである．



図—3　土塊中の閉じた領域

次に大槇[24,25]の圧密論について簡単にふれよう．彼は Schiffman 同様多孔体中に容積 V，表面 S なる閉じた領域を考え，単位時間に表面 S から流出する土粒子・間隙水の重量は V 内の重量の減少量に等しいとして連続の式を導いた．その結論は次のようである．

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}}-\frac{k}{\alpha}\nabla^2 u_e=0\\&\alpha=(2-n_0)\gamma_w\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(81)$$

ここに，$\dot{\boldsymbol{u}}$：粘土骨格の変位速度ベクトル，k：透水係数，u_e：過剰間隙水圧，n_0：初期間隙率，γ_w：間隙水の単位体積重量．

大槇は上式を指して，従来求められている連続の式と同形であるが圧密係数が少し異なると述べている．彼が上式を導く過程で用いた手法には土粒子部分の質量保存則と相対速度に基づくダルシー則がともに考慮されてはいる．ところが，惜しまれるのは彼の用いた相対速度に基づくダルシー則は次式の形をとっている点である．

$$n\dot{\boldsymbol{U}}-\dot{\boldsymbol{u}}=-\frac{k}{\gamma_w}\nabla u_e \quad\cdots\cdots(82)$$

ここに，n：間隙率，$\dot{\boldsymbol{U}}$：間隙水の変位速度ベクトルすなわち真の流速．

上式は土粒子の運動を考慮してはいるものの表示形態の点でうなずけないものがある．左辺第1項の $n\dot{\boldsymbol{U}}$ はいわゆる見掛けの流速を意味するが，これと土粒子の真の流速 $\dot{\boldsymbol{u}}$ の差，$n\dot{\boldsymbol{U}}-\dot{\boldsymbol{u}}$，が物理的にいかなる量を表すのか説明がつかない．ここはやはり式（15-2）を用いて，

$$n(\dot{\boldsymbol{U}}-\dot{\boldsymbol{u}})=-\frac{k}{\gamma_w}\nabla u_e \cdots\cdots(83)$$

とすべきであろう．その結果，式（81）の α は γ_w となって従来認められてきた連続の式と完全に一致することが確かめられる．

このように，大槇の連続の式には修正すべき点が残るとしても，混合体論[27]は別として，いわゆる圧密論の中で土粒子の運動を直接取り扱った論文は数少なく，彼の手法は高く評価されねばならない．

（4） ダルシー則に現れる相対速度について

先に 2．でダルシー則に現れる相対速度には混乱が見受けられると述べた．その一例を Lee・Lawson・Donald[28] の記述に求めることができる．彼らは間隙水の変位を u^F, v^F, w^F，また骨格の変位を u^s, v^s, w^s とするときダルシー則が次式で表されるとした．

$$(3.236)\quad \left.\begin{aligned} -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial t}(u^s-u^F)\\ -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial t}(v^s-v^F)\\ -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial t}(w^s-w^F)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(84)$$

そしてこれらを微分し，結びつけると連続の条件が直ちに，

$$(3.237)\quad \frac{k}{\gamma_w}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=-\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \cdots\cdots(85)$$

となると記している．ただし，ε_v：体積ひずみ．

いま，式（84）をそれぞれ x, y, z で微分しあい加えれば，

$$-\frac{k}{\gamma_w}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^F}{\partial x}+\frac{\partial v^F}{\partial y}+\frac{\partial w^F}{\partial z}\right)\cdots(86)$$

彼らは上式（86）で右辺第2項が，なかば直感的に，消失すると考えたようである．その根拠はおそらく間隙水を非圧縮性と仮定したことであろう．しかし右辺第2項が消失するのは間隙水のみならず，多孔体自身が剛体とみなし得るときのみである．そしてこのような場合には式（84）のごとき相対速度を持ち込むことすら無意味となる．

すでに Biot 理論と関連して指摘したように，ダルシーの法則は，式（84）ではなく，式（65）の形をとらねばならない．その結果，式（85）の導かれることも式（67）で証明ずみである．なお，些細なことではあるが，仮に式（84）を認めたとしても，左辺の負符号を落とすかもしくは右辺の u^s と u^F などを入れ換えることが望ましい．その結果，式（85）の右辺の負符号が消失し，結論のみは式（67）と完全に一致する．

4．結　　語

土質工学的立場からみた土-水相互作用場の系統的な解析法の確立をめざす第一歩として，既存の変形し得る多孔体中の流れの支配式に関する詳細な考察を試みた．すなわち，**2**．で固相・液相の質量保存則および運動方程式を強く意識した基礎式を要約し，これに基づいて **3**．で Terzaghi, Biot（1941年，1955年），Schiffman，大槇の圧密論をつぶさに検討した．その結果明らかとなった事項ならびに本文を通じて筆者の主張したいことがらをまとめれば以下のようである．

（1） 変形し得る多孔体の意義は，固相が変位あるいは変位速度を持ち得ることである．したがって固相の変位を運動方程式（準静的過程ではつり合い方程式）に持ち込むのみにとどまらず，定式化の過程で変位速度をも考慮せねばならない．換言すれば，得られた支配式は固相の質量保存則を満たすものでなければならない．

（2） 土粒子実質部分の質量保存則を考慮するとき，構造骨格の膨張を正とした体積ひずみ ε_v と間隙率 n の間には，時間微分を介して次の関係が認められる．

$$\frac{\partial n}{\partial t}=(1-n)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

（3） 土粒子・間隙水を非圧縮性とするとき，土粒子実質部分の質量保存則を満たした間隙水の連続の条件は次式で与えられる．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_r+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=0 \cdots\cdots(\mathrm{B})$$

ここに，$\boldsymbol{q}_r$ は土粒子に相対的な間隙水の容積流量．この式で特に左辺第1項に相対流量が現れている点に注意せねばならない．

（4） 間隙水の連続の条件を記述する慣用的な方法は，微小要素（図-2）の水収支がその体積変化に等しいとするものである．その結果は次式で表されてきた．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_w+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=0 \cdots\cdots(\mathrm{C})$$

ここに，$\boldsymbol{q}_w$：空間に固定された座標系に関する間隙水の容積流量．

しかしこの式は許容しがたい誤りを犯している．正しくは上の式（B）である．そして誤差の程度は1に対し

て間隙率 n を無視することに相当し，決して許されない操作である．

（5） 間隙水の運動方程式であるダルシーの法則は，固相に対する相対的な流量を規定すべきものであるから，相対速度に基づいて次式で表示すべきである．

$$\boldsymbol{q}_r = n(\boldsymbol{v}_w - \boldsymbol{v}_s) = -\boldsymbol{k}\,\mathrm{grad}\,H \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{D})$$

ここに，$\boldsymbol{v}_w$：間隙水の真の流速，$\boldsymbol{v}_s$：土粒子骨格の変位速度，$\boldsymbol{k}$：透水係数テンソル，H：全水頭．

そして上の (B), (D) 2式を連立させて初めて従来認められてきた支配微分方程式が得られるのである．

（6） Terzaghi, Biot (1941 年), Schiffman らの圧密論は固相の質量保存則の欠如という重大な誤りを犯している．にもかかわらず結論のみは，課せられた仮定のもとで，厳密に正しい．その原因を，これら理論がいずれも固定された座標系に関する流速をもとにダルシー則を表示している点に求めることができる．すなわち，質量保存則と相対速度の欠如が互いに打ち消し合って厳密な結論に至っていると理解できる．

（7） (6) に述べたことを逆に解釈すれば，正しい圧密支配式ないしは連続の式を得る手段は，固相の質量保存則と相対速度に基づくダルシー則をともに考慮するか，もしくはいずれも無視するかの二者択一である．無論前者が推奨されるべきことはいうまでもない．

謝　辞：筆者の研究全般を通じてご指導賜わるとともに，本論文をまとめるに際して貴重なご助言をいただいた京都大学教授 赤井浩一先生に心より御礼申し上げます．また，常日頃ご指導・ご援助いただいている徳島大学 小田英一教授に感謝の意を表します．さらに，広島大学 吉国 洋助教授，農林水産省 水産工学研究所 大槇正紀博士，京都大学 大西有三助教授，田村 武講師，徳島大学 堀田政國助手の各先生方には貴重な研究成果を引用させていただいたことや，有益なご教示・ご討議を賜わったことを記して謝意を表します．

なお，この論文は昭和 52 年度，53 年度文部省科学研究費一般研究Cの補助を受けた研究の一環であることを付記し，関係各位に感謝します．

参 考 文 献

1) Zaslavsky, D. : Saturated and Unsaturated Flow Equation in an Unstable Porous Medium, Soil Science, Vol. 98, No. 5, pp. 317～321, 1964.
2) Bear, J., D. Zaslavsky and S. Irmay : Physical Principles of Water Percolation and Seepage, UNESCO, pp. 242～244, 1968.
3) Verruijt, A. : Elastic Storage of Aquifers, in Flow Through Porous Media (Ed. by de Wiest), pp. 331～376, Academic Press, 1969.
4) Bear, J. : Dynamics of Fluids in Porous Media, pp. 202～211, Elsevier, 1972.
5) R.N. ヤング・B.P. ワーケンティン（山内・竹中・前田監訳）：新編土質工学の基礎，pp. 88～92, pp. 317～318, 鹿島出版会，昭和 53 年2月．
6) 4) に同じ，pp. 74～77.
7) たとえば，Uzan, J. and R.L. Lytton : Measurement of Flow Properties of Expansive Clays, Int. J. Nume. Anal. Meth. Geomech., Vol. 2, No. 1, pp. 73～86, 1978.
8) 石原研而：Theory of Consolidation of a Porous Material with Heat Effect Based on the Irreversible Thermodynamics, 土木学会論文集，第 113 号，pp. 28～42, 1965.
9) Raats, P.A.C. and A. Klute : Transport in Soils : The Balance of Momentum, Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 32, pp. 452～456, 1968.
10) 吉国 洋：多次元圧密理論と，その軸対称問題への適用，東京工業大学学位論文，昭和 48 年1月．
11) 赤井浩一監修・大草重康訳編：フローリンの土質力学，第Ⅱ巻，森北出版，p. 93, 1971.
12) R.N. ヤング・B.P. ワーケンティン（山崎・山内 監訳）：土質工学の基礎，pp. 183～185，鹿島出版会，昭和 47年．
13) De Wiest, R.J.M. : On the Storage Coefficient and the Equations of Groundwater Flow, J. Geophys. Res., Vol. 71, No. 4, pp. 1117～1122, 1966.
14) De Wiest, R.J.M. : Fundamental Principles of Ground-Water Flow, in Flow Through Porous Media (Ed. by de Wiest), pp. 1～52, Academic Press, 1969.
15) 11) に同じ，pp. 72～95.
16) Gibson, R.E., G.L. England and M.J.L. Hussey : The Theory of One-Dimensional Consolidation of Saturated Clays, Géotechnique, 17, pp. 261～273, 1967.
17) Lujo Šuklje : Rheological Aspects of Soil Mechanics, Wiley-Interscience, pp. 131～133, 1969.
18) Biot, M.A. : General Theory of Three-dimensional Consolidation, J. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 155～164, 1941.
19) Biot, M.A. : Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, J. Appl. Phys., Vol. 26, No. 2, pp. 182～185, 1955.
20) 山口柏樹・村上幸利：有限粘土層の多次元圧密について，土木学会論文報告集，No. 204, pp. 71～81, 1972.
21) Jaeger, J.C. and N.G.W. Cook : Fundamentals of Rock Mechanics, Methuen, pp. 195～214, 1969.
22) 石原研而：土質動力学の基礎，鹿島出版会，pp. 50～69, 昭和 51 年．
23) Schiffman, R.L. : Consolidation of Soil under Time Dependent Loading and Varying Permeability, HRB, 37, pp. 584～617, 1958.
24) 大槇正紀：粘土の3次元圧密に関する一考察，京都大学防災研究所年報，No. 14 B, pp. 585～601, 1971.
25) 大槇正紀：Determination of Consolidation Constants of Saturated Clays, 土質工学会論文報告集，Vol. 12, No. 4, pp. 19～34, 1972.
26) 赤井浩一・足立紀尚：有効応力よりみた飽和粘土の一次元圧密と強度特性に関する研究，土木学会論文集，第 113 号，pp. 11～27, 1965.
27) たとえば岡二三生：Constitutive Theory for Solid-Fluid Mixture and Its Application to Stress Wave Propagation through Cohesive Soil, 土木学会論文報告集，No. 272, pp. 117～130, 1978.
28) Lee, I.K., J.D. Lawson and I.B. Donald : Flow of Water in Saturated Soil and Rockfill, in Soil Mechanics Selected Topics (Ed. by I.K. Lee), Butterworths, pp. 82～194, 1968.

(1979.1.5・受付)