

## 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論

THE EFFECTS OF TRANSVERSE COMPONENTS ON THE  
BENDING OF PLATES

平 島 健 一\*・村 松 正 重\*\*

By Ken-ichi HIRASHIMA and Masashige MURAMATSU

## 1. ま え が き

面外荷重を受ける平板はたとえ板厚が他の 2 方向の長さに比べて十分に小さいような場合であっても、厳密には 3 次元物体であり厚さ方向にわたって応力、ひずみ、変位等の力学量は変化するが、それらの量を含めた平板問題の厳密解を求めるには 3 次元弾性論を適用した解析を実施することが必要である。しかし周知のごとく、そのような厳密な取り扱いによって解析解が得られるのはそれほど多くはなく実際的な問題の解析に適用するには複雑すぎという難点もある。このような観点から、3 次元状態を近似的に解析するためには数値解析手段（差分法、有限要素法、積分方程式による数値法等）を適用することが考えられる。しかしながら、数値的解決というアプローチとは異なり、3 次元的な力学量のうち平板としての特性に着目し、その特性を解析手段の中に取り込み、解析を単純化し近似理論としての弾性平板の曲げ理論を定式化しようとする行き方が従来までに数多くなされてきた<sup>1)</sup>。たとえばその 1 つの方法として一般には 3 個の独立変数を 2 個に減らして表現する、すなわち 2 次元化して解析を進めようというものであり、平板の厚さ方向に級数展開（べき級数、Legendre 多項式、Fourier 級数等）を行い、その低次項のいくつかを採用することによって理論解析を達成しようとするものである。すなわち Kirchhoff の古典論において無視されているような板厚方向の応力、ひずみ、およびせん断変形に対する仮定（Kirchhoff の仮定）などは、それら自体が他の応力、ひずみ等に比べて小さく、かつまたこれらの力学量がこれから求めようとする平板の変形状態、応力状態などの最終結果に及ぼす影響がそれほど大きくないことを踏まえて、板厚方向に力学量（たとえば、変位、応力、ひずみ等）を有限項の級数に展開して解析を進めようとする

ものである。これは板厚がスパンや面外方向から作用する外荷重の一波長の長さに比べて小さくなるほど項数は少なくてよく、極端な場合、この比が十分に小さいと古典論のように、それらの効果を無視してしまっても十分に精度のよい結果が得られるのである。しかし、板厚が厚くなったり、外荷重の一波長の長さが板厚に比して小さくなったり、あるいは切り欠き、切り込みのある平板荷重を受けた孔を有する平板、さらには表面クラックのある平板などについては級数展開による誤差の解消ないし、小さい範囲でおさえ、解析精度の向上を図るにはより多くの級数項を採用することが必要となる。

このような見地から変位を厚さ方向にわたってべき級数展開して取り扱おうとしたものが変位仮定理論（古典論はその特殊な場合としてこの中に含まれる）であり、応力をべき級数展開したものが応力仮定理論とよばれるものである。このような方法で平板の曲げ問題に対する解析理論の一般化の究明を 1944 年以来約 35 年間にわたって精力的に続けているのが E. Reissner である。1944 年の彼の業績<sup>2)</sup>をその出発点として、古典論の仮定をはずした多くの平板の一般化理論が発表され現在に至っているが、それらを大別すると上記の二者のように分類される。

前者の中で、おそらく最も多くの展開項数を採用したものは Lo, Christensen および Wu の研究による高次理論 (High Order Theory)<sup>3,4)</sup> であろう。彼らの理論の特徴をあげれば次のようになる。すなわち、板厚方向の効果は一応、十分に考慮されているが、そのぶん、基礎式は複雑になり特殊な問題は解けるが、より一般的な問題に対して解が得にくい。また変位はよい精度で得られるが、つり合い式が満たされていないため理論の複雑さの割に変位に比べて応力の精度はよくなく、板上下表面の境界条件も満たされていない<sup>注 1)</sup>。しかし、応力の不連続性が生じる層状性板においては、その威力を發揮

\* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科

\*\* 学生会員 東京大学大学院工学研究科修士課程

注 1) しかしこの点に関して Lo らの第 3 論文 5) では改良がなされている。

する。

他方、応力仮定の理論の中で代表的なものは Ambartsumyan の研究<sup>9)</sup> であろう。彼の理論は均質な異方性板において、せん断変形と板厚方向の直応力の効果を近似的に取り入れたものであり平板曲げ理論においては先駆的なものの1つである。この方法は、つり合い方程式、構成関係式（ただし、板厚方向の直ひずみに対するものは除く）は満足されているが変位の適合性が満たされていない。これは板厚方向の直ひずみの仮定に起因するものであり、彼の理論は、この直ひずみが無視されているために全体的にも精度が低下し、特に変位に関しては Reissner<sup>2)</sup> と同じレベル程度の精度でしかない。

本論文は、従来までの平板曲げの一般化理論として提案されているものを概観するとともに、通常多くの問題において興味のあるのは応力状態であることから応力状態に対して高精度な結果が割合に期待できる応力仮定を出発点とする平板曲げ理論を考え、Ambartsumyan 理論において見捨てられていた板厚方向の直ひずみを考慮することによって構成関係ならびに変位の適合性をできるだけ満足させた1つの修正理論について述べようとするものである。すなわち、この論文も他の多くの平板曲げ理論に関する論文と同様に弾性学的基础関係式（つり合い、構成、幾何、適合の各関係式）を完全に満足させることをめざすものではなく、あくまで2次元化した平板曲げ理論をその立脚点とするものであり、ここでは Ambartsumyan の結果をその第1次近似値とした場合の第2次近似値に相当する理論を取り扱おうとするものである。ここで示した第2次近似値を高精度化することは、本論文で考察した手法と同様な操作を繰り返し実行することによって達成できるものである。

### 2. 従来までの平板曲げの理論の分類

#### (1) 変位仮定理論

変位を級数展開し、これを基本仮定として理論を組み立てた平板の一般化理論を最初に提案したのは Reissner である。彼によって与えられた理論は、次の形の変位仮定に基づくものであった<sup>2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ u_y &= v(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ u_z &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $z$  は板厚方向の座標であり  $u, v, w, \psi_x, \psi_y$  は面内座標  $(x, y)$  の関数である。このうち  $\psi_x, \psi_y$  は断面の回転角を表し、この値が任意であるということは板厚方向に直線の変化をするという拘束のもとで板面内の自由なせん断変形が許されているということを意味

するものである。この指摘と本質的に同じことであるが、式 (1) の関係は平板の板厚方向に一樣なせん断応力を予言しておりそのためより正しく現実を説明するためにはせん断応力に対する補正係数を導入する必要がある<sup>注2)</sup>。しかし、そのような補正はもちろん厳密には正しくなく、この式 (1) のレベルの理論では一般に板表面の境界条件は満足されない。

このような線に沿って変位の級数展開の項数を増した理論は数多くあるが、板厚方向の効果を最もよく表す必要最小限な項数ということが問題である。そのような点から現時点において、厚さ方向の効果を最もよく表している理論として Lo らの高次理論 (High Order Theory)<sup>3), 4)</sup> を紹介すると次のようである。すなわち、彼らの理論は変位を次のようにおいている。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\zeta_x(x, y) \\ &\quad + z^3\phi_{xx}(x, y) \\ u_y &= v(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\zeta_y(x, y) \\ &\quad + z^3\phi_{yy}(x, y) \\ u_z &= w(x, y) + z\phi_z(x, y) + z^2\zeta_z(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式 (2) がなぜ必要最小限の項数であるかについては、まず面内変位  $u_x, u_y$  をみると  $z$  と  $z^3$  の項は曲げ効果を表しているが、Reissner が最初に仮定した式 (1) のような  $z$  の1次の項だけでは一樣でないせん断応力の説明はできない点で十分ではなく<sup>注3)</sup>、そこで曲げに関する項 ( $z^3$  の項) をさらにもう1つ採用することが必要であり、また定数項および  $z^2$  の項は面内効果を表すためのものである。次に、面外変位  $u_z$  については定数項および  $z^2$  の項が曲げ効果を表しており板厚方向のひずみおよび応力による曲げへの影響を考慮するためには最小限ここまでとらなければならない。つまり式 (2) までの項を採用すれば厚さ方向のせん断変形、厚さ方向の直ひずみおよび厚さ方向座標に関する面内変位の非線形分布 (断面のよじれ) の効果を最低限考慮したことになるのである。Lo らの理論に対する flow chart を Fig. 1 に示しておいた。また従来までに提案されている変位仮定に基づく理論のうち代表的なものについて整理した結果を Table 1 に示す。

#### (2) 応力仮定理論 (Ambartsumyan の理論)

さて、本論文のもとなる応力仮定理論の代表的な Ambartsumyan の理論<sup>9)</sup> について述べよう<sup>注4)</sup>。

注 2) Table 1 で示すように Reissner は式 (1) と整合性のある応力仮定も導入しているため、せん断補正係数を導入する必要がなかった。ただし Mindlin<sup>1)</sup> その他の論文ではこの指摘が成立する<sup>3)</sup>。

注 3) 脚注 2) 参照。

注 4) なお、ここで用いる記号は、Ambartsumyan の著書に示されたものをほとんど用いている。異なる記号ないし意味をもたせたものはそのつど説明してある。

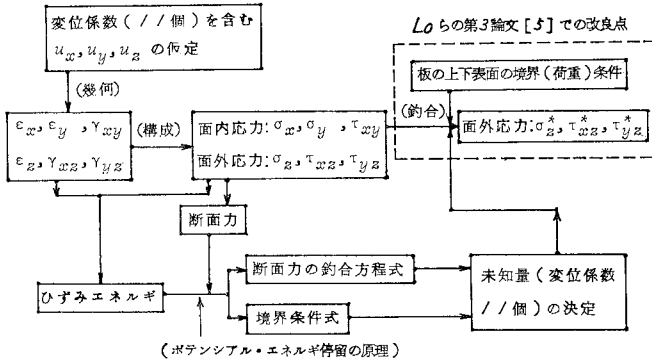


Fig. 1 Flow chart of deduction and modification of governing equations due to High Order Theory (by Lo & Others) based upon the assumption of displacement forms.

彼は理論展開に先立って次のような仮定を設けた。

- Ⓐ 板の中央面に垂直な変位 (面外変位)  $u_z$  は板厚方向の座標  $z$  に無関係である。
- Ⓑ 面外せん断応力  $\tau_{xz}$  および  $\tau_{yz}$  は、ある与えら

うに板の上下表面 ( $z = -h/2, z = +h/2$ ) に作用する外力ベクトルの接線成分,  $\varphi(x, y)$  および  $\phi(x, y)$  は求めるべき関数, また  $f_i(z)$ , ( $i=1, 2$ ) はせん断応力  $\tau_{xz}$  および  $\tau_{yz}$  の厚さ方向の変化を示す関数であり, 彼はこ

れた法則に従って板の厚さ方向に分布する。  
すなわち, 上記 Ⓐ, Ⓑ の仮定を式で表現すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= 0 \dots\dots\dots (3) \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2} (X^+ - X^-) + \frac{z}{h} (X^+ + X^-) \\ &\quad + f_1(z) \cdot \varphi(x, y) \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2} (Y^+ - Y^-) + \frac{z}{h} (Y^+ + Y^-) \\ &\quad + f_2(z) \cdot \phi(x, y) \end{aligned}$$

ここで,  $X^+(x, y), Y^+(x, y)$  および  $X^-(x, y), Y^-(x, y)$  は Fig. 2 に示すよ

Table 1 Review of recent developments in the generalization of approximate plate theory utilized assumptions upon the forms of displacements (After Lo & Others<sup>3)</sup> and authors' supplement).

<p>Level [1] 古典論: <math>u_x = u - z\tau_{x,z}, u_y = v - z\tau_{y,z}, u_z = w \dots\dots\dots (a)</math> Reissner<sup>2)</sup>, Mindlin<sup>3)</sup>: <math>u_x = u + z\phi_x, u_y = v + z\phi_y, u_z = w \dots\dots\dots (b)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Reissner は式 (b) と整合性のある板厚にわたる応力分布の仮定を導入。</li> <li>○ Mindlin は応力分布仮定は設けず, したがって (一般に板の表面条件を乱す) 板厚にわたる面外方向の一樣せん断応力となることを補正するために厳密な弾性解との比較からせん断補正係数を定めた。</li> <li>○ 古典論は変位の板厚方向の座標 <math>z</math> のべき展開の第 1 項のみが採用されている点で式 (b) と同一レベルの近似度といえる。すなわち, 式 (b) のレベルでせん断変形を考慮した理論の特別な場合 (i.e. 面外方向のせん断剛性をせん断変形が無視できる程度にまで大きくした場合) に相当する。</li> <li>○ なお, このレベルの変位仮定を用いるが, ひずみ-変位関係式に非線形性の効果を考慮した論文が多数ある<sup>(4)~(20)</sup>。</li> </ul>
<p>Level [2] Naghdi<sup>9)</sup>, Essenberg<sup>9)</sup>, Whitney &amp; Sun<sup>(10)</sup>: <math>u_x = u + z\phi_x, u_y = v + z\phi_y, u_z = w + z\phi_z + z^2\zeta_z \dots\dots\dots (c)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ このレベルの理論は板厚方向の直ひずみ <math>\epsilon_z</math> の効果を含むことになる。</li> <li>○ Naghdi は式 (c) の変位仮定と対応する応力仮定をあわせて一般のシェル理論を誘導。</li> <li>○ Essenberg は Naghdi の考え方に対応する 1 次元板理論を展開。接触問題に対して Level [1] に比べて式 (c) に基づく理論の有用性と利点を示した。</li> <li>○ Whitney &amp; Sun は層状性の円筒シェル理論に式 (c) 系統の仮定を採用。しかし, 彼らのアプローチでは合力を導く際に Mindlin が採用したと同じタイプのせん断補正係数を使っていることに不整合性がある。なぜなら, このタイプの係数は板厚にわたる一樣なせん断応力となる Mindlin 理論に対しては適切であるが, 式 (c) の変位仮定の場合には上下表面でのせん断応力の条件を満たすように係数を定めれば, 非一樣なせん断応力分布となり, したがって補正係数に対する理論的根拠が除かれたことになっているから。</li> </ul>
<p>Level [3] Nelson &amp; Lorch<sup>(11)</sup>: <math>u_x = u + z\phi_x + z^2\zeta_x, u_y = v + z\phi_y + z^2\zeta_y, u_z = w + z\phi_z + z^2\zeta_z \dots\dots\dots (d)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 層状性板に適用するために, 上記の著者らにより用いられたが, 文献 [10] に対する批判と同じことがこの場合にも該当する。すなわち, 式 (d) の近似度とは不整合な形のせん断補正係数が採用されている。</li> </ul>
<p>Level [4] Schmidt<sup>(12)</sup>: <math>u_x = u + z\phi_x + z^2\phi_x, u_y = v + z\phi_y + z^2\phi_y, u_z = w \dots\dots\dots (e)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 変位仮定として式 (e) を採用するが幾何学関係式, つり合い方程式としては面内の 2 つの軸に関する有限回転の影響を考慮した式を用いる。</li> <li>○ 得られた式を線形化し, 円孔を有する平板曲げの問題に対する結果は, Reissner の計算値と完全に一致。</li> </ul>
<p>Level [5] Reissner<sup>(13)</sup>: <math>u_x = z\phi_x + z^2\phi_x, u_y = z\phi_y + z^2\phi_y, u_z = w + z^2\zeta_z \dots\dots\dots (f)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 上式の第 3 式は Reissner の論文の式 (9), (11) を組み合わせれば得られる。式 (f) に基づく平板理論は円孔を有する板の曲げに対する弾性解ときわめてよい精度で一致する結果を与える。</li> <li>○ 式 (f) の第 2 項目は同式の第 1 項目のみで表示された Level [1] の理論に対する面外変形の効果の最低次の補正を示すものである。</li> <li>○ 式 (f) では面内効果の項が無視されているが, この面内効果の項はある種の平板問題では重要になる。</li> </ul>
<p>Level [6] Lo, Christensen &amp; Wu<sup>(3, 4)</sup>: <math>u_x = u + z\phi_x + z^2\zeta_x + z^3\phi_x, u_y = v + z\phi_y + z^2\zeta_y + z^3\phi_y, u_z = w + z\phi_z + z^2\zeta_z \dots\dots\dots (g)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 本論文の 1., 2. 参照。</li> <li>○ 外荷重特性が板中央面に対して逆対称であるような場合の曲げ問題では式 (f) のレベルの理論で十分であるが, 非対称となるような場合には式 (g) までの項が必要。</li> </ul>

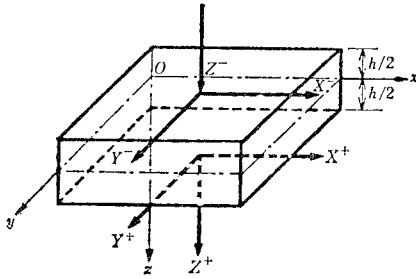


Fig. 2 Coordinate system and external load vectors applied at the surfaces of plate.

の応力成分が厚さ方向の断面にわたって放物線分布をすと仮定<sup>5)</sup>して  $f_1(z), f_2(z)$  を次のようにおいた。

$$f_i(z) = f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad (i=1, 2) \dots (5)$$

この理論は、仮定からわかるように板の厚さ方向のせん断変形と直応力とを考慮に入れたものであるが板厚方向のひびずみに関しては古典論の場合と同様、考慮されておらず、面外変位  $u_z$  は中央面の変位  $w$  で代表させていることになっている。また、この理論における独特な仮定としてせん断応力の分布形をある一定の形（ここでは放物線形）に固定していることである。この理論をまとめると、Fig. 3 の flow chart のようになる。図からわかるように、板厚方向の直応力  $\sigma_z$  は第3番目のつり合い方程式の積分によって求められるものであり、面内変位  $u_x, u_y$  とは一応無関係に決定されている。これでは  $\sigma_z$  の変位、したがってひびずみとの関連性（すなわち構成関係式）が十分に考慮されておらないことになる。ただし、つり合い方程式から  $\sigma_z$  を求めることは常

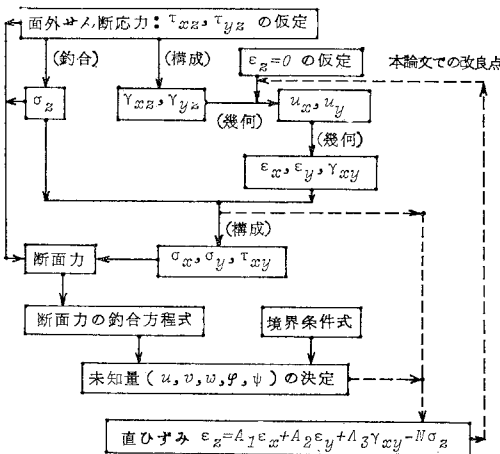


Fig. 3 Flow chart of deduction and modification of governing equations due to Ambartsumyan's Theory based on the assumption of stress forms.

に必ずいけないということではなく、たとえば、せん断応力  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  の正確な分布形が用いられておりさえすれば正確な  $\sigma_z$  がつり合い式から求められるはずであるが、ここでは、 $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  の分布形を放物線分布としたため、 $\sigma_z$  に対する誤差が生じる要因があったと考えてもよい。せん断応力がほぼ放物線分布をすと仮定することは通常の場合、ある程度精度のよい結果が得られるが、応力変化の激しいところ、拘束の強いところなどは放物線分布とは限らないであろう。そこで、この仮定を外した別の分布形を考えるかあるいはもう少し order を上げたより任意性のある分布形を仮定して解析を試みる必要がある<sup>注6)</sup>。そのいくつかについて著者らは実際に試みてみたが、理論式が非常に複雑になり解析には相当困難性を伴うものである。しかしながら、たとえば、4. の計算例(1)で取り扱うような問題に対する厳密解<sup>21)</sup>、ならびに Lo らの第3論文の結果<sup>9)</sup>（同論文中の式(15)）でみられるように、面外せん断応力の  $z$  に関する4次程度までの展開項をとることが、閉じた形の解(closed-form solution)が得られるか否かは別として、より正確な結果を得るために必要になってくることは間違いないであろう。

次にもう1つの仮定  $\epsilon_z = 0$  について考えてみる。構成関係式において  $\epsilon_z$  およびその他のひびずみ成分と応力成分との関係は一般に式(6)で表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy} \\ \epsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy} \\ \epsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} \\ \tau_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ただし、上式の関係は、ただ1つの弾性対称面が  $(x, y)$  平面に平行であるような一般化した Hooke の法則を仮定した場合であり、係数  $a_{ij}$  は弾性コンプライアンスとよばれるものである。Ambartsumyan は、この関係式(6)<sub>3</sub>において左辺の  $\epsilon_z$  を  $\epsilon_z = 0$  という固定した値にしてしまっているが、これが常に成立、すなわち、右辺が恒等的に零になるというものではない。いいかえればこの  $\epsilon_z = 0$  なる関係式を理論の中に持ち込むことは、理論を簡易化して事実上の理論的取り扱いを可能にするための一手段にすぎないものである。そこでいま、式(6)<sub>3</sub>の右辺の面内応力成分  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  を他の構成関係式(6)から  $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xz}, \sigma_z$  で表し、書き改めると次のようになる。

$$\epsilon_z = A_1\epsilon_x + A_2\epsilon_y + A_3\tau_{xy} - N\sigma_z \dots (7)$$

ここに、

注 5) Ambartsumyan はその著書<sup>9)</sup>の中で厚板の曲げについてもこの仮定の妥当性を議論している。

注 6) Ambartsumyan も、1, 2分布形を変えた場合の解析を実施している(たとえば文献(6)の p. 101 参照)。

$$N = a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{36}A_3 - a_{33} \dots \dots \dots (8)$$

である。上式中の  $A_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) は次節の式 (13) で求められる係数である。したがって、この式を満たすような  $\epsilon_z$  を求めて理論展開を行えば式 (6) からわかるように  $\epsilon_z$  による効果、すなわち  $\sigma_z$  の板挙動に及ぼす本来の効果の評価することができる。

本論文では式 (7) を満足させるために式中の  $\epsilon_x, \epsilon_y, r_{xy}, \sigma_z$  の値に、 $\epsilon_z=0$  の仮定から出発した Ambartsumyan の解を用い、これより求めた  $\epsilon_z$  を用いて再度理論展開を試みようとするものである (Fig. 3 参照)。しかし、この改良理論から新たに求まる  $\epsilon_x, \epsilon_y, r_{xy}, \sigma_z$  は、またしても式 (7) を厳密には満足していないことになる。したがって逐次、上述の手法を繰り返してゆけば、式 (7) の両辺が漸次同一の値に近づくことが期待される。すなわち、本論文での取り扱い Ambartsumyan の理論を第 1 次近似とみなした場合の逐次近似解法的な手法を用いた解析に相当するものであるといえよう。

### 3. 逐次近似解析理論

#### (1) 基礎方程式

Ambartsumyan の解法 ( $\epsilon_z=0$  および  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  の仮定を出発点とした理論) より求めた  $\epsilon_x, \epsilon_y, r_{xy}, \sigma_z$  よりひずみ  $\epsilon_z$  を求め、この  $\epsilon_z$  と、はじめの  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  の仮定を基本にして同様な理論を組み立てる。したがって、新しい  $\epsilon_z$  は式 (7) より求めることになる。これを再記すると、

$$\epsilon_z = A_1\epsilon_x + A_2\epsilon_y + A_3r_{xy} - N\sigma_z \dots \dots \dots (7)$$

である。この  $\epsilon_z$  と線形の幾何学 (変位-ひずみ) 関係:

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \dots \dots \dots (9)$$

より  $z=0$  において  $u_z=w(x, y)$  の条件のもとに式 (9) を積分すると、

$$u_z = w(x, y) + W(x, y, z) \dots \dots \dots (10)$$

となる。ただし、 $w$  は板の中央面の面外方向変位であり、未知関数  $W(x, y, z)$  は、

$$W = \int_0^z \epsilon_z dz, \text{ ただし、 } W(x, y, 0) = 0 \dots \dots (11)$$

と書ける。上記の面外方向の変位  $u_z$  に対する Ambartsumyan の応力仮定、すなわち式 (4) から理論展開を行う。ただし、式中の  $f_1(z), f_2(z)$  は任意に定められる厚さ方向のせん断応力分布を表す関数であり、本論文では Ambartsumyan と同様に放物線分布形 (式 (5)) を仮定する。

ここで、一般化 Hooke の法則 (6) を応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  に関して解けば次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y + B_{16}r_{xy} - A_1\sigma_z \\ \sigma_y &= B_{12}\epsilon_x + B_{22}\epsilon_y + B_{26}r_{xy} - A_2\sigma_z \\ \tau_{xy} &= B_{16}\epsilon_x + B_{26}\epsilon_y + B_{66}r_{xy} - A_3\sigma_z \\ \tau_{yz} &= B_{44}r_{yz} + B_{45}r_{xz} \\ \tau_{xz} &= B_{45}r_{yz} + B_{55}r_{xz} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{Q} (a_{22}a_{66} - a_{26}^2), \quad B_{22} = \frac{1}{Q} (a_{11}a_{66} - a_{16}^2) \\ B_{12} &= \frac{1}{Q} (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}), \quad B_{66} = \frac{1}{Q} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \\ B_{16} &= \frac{1}{Q} (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}) \\ B_{26} &= \frac{1}{Q} (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}) \\ B_{55} &= \frac{a_{44}}{\omega}, \quad B_{44} = \frac{a_{55}}{\omega}, \quad B_{45} = -\frac{a_{45}}{\omega} \\ Q &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2 \\ \omega &= a_{44}a_{55} - a_{45}^2 \\ A_1 &= B_{11}a_{13} + B_{12}a_{23} + B_{16}a_{36} \\ A_2 &= B_{12}a_{13} + B_{22}a_{23} + B_{26}a_{36} \\ A_3 &= B_{16}a_{13} + B_{26}a_{23} + B_{66}a_{36} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

式 (4), (6) より面外せん断ひずみを求めれば、

$$\left. \begin{aligned} r_{xz} &= a_{55}f_1(z)\varphi + a_{45}f_2(z)\psi + a_{55}X_1 + a_{45}Y_1 \\ &\quad + \frac{z}{h} (a_{55}X_2 + a_{45}Y_2) \\ r_{yz} &= a_{45}f_1(z)\varphi + a_{44}f_2(z)\psi + a_{45}X_1 + a_{44}Y_1 \\ &\quad + \frac{z}{h} (a_{45}X_2 + a_{44}Y_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} (X^+ - X^-), \quad Y_1 = \frac{1}{2} (Y^+ - Y^-), \\ X_2 &= X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^- \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

と置いた。線形の幾何学関係式より  $r_{xz}, r_{yz}$  は次のように書き表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} + r_{xz}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} + r_{yz} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

式 (14), (16) より  $z=0$  において  $u_x=u(x, y), u_y=v(x, y)$  の条件のもとに  $z$  に関して積分すると次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z u_z dz + a_{55}J_{01}\varphi + a_{45}J_{02}\psi \\ &\quad + z(a_{55}X_1 + a_{45}Y_1) + \frac{z^2}{2h} (a_{55}X_2 + a_{45}Y_2) \\ u_y &= v - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z u_z dz + a_{45}J_{01}\varphi + a_{44}J_{02}\psi \end{aligned} \right\}$$

$$+z(a_{45}X_1+a_{44}Y_1)+\frac{z^2}{2h}(a_{45}X_2+a_{44}Y_2) \Bigg\} \dots\dots\dots(17)$$

ここで、右辺第2項を次のように書き換えておく。

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^z u_z dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z [w(x, y) + W(x, y, z)] dz \\ = z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z W dz = zw_{,x} + I_x \dots\dots(18)$$

同様にして、

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^z u_z dz = zw_{,y} + I_y \dots\dots\dots(18)'$$

ここに、コンマ記号はその後の添字での偏微分を意味するものであり、また記号  $I$  を次のように置いた。

$$I \equiv \int_0^z W dz \dots\dots\dots(19)$$

また、式 (17) の  $J_{01}, J_{02}$  は Ambartsumyan の用いたものと同一で次式で与えられる。

$$J_{01} \equiv \int_0^z f_1(z) dz, \quad J_{02} \equiv \int_0^z f_2(z) dz \dots\dots(20)$$

したがって、幾何学関係と式 (17) から、面内ひずみ成分  $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$  は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= u_{x,x} = u_{,x} - zw_{,xx} - I_{,x} + a_{55}J_{01}\varphi_{,x} + a_{45}J_{02}\psi_{,x} \\ &\quad + z(a_{55}X_{1,x} + a_{45}Y_{1,x}) \\ &\quad + \frac{z^2}{2h}(a_{55}X_{2,x} + a_{45}Y_{2,x}) \\ \epsilon_y &= u_{y,y} = v_{,y} - zw_{,yy} - I_{,y} + a_{45}J_{01}\varphi_{,y} + a_{44}J_{02}\psi_{,y} \\ &\quad + z(a_{45}X_{1,y} + a_{44}Y_{1,y}) \\ &\quad + \frac{z^2}{2h}(a_{45}X_{2,y} + a_{44}Y_{2,y}) \\ \tau_{xy} &= u_{x,y} + u_{y,x} = u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} - 2I_{,xy} \\ &\quad + J_{01}(a_{45}\varphi_{,x} + a_{55}\varphi_{,y}) + J_{02}(a_{44}\psi_{,x} + a_{45}\psi_{,y}) \\ &\quad + z[a_{55}X_{1,y} + a_{44}Y_{1,x} + a_{45}(X_{1,x} + Y_{1,y})] \\ &\quad + \frac{z^2}{2h}[a_{55}X_{2,y} + a_{44}Y_{2,x} + a_{45}(X_{2,x} + Y_{2,y})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

次に、 $\sigma_z$  を求めよう。応力のつり合い方程式の第3式、すなわち、

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} = 0 \dots\dots\dots(22)$$

に式 (4) の  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  を代入して積分すれば、

$$\sigma_z = \chi(x, y) - J_{01}\varphi_{,x} - J_{02}\psi_{,y} - z(X_{1,x} + Y_{1,y}) \\ - \frac{z^2}{2h}(X_{2,x} + Y_{2,y}) \dots\dots\dots(23)$$

$\chi(x, y)$  は板の上下表面の境界条件より求まる積分定数であり、いま、

$$\left. \begin{aligned} z = h/2 \text{ において } \sigma_z &= Z^+ \\ z = -h/2 \text{ において } \sigma_z &= -Z^- \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

とすれば、 $\chi(x, y)$  は次式を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \chi(x, y) &= K_1^+(h/2) \cdot \varphi_{,x} + K_2^+(h/2) \cdot \psi_{,y} \\ &\quad + \frac{h}{8}(X_{2,x} + Y_{2,y}) + Z_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1^-(h/2) \cdot \varphi_{,x} + K_2^-(h/2) \cdot \psi_{,y} \\ = -h(X_{1,x} + Y_{1,y}) - Z_2 \end{aligned} \right\}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_i^+(h/2) &= \frac{1}{2} [J_{0i}(h/2) + J_{0i}(-h/2)] \\ K_i^-(h/2) &= J_{0i}(h/2) - J_{0i}(-h/2) \\ Z_1 &= \frac{1}{2} (Z^+ - Z^-) \\ Z_2 &= Z^+ + Z^- \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

以上で求めた  $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$  および  $\sigma_z$  を構成関係式 (12) に代入すると面内応力成分が次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}u_{,x} + B_{12}v_{,y} + B_{16}(u_{,y} + v_{,x}) \\ &\quad - z(B_{11}w_{,xx} + 2B_{16}w_{,xy} + B_{12}w_{,yy}) \\ &\quad - (B_{11}I_{,xx} + 2B_{16}I_{,xy} + B_{12}I_{,yy}) \\ &\quad + J_{01}[(a_{55}B_{11} + a_{45}B_{16} + A_1)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{12} + a_{55}B_{16})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_{02}[(a_{44}B_{12} + a_{45}B_{16} + A_1)\psi_{,y} \\ &\quad + (a_{45}B_{11} + a_{44}B_{16})\psi_{,x}] - A_1\chi \\ &\quad + z[B_{11}Q_1 + B_{12}Q_2 + B_{16}Q_3 + A_1(X_{1,x} + Y_{1,y})] \\ &\quad + \frac{z^2}{2h}[B_{11}R_1 + B_{12}R_2 + B_{16}R_3 \\ &\quad + A_1(X_{2,x} + Y_{2,y})] \\ \sigma_y &= B_{12}u_{,x} + B_{22}v_{,y} + B_{26}(u_{,y} + v_{,x}) \\ &\quad - z(B_{12}w_{,xx} + 2B_{26}w_{,xy} + B_{22}w_{,yy}) \\ &\quad - (B_{12}I_{,xx} + 2B_{26}I_{,xy} + B_{12}I_{,yy}) \\ &\quad + J_{01}[(a_{55}B_{12} + a_{45}B_{26} + A_2)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{22} + a_{55}B_{26})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_{02}[(a_{44}B_{22} + a_{45}B_{26} + A_2)\psi_{,y} \\ &\quad + (a_{45}B_{12} + a_{44}B_{26})\psi_{,x}] - A_2\chi \\ &\quad + z[B_{12}Q_1 + B_{22}Q_2 + B_{26}Q_3 + A_2(X_{1,x} + Y_{1,y})] \\ &\quad + \frac{z^2}{2h}[B_{12}R_1 + B_{22}R_2 + B_{26}R_3 \\ &\quad + A_2(X_{2,x} + Y_{2,y})] \\ \tau_{xy} &= B_{16}u_{,x} + B_{26}v_{,y} + B_{66}(u_{,y} + v_{,x}) \\ &\quad - z(B_{16}w_{,xx} + 2B_{66}w_{,xy} + B_{26}w_{,yy}) \\ &\quad - (B_{16}I_{,xx} + 2B_{66}I_{,xy} + B_{26}I_{,yy}) \\ &\quad + J_{01}[(a_{55}B_{16} + a_{45}B_{66} + A_3)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{26} + a_{55}B_{66})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_{02}[(a_{44}B_{26} + a_{45}B_{66} + A_3)\psi_{,y} \\ &\quad + (a_{45}B_{16} + a_{44}B_{66})\psi_{,x}] - A_3\chi \\ &\quad + z[B_{16}Q_1 + B_{26}Q_2 + B_{66}Q_3 + A_3(X_{1,x} + Y_{1,y})] \\ &\quad + \frac{z^2}{2h}[B_{16}R_1 + B_{26}R_2 + B_{66}R_3 \\ &\quad + A_3(X_{2,x} + Y_{2,y})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

上式中の係数  $Q_i, R_i$  は次式で定められる。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= a_{55}X_{1,x} + a_{45}Y_{1,x} \\ Q_2 &= a_{45}X_{1,y} + a_{44}Y_{1,y} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_3 &= a_{55}X_{1,y} + a_{44}Y_{1,x} + a_{45}(X_{1,x} + Y_{1,y}) \\ R_1 &= a_{55}X_{2,x} + a_{45}Y_{2,x} \\ R_2 &= a_{45}X_{2,y} + a_{44}Y_{2,y} \\ R_3 &= a_{55}X_{2,y} + a_{44}Y_{2,x} + a_{45}(X_{2,x} + Y_{2,y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

次に断面力を求めると最終的に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = C_{11}u_{,x} + C_{12}v_{,y} + C_{16}(u_{,y} + v_{,x}) \\ &\quad - (B_{11}\Gamma_1 + B_{12}\Gamma_2 + 2B_{16}\Gamma_3) \\ &\quad + J_1[(a_{55}B_{11} + a_{45}B_{15} + A_1)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{12} + a_{55}B_{16})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_2[(a_{45}B_{11} + a_{44}B_{16})\psi_{,x} \\ &\quad + (a_{44}B_{12} + a_{45}B_{16} + A_1)\psi_{,y}] - A_1 h x \\ &\quad + \frac{h^2}{24}[B_{11}R_1 + B_{12}R_2 + B_{16}R_3 \\ &\quad + A_1(X_{2,x} + Y_{2,y})] \\ T_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = C_{12}u_{,x} + C_{22}v_{,y} + C_{26}(u_{,y} + v_{,x}) \\ &\quad - (B_{12}\Gamma_1 + B_{22}\Gamma_2 + 2B_{26}\Gamma_3) \\ &\quad + J_1[(a_{55}B_{12} + a_{45}B_{26} + A_2)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{22} + a_{55}B_{26})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_2[(a_{45}B_{12} + a_{44}B_{26})\psi_{,x} \\ &\quad + (a_{44}B_{22} + a_{45}B_{26} + A_2)\psi_{,y}] - A_2 h x \\ &\quad + \frac{h^2}{24}[B_{12}R_1 + B_{22}R_2 + B_{26}R_3 \\ &\quad + A_2(X_{2,x} + Y_{2,y})] \\ S &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = C_{16}u_{,x} + C_{26}v_{,y} + C_{66}(u_{,y} + v_{,x}) \\ &\quad - (B_{16}\Gamma_1 + B_{26}\Gamma_2 + 2B_{66}\Gamma_3) \\ &\quad + J_1[(a_{55}B_{16} + a_{45}B_{66} + A_3)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{26} + a_{55}B_{66})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_2[(a_{45}B_{16} + a_{44}B_{66})\psi_{,x} \\ &\quad + (a_{44}B_{26} + a_{45}B_{66} + A_3)\psi_{,y}] - A_3 h x \\ &\quad + \frac{h^2}{24}[B_{16}R_1 + B_{26}R_2 + B_{66}R_3 \\ &\quad + A_3(X_{2,x} + Y_{2,y})] \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \\ &= - (D_{11}w_{,xx} + D_{12}w_{,yy} + 2D_{16}w_{,xy}) \\ &\quad - (B_{11}A_1 + B_{12}A_2 + 2B_{16}A_3) \\ &\quad + J_3[(a_{55}B_{11} + a_{45}B_{16} + A_1)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{12} + a_{55}B_{16})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_4[(a_{45}B_{11} + a_{44}B_{16})\psi_{,x} \\ &\quad + (a_{44}B_{12} + a_{45}B_{16} + A_1)\psi_{,y}] \\ &\quad + \frac{h^3}{12}[B_{11}Q_1 + B_{12}Q_2 + B_{16}Q_3 \\ &\quad + A_1(X_{1,x} + Y_{1,y})] \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &= - (D_{12}w_{,xx} + D_{22}w_{,yy} + 2D_{26}w_{,xy}) \\ &\quad - (B_{12}A_1 + B_{22}A_2 + 2B_{26}A_3) \\ &\quad + J_3[(a_{55}B_{12} + a_{45}B_{26} + A_2)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{22} + a_{55}B_{26})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_4[(a_{45}B_{12} + a_{44}B_{26})\psi_{,x} \\ &\quad + (a_{44}B_{22} + a_{45}B_{26} + A_2)\psi_{,y}] \\ &\quad + \frac{h^3}{12}[B_{12}Q_1 + B_{22}Q_2 + B_{26}Q_3 \\ &\quad + A_2(X_{1,x} + Y_{1,y})] \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \\ &= - (D_{16}w_{,xx} + D_{26}w_{,yy} + 2D_{66}w_{,xy}) \\ &\quad - (B_{16}A_1 + B_{26}A_2 + 2B_{66}A_3) \\ &\quad + J_3[(a_{55}B_{16} + a_{45}B_{66} + A_3)\varphi_{,x} \\ &\quad + (a_{45}B_{26} + a_{55}B_{66})\varphi_{,y}] \\ &\quad + J_4[(a_{45}B_{16} + a_{44}B_{66})\psi_{,x} \\ &\quad + (a_{44}B_{26} + a_{45}B_{66} + A_3)\psi_{,y}] \\ &\quad + \frac{h^3}{12}[B_{16}Q_1 + B_{26}Q_2 + B_{66}Q_3 \\ &\quad + A_3(X_{1,x} + Y_{1,y})] \\ N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = J_5\varphi + hX_1 \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = J_6\psi + hY_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここで次のような記号を導入した。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} I_{,xx} dz, \quad \Gamma_2 = \int_{-h/2}^{h/2} I_{,yy} dz \\ \Gamma_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} I_{,xy} dz, \\ A_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} z I_{,xx} dz, \quad A_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z I_{,yy} dz \\ A_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} z I_{,xy} dz \\ J_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} J_{01} dz, \quad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} J_{02} dz \\ J_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} z J_{01} dz, \quad J_4 = \int_{-h/2}^{h/2} z J_{02} dz \\ C_{ik} &= hB_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

断面力によるつり合い方程式は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} T_{x,x} + S_{,y} &= -X_2, \quad T_{y,y} + S_{,x} = -Y_2 \\ N_{x,x} + N_{y,y} &= -Z_2 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} &= N_x - hX_1 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} &= N_y - hY_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

これに式 (29) を代入すると、対象とする平板問題の支配方程式が得られることになる。

ここでは、Ambartsumyan の理論と同様に、せん断

応力の分布形を表す関数  $f_1, f_2$  を次のようにおく。

$$f_1(z) = f_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \dots\dots\dots (32)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} J_0 &\equiv J_{01} = J_{02} = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \\ J_1 &= J_2 = 0, \quad J_3 = J_4 = \frac{h^3}{120} \\ K_i^-(h/2) &= \frac{h^3}{12}, \quad K_i^+(h/2) = 0 \\ K_i^-(z_0) &= z_0 \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

となる。

(2) 直交異方性平板に対する支配方程式

直交異方性の平板を対象とするものとし、面外せん断応力成分  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  に導入された関数  $f_i(z)$  を式 (32) の分布形および、平板の上下表面での外力ベクトルの接線成分を零すなわち、 $X^z=0, Y^z=0$  と仮定できる場合には、支配方程式は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} C_{11}u_{,xx} + (C_{12} + C_{66})v_{,xy} + C_{66}u_{,yy} \\ = A_1 h Z_{1,x} + B_{11} \Gamma_{1,x} + B_{12} \Gamma_{2,x} + 2 B_{66} \Gamma_{3,y} \\ C_{66}v_{,xx} + (C_{12} + C_{66})u_{,xy} + C_{22}v_{,yy} \\ = A_2 h Z_{1,y} + B_{12} \Gamma_{1,y} + B_{22} \Gamma_{2,y} + 2 B_{66} \Gamma_{3,x} \\ \varphi_{,x} + \psi_{,y} = - \frac{12}{h^3} Z_2 \\ D_{11}w_{,xxx} + (D_{12} + 2 D_{66})w_{,xyy} \\ - \frac{h^2}{10} [a_{55}(D_{11}\varphi_{,xx} + D_{66}\varphi_{,yy}) \\ + a_{44}(D_{12} + D_{66})\psi_{,xy}] + \frac{h^3}{12} \varphi \\ = - \frac{h^2}{10} A_1 Z_{2,x} - (B_{11}A_{1,x} + B_{12}A_{2,x} + 2 B_{66}A_{3,y}) \\ D_{22}w_{,yy} + (D_{12} + 2 D_{66})w_{,xxy} \\ - \frac{h^2}{10} [a_{44}(D_{66}\psi_{,xx} + D_{22}\psi_{,yy}) \\ + a_{55}(D_{12} + D_{66})\varphi_{,xy}] + \frac{h^2}{12} \psi \\ = - \frac{h^2}{10} A_2 Z_{2,y} - (B_{12}A_{1,y} + B_{22}A_{2,y} + 2 B_{66}A_{3,x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

これらの式で  $\Gamma_i, A_i$  に関するものをすべて零とおけば Ambartsumyan の理論<sup>6)</sup>に帰着する。したがって、これらの両理論の間には偏微分方程式の非同次項に変化が生じていることが観察される。なお、具体的な適用順序については 4. の例題において示すことにする。

(3) 境界条件式

境界条件についてはここでは Ambartsumyan と同じものを用いる。ただし、Ambartsumyan の境界条件お

よび従来までの理論における境界条件（たとえば、日置<sup>22)</sup>参照）の対応関係についての考察検討および具体的な例題による数値的比較、ならびにここで行った修正理論を種々の境界条件を用いて計算した結果等については紙面の都合上、省略する<sup>23)</sup>。以下では、簡単のために板の端面が  $x=$ 一定となる境界面を通る場合について考える。応力そのもののレベルで考えると各境界条件に対して以下のようなになる<sup>6)</sup>。

(a) 自由端  
 $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0 \dots\dots\dots (35)$

(b) 単純支持端  
 $\left. \begin{aligned} \sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0, u_z = 0 \\ \text{あるいは} \\ \sigma_x = 0, u_y = 0, u_z = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$

(c) 固定端  
 $\left. \begin{aligned} u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0 \\ \text{あるいは} \\ u_x = 0, \tau_{xy} = 0, u_z = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$

ここでも、他の多くの平板理論と同様、応力そのもののレベルでこれらの条件を境界面上のすべての点で完全に満たすことは不可能であり、St. Venant の原理に基づいて‘条件をゆるめた (relaxed)’境界条件すなわち板厚にわたる合力、合モーメントとしての断面力および板厚方向の座標  $z$  の特定の値での変位に対して境界条件式を構成することによってのみ支配方程式の解を求めることが可能になる。すなわち式 (35)~(37) に代わって用いられる‘条件をゆるめた’境界条件はそれぞれ次のようになる<sup>6), 23)</sup>。

(a) 自由端  
 $\left. \begin{aligned} T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = 0, \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = 0 \\ S = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = 0, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz = 0 \\ N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$

(b) 単純支持端  
 $\left. \begin{aligned} T_x = 0, \quad M_x = 0 \\ S = 0, \quad M_{xy} = 0 \\ u_x|_{z=0} = w = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$

あるいは、 $u_y = 0$  が  $z = \pm z_0$  ( $0 \leq z_0 \leq h/2$ ) の線上だけで満足されるものとすれば、

$$\left. \begin{aligned} T_x = 0, \quad M_x = 0 \\ u_x|_{z=0} = w = 0 \\ v + a_{44}K_2^+(z_0)\phi + a_{45}K_1^+(z_0)\varphi \\ + \frac{z_0^2}{2h} (a_{45}X_2 + a_{44}Y_2) = 0 \\ -w_{,y} + \frac{a_{44}}{2z_0} K_2^-(z_0)\phi + \frac{a_{45}}{2z_0} K_1^-(z_0)\varphi \end{aligned} \right\}$$



$$+(a_{45}X_1+a_{44}Y_1)=0 \quad \dots\dots\dots(39)'$$

(c) 固定端

(b) の場合と同様、条件  $u_x=0, u_y=0$  を  $z=\pm z_0$  の線上だけで満足するものとして、

$$\left. \begin{aligned} u + \frac{z_0^2}{2h}(a_{55}X_2+a_{45}Y_2) + a_{55}K_1^+(z_0)\phi \\ + a_{45}K_2^+(z_0)\phi = 0 \\ v + \frac{z_0^2}{2h}(a_{45}X_2+a_{44}Y_2) + a_{45}K_1^+(z_0)\phi \\ + a_{44}K_2^+(z_0)\phi = 0 \\ -w_{,x} + \frac{a_{55}}{2z_0}K_1^-(z_0)\phi + \frac{a_{45}}{2z_0}K_2^-(z_0)\phi \\ + (a_{55}X_1+a_{45}Y_1) = 0 \\ -w_{,y} + \frac{a_{45}}{2z_0}K_1^-(z_0)\phi + \frac{a_{44}}{2z_0}K_2^-(z_0)\phi \\ + (a_{45}X_1+a_{44}Y_1) = 0 \\ u_z|_{z=0} = \tau w = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

または、

$$\left. \begin{aligned} u + \frac{z_0^2}{2h}(a_{55}X_2+a_{45}Y_2) + a_{55}K_1^+(z_0)\phi \\ + a_{45}K_2^+(z_0)\phi = 0 \\ -w_{,x} + \frac{a_{55}}{2z_0}K_1^-(z_0)\phi + \frac{a_{45}}{2z_0}K_2^-(z_0)\phi \\ + (a_{55}X_1+a_{45}Y_1) = 0 \\ S = 0, \quad M_{xy} = 0 \\ u_z|_{z=0} = \tau w = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)'$$

そのほかの、荷重または変位が与えられた場合の境界端(以下簡単のために荷重端または変位端と略記する)なども同様に表すことができる。

(4) 板厚方向に主軸を有する直交異方性板の場合の基礎式

近年、複合材料の急速な発展に伴って現実の材料として異方性板が工学的にも多用されるようになってきているが、その多くは直交異方性板とみなせるものであることを考慮して本論文では、これを中心に解析を進めてゆく。したがって、前項までに列記した基礎式を板厚方向に1つの異方性主軸があり残りの2つの主軸が互いに直交してしかも板面内にあるような場合に特殊化することによって、直交異方性の場合の基礎式が得られる。まず弾性定数は次式のようになる<sup>9)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} \\ B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad (\nu_2 \equiv \nu_{12}, \nu_1 \equiv \nu_{21}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{66} = \frac{1}{a_{66}} = G_{12}, \quad B_{55} = \frac{1}{a_{55}} = G_{13} \\ B_{44} = \frac{1}{a_{44}} = G_{23} \\ A_1 = -\frac{E_1}{E_3} \cdot \frac{\nu_{13} + \nu_{2\nu_{23}}}{1-\nu_1\nu_2}, \quad A_2 = \frac{E_2}{E_3} \cdot \frac{\nu_{23} + \nu_{2\nu_{13}}}{1-\nu_1\nu_2} \\ A_3 = 0 \\ B_{16} = B_{26} = B_{45} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

支配方程式については、式(34)に与えた式中の定数として式(41)を用いればよい。断面力については次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} T_x = C_{11}u_{,x} + C_{12}v_{,y} - hA_1Z_1 - (B_{11}\Gamma_1 + B_{12}\Gamma_2) \\ T_y = C_{12}u_{,x} + C_{22}v_{,y} - hA_2Z_1 - (B_{12}\Gamma_1 + B_{22}\Gamma_2) \\ S = C_{66}(u_{,y} + v_{,x}) - 2B_{66}\Gamma_3 \\ M_x = -D_{11}w_{,xx} - D_{12}w_{,yy} \\ + \frac{h^2}{10}(a_{55}D_{11}\phi_{,x} + a_{44}D_{12}\phi_{,y} - A_1Z_2) \\ - (B_{11}A_1 + B_{12}A_2) \\ M_y = -D_{12}w_{,xx} - D_{22}w_{,yy} \\ + \frac{h^2}{10}(a_{55}D_{12}\phi_{,x} + a_{44}D_{22}\phi_{,y} - A_2Z_2) \\ - (B_{12}A_1 + B_{22}A_2) \\ N_x = \frac{h^3}{12}\phi_{,x}, \quad N_y = \frac{h^3}{12}\phi_{,y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

面内応力については次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = B_{11}(u_{,x} - zw_{,xx}) + B_{12}(v_{,y} - zw_{,yy}) \\ - (B_{11}I_{,xx} + B_{12}I_{,yy}) \\ + J_0 \cdot (a_{55}B_{11}\phi_{,x} + a_{44}B_{12}\phi_{,y}) \\ - A_1 \left( Z_1 + \frac{12}{h^3} \cdot J_0 \cdot Z_2 \right) \\ \sigma_y = B_{22}(v_{,y} - zw_{,yy}) + B_{12}(u_{,x} - zw_{,xx}) \\ - (B_{12}I_{,xx} + B_{22}I_{,yy}) \\ + J_0 \cdot (a_{44}B_{22}\phi_{,y} + a_{55}B_{12}\phi_{,x}) \\ - A_2 \left( Z_1 + \frac{12}{h^3} \cdot J_0 \cdot Z_2 \right) \\ \tau_{xy} = B_{66}[u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} - 2I_{,xy} \\ + J_0 \cdot (a_{55}\phi_{,y} + a_{44}\phi_{,x})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

境界条件 ( $x=0$  の境界) もまた次のように簡単になる。

(a) 自由端

$$T_x = N_x = M_x = S = M_{xy} = 0 \dots\dots\dots(44)$$

(b) 単純支持端

$$T_x = M_x = S = M_{xy} = w = 0 \dots\dots\dots(45)$$

あるいは、

$$T_x = M_x = v = \phi = w = 0 \dots\dots\dots(45)'$$

(c) 固定端

$$u=v=\phi=w=0, \quad -w_{,x} + \frac{a_{55}}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots(46)$$

あるいは,

$$u=S=M_{x,y}=w=0, \quad -w_{,x} + \frac{a_{55}}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots(46)'$$

(d) 荷重端

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_x^*, \quad M_x = M_x^*, \quad N_x = N_x^* \\ S &= S^*, \quad M_{x,y} = M_{x,y}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

(e) 変位端

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(u^+ + u^-), \quad v = \frac{1}{2}(v^+ + v^-), \quad w = w^* \\ -w_{,x} + \frac{a_{55}}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \varphi &= \frac{1}{2z_0}(u^+ + u^-) \\ -w_{,y} + \frac{a_{44}}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \psi &= \frac{1}{2z_0}(v^+ + v^-) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

ここで  $T_x^*, M_x^*, \dots, M_{x,y}^*$  は考えている端面に作用する合応力, 合モーメントとしての断面力,  $w^*$  は端面で与えられた垂直変位であり,  $u^+, u^-, v^+, v^-$  は板厚方向  $z=z_0$  ( $0 \leq z_0 \leq h/2$ ) の線上において与えられた面内変位である。

### 4. 数値計算例

#### (1) 正弦関数荷重を受ける無限長平板の曲げ

この種の問題は, 任意荷重を受ける場合の荷重関数を Fourier 級数に展開して解析を実行する場合, あるいは高周波振動荷重を受ける場合等で遭遇するものであり, かつまた弾性学的厳密解<sup>21)</sup>が求められるのでそれとの比較のためにも有用なものである。

Fig. 4 のように無限長平板の上表面境界に次のような正弦関数で与えられる横方向荷重を受ける場合

$$Z^+ = 0, \quad Z^- = -q_0 \sin(\pi x/L)$$

を考える。

##### a) 第1次近似解

支配方程式は式 (34) より次のようになる。

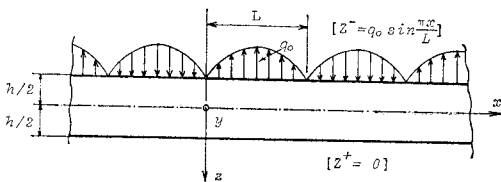


Fig. 4 Transverse loading of sinusoidal distribution applied at the upper surface of infinite plate.

$$\left. \begin{aligned} C_{11}u_{,xxx} &= \frac{1}{2}A_1h \cdot \frac{\pi}{L}q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ C_{66}v_{,xxx} &= 0 \\ \varphi_{,x} &= \frac{12}{h^3}q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \\ D_{11}w_{,xxx} - \frac{h^2}{10}a_{55}D_{11}\varphi_{,xx} + \frac{h^3}{12}\varphi &= 0 \\ &= \frac{h^2}{10L}\pi A_1q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ \phi_{,xx} - k^2\phi &= 0, \quad k^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{h}{a_{44}D_{66}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

これらをいま対象としている無限長平板ということ考慮して解き, 積分定数を定めると最終的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi C_{11}}A_1hLq_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ v &= 0 \\ \varphi &= -\frac{12}{h^3} \cdot \frac{L}{\pi}q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ \phi &= 0 \\ w &= -\frac{q_0}{D_{11}} \left( \frac{L}{\pi} \right)^4 \\ &\quad \cdot \left[ 1 + \frac{\pi^2}{10} \cdot \left( \frac{h}{L} \right)^2 (a_{55}B_{11} + A_1) \right] \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

等方性板の場合のたわみ  $w$  は次のように簡単になる。

$$w = -\frac{q_0}{D} \cdot \left( \frac{L}{\pi} \right)^4 \left[ 1 + \frac{\pi^2}{10} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \right] \sin \frac{\pi x}{L}$$

これは Reissner の示したせん断変形を考慮した平板理論の解<sup>2)</sup>とまったく同じ結果である。曲げ応力は式 (43) より次のようになる。

$$\sigma_x = -\left[ \left\{ \frac{12}{\pi^2} \left( \frac{L}{h} \right)^2 - \frac{3}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \right\} \left( \frac{z}{h} \right) + \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad \dots\dots\dots(51)$$

古典解, Reissner の解<sup>2)</sup>および Essenburg の解<sup>2)</sup>は,

$$\sigma_x = -\frac{12}{\pi^2} \cdot \left( \frac{L}{h} \right)^2 \cdot \frac{z}{h} \cdot q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

となっておりこれは式 (51) の第1項に等しいものである。

##### b) 第2次近似解

第1次近似解より,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \left[ \frac{A_1}{2B_{11}} - \frac{z}{D_{11}} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{40} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (4A_1 - a_{55}B_{11}) \right\} - 2a_{55} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \\ \epsilon_y &= 0 \\ \sigma_z &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{h}z + \frac{4}{h^3}z^3 \right) q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \right\}$$

ゆえに式 (7) より,

$$\epsilon_z = \left[ \left( \frac{A_1^2}{2B_{11}} - \frac{1}{2}N \right) - \left\{ \frac{A_1}{D_{11}} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left[ 1 + \frac{\pi^2}{40} \left( \frac{h}{L} \right)^2 (4A_1 - a_{55}B_{11}) \right] \right\} z \right. \\ \left. - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 (a_{55}A_1 + N) \right] q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

となる。したがって、式 (11) より  $W$  を求め式 (19), (30) を用いて諸パラメーターを決定し、それらの結果を式 (34) に代入すれば第2次近似の場合の支配方程式が最終的に次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} C_{11}u_{,xx} &= \left[ \frac{1}{2L} A_1 h \pi - \frac{\pi^3}{48} \left( \frac{h}{L} \right)^3 (A_1^2 - NB_{11}) \right] \\ &\quad \cdot q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ C_{66}v_{,xx} &= 0 \\ \varphi_{,x} &= \frac{12}{h^3} q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \\ D_{11}w_{,xxx} - \frac{h^2}{10} a_{55} D_{11} \varphi_{,xx} + \frac{h^3}{12} \varphi \\ &= \frac{1}{10} \left( \frac{\pi h^2}{L} \right) A_1 q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ &\quad - \frac{1}{40} \left( \frac{\pi h^2}{L} \right) \left[ A_1 \left\{ 1 + \frac{1}{40} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 (4A_1 - a_{55}B_{11}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 NB_{11} \right] \\ &\quad + \frac{1}{112} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 (a_{55}A_1 + N) B_{11} \Big] q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ \psi_{,xx} - k^2 \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

これらを境界条件を考慮して解くと最終的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_{11}u &= -\frac{h^2}{2} \left[ \left( \frac{L}{\pi h} \right) \cdot A_1 - \frac{1}{24} \left( \frac{\pi h}{L} \right) (A_1^2 - NB_{11}) \right] \\ &\quad \cdot q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \right\}$$

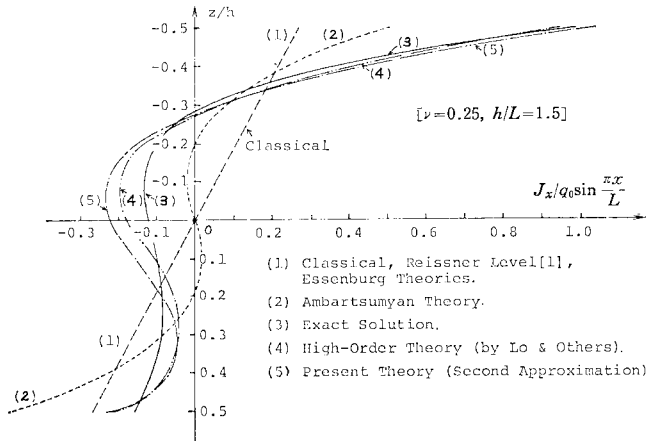


Fig. 5 Bending stress distributions of infinite, isotropic plate with  $\nu=0.25$ .

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \\ \varphi &= -\frac{12}{h^2} \cdot \frac{L}{\pi} q_0 \cos \frac{\pi x}{L} \\ \psi &= 0 \\ w &= -\frac{q_0}{D_{11}} \left( \frac{L}{\pi} \right)^4 \left[ 1 + \frac{1}{40} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 (4a_{55}B_{11} + 3A_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{40} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^4 \cdot \left( \frac{1}{10} A_1^2 - \frac{13}{112} NB_{11} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{560} A_1 a_{55} B_{11} \right] \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

等方性板の場合のたわみ  $w$  と曲げ応力  $\sigma_x$  はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{q_0}{D} \cdot \left( \frac{L}{\pi} \right)^4 \left[ 1 + \frac{1}{40} \cdot \frac{8-3\nu}{1-\nu} \cdot \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{(1-\nu)^2} \cdot \left( \frac{\pi h}{L} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \frac{\nu^2}{10} + \frac{13}{112} \cdot \frac{1-3\nu}{1-\nu} + \frac{9\nu}{560} \right) \right] \sin \frac{\pi x}{L} \\ \sigma_x &= \left[ \left\{ \frac{3}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} - 12 \left( \frac{L}{\pi h} \right)^2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \left( \frac{z}{h} \right)^3 + \frac{1}{48} \cdot \frac{\nu^2+2\nu-1}{1-\nu^2} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 12 \left\{ \frac{\nu}{40(1-\nu)} - \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{(1-\nu)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \frac{\nu^2}{10} + \frac{13}{112} \cdot \frac{1-3\nu}{1-\nu} + \frac{9\nu}{560} \right) \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 \right] \left( \frac{z}{h} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot \frac{\nu^2+2\nu-1}{1-\nu^2} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} - \frac{4\nu^3+6\nu^2-13\nu+5}{20(1-\nu)(1-\nu^2)} \right\} \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{10} \left\{ \frac{2\nu}{(1-\nu)^2} + \frac{1-3\nu}{(1-\nu)(1-\nu^2)} \right\} \\ &\quad \cdot \left( \frac{\pi h}{L} \right)^2 \left( \frac{z}{h} \right)^5 \Big] q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

この等方性板 ( $\nu=0.25$ ) に対する結果と各種理論による数値結果との関係を図示すれば Fig. 5~7 のようになる。まず Fig. 5 には  $h/L=1.5$  の場合の板の曲げ応力  $\sigma_x$  の分布を図示したものである (ここに  $L$  は波形荷重の半波長である)。図から、Reissner の理論は古典論となんら変わることなく Ambartsumyan の理論とともに板中央面に対して逆対称の分布となる。厳密解や Lo らの高次理論からわかるようにその分布は非対称であってしかも中央面では零とならないのが正しいが、Ambartsumyan 理論を改良した第2次近似解による結果は Lo らのもの

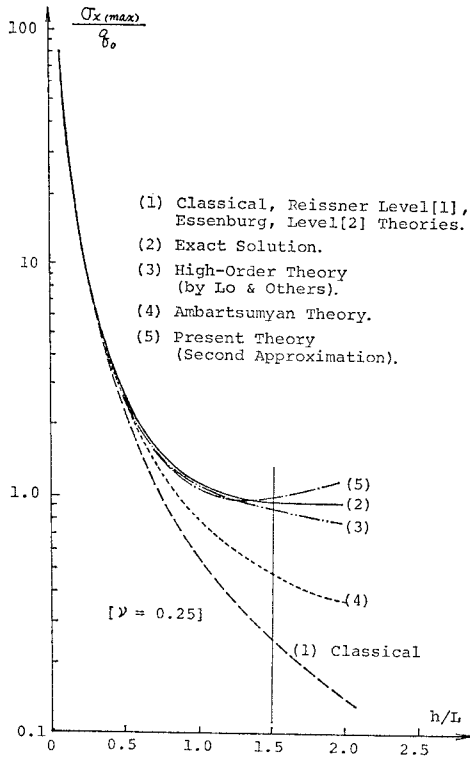


Fig. 6 Maximum bending stress distributions of infinite, isotropic plate with  $\nu=0.25$ .

よりもやや精度は落ちるもののその両特徴をよくとらえ Ambartsumyan の理論よりも飛躍的に改良された結果になっている。Fig. 6 には  $h/L$  を横軸にとって板面内で生じる最大曲げ応力  $\sigma_x(\max)$  が示されている。 $h/L$  が 0.5 以下ではどの方法でもほぼ同精度であるがそれ以上では著者ら、および Lo らの結果がきわめて精度よい結果を与えていることがわかる。次に  $h/L$  を横軸にとり各種の理論から得られた板厚中央面のたわみ  $w$  を古典論の変位  $\bar{w}_0$  に対する比 (displacement coefficient) として示したものが Fig. 7 である。ここに示したすべての方法において、厳密解との差は  $h/L$  が大きくなるにつれかなり大きくなるが  $h/L=1.5$  くらいまでは古典論を除いたどの方法でもそれほどの大差はない。Ambartsumyan の結果は Reissner のそれと一致し、 $h/L$  が大きくなるに従って無限大に発散してしまう傾向を有する。しかるに、厳密解からわかるように  $h/L=2.5$  あたりから減少しはじめるのが正しいが、著者らの方法は Ambartsumyan の理論に比べて大きく改良されている。しかしながら、それでも他の変位仮定の理論に比べて多少精度が落ちるのは本方法が応力仮定から出発していることに起因するものであり、ある程度やむを得ないと考えられる。しかし参考のために第 3 次近似までの計算を実施した結果 (図中の (5)' の線) は相当によい近

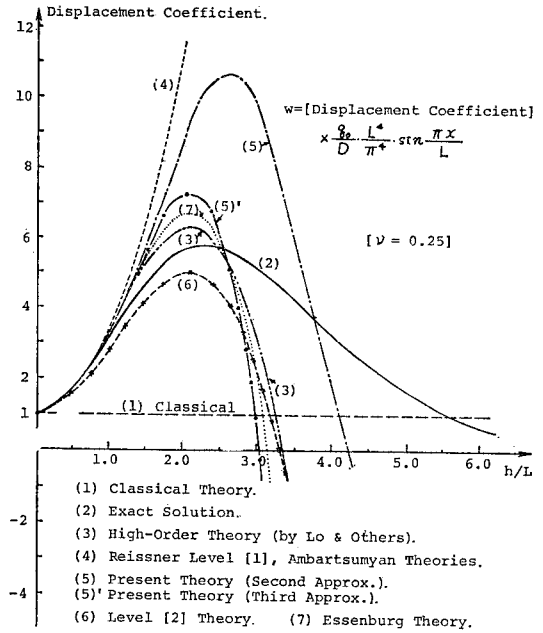


Fig. 7 Midplane displacement solutions of infinite, isotropic plate with  $\nu=0.25$ .

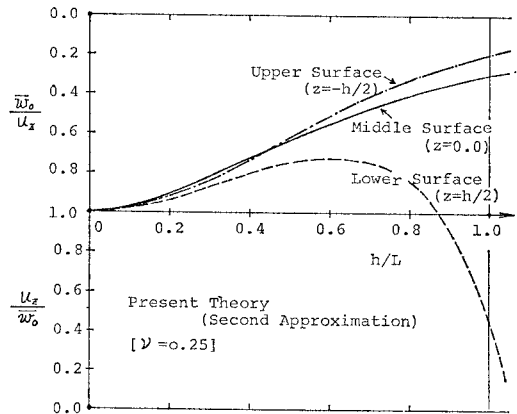


Fig. 8 Transverse displacement  $u_z$  at three typical planes of infinite, isotropic plate with  $\nu=0.25$ .

似となっていることが観察される。他方、古典論および Ambartsumyan の理論では評価することのできなかつた中央面以外の面外変位について本論では計算結果が得られるという利点がある。板上表面 (upper surface;  $z=-h/2$ )、中央面 (middle surface;  $z=0$ )、板下表面 (lower surface;  $z=h/2$ ) について、それを示したのが Fig. 8 であって、板厚が厚くなるに従って荷重の作用している上表面から離れた中央面や下表面は荷重による影響がしだいに小さくなり変位が小さくなってゆき、特に下表面ではこのことが顕著に現れている。この図で興味あることは上表面の結果 (upper surface line) と中央面のそれ (middle surface line) が  $h/L=0.4$  付近

で入れ換わっているところである。上表面の変位が最も大きくなるというのは感覚的にも推定し得ることであるが  $h/L$  が小さく古典論などの適用範囲 ( $h/L \leq 0.1$ ) 内では、中央面の変位が最も大きくなっている。この理由は板厚が薄い場合には荷重の直接の影響よりも曲げによる引張あるいは圧縮応力が変位に与える影響が大であることによるものであろう。ただし図で示された結果が実際問題の挙動とある程度、合致するのは  $h/L < 0.8$  程度の範囲であろうと考えられる。

(2) 正弦関数の面外荷重を受ける周辺単純支持の直交異方性長方形板

4 辺単純支持の長方形板 ( $a \times b$ , 厚さ:  $h$ ) に対して次のような面内荷重が作用した場合を考える<sup>24)</sup>。

$$Z^+ = 0, \quad Z^- = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \dots\dots\dots (55)$$

接線方向の荷重は作用していないものとする ( $X^\pm = 0, Y^\pm = 0$ )。

この問題の境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} x=0, a \text{ において } M_x = w = \psi = v = 0 \\ y=0, b \text{ において } M_y = w = \varphi = u = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

これらの境界条件を完全に満足するように支配方程式の解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} u = u_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad v = v_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ w = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \varphi = C_\varphi \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \psi = C_\psi \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

このようにして解いた結果の数値例が **Table 2** に示されている。ただし面内等方性の正方形板 ( $a=b$ ) で弾性定数を  $G/G' = 5.0, \nu = 0.25, \nu'' = 0.25$  とした場合の結果である。 $E'$  および  $G'$  はそれぞれ板厚方向に関する縦弾性係数およびせん断弾性係数である。すなわち **Table 2** は板中央面の中心点でのたわみ ( $w$ ) の古典論

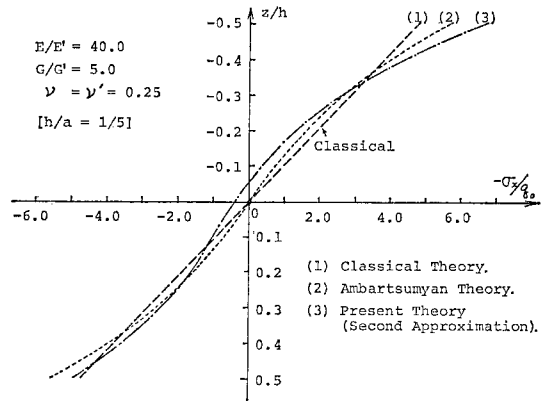


Fig. 9 Bending stress distributions of transversely isotropic square plate with all simply supported edges.

のそれ ( $w_0$ ) に対する比を、板の面内方向と面外方向との代表的な縦弾性係数比 ( $E/E'$ ) をパラメーターとして 0~40 まで変化させた場合について示したものである。Ambartsumyan 理論における結果<sup>24)</sup>は  $E_z$  (ここでは  $E'$ ) には依存せず、しかも、 $E_z$  が無限大である場合のものに相当するが、本論文の方法ではもちろん  $E_z$  の値に依存し、その効果を考慮していることになっていることが示されている。また同表中に、代表的な  $E/E'$  の値に対して最大曲げ応力  $\sigma_{x(\max)}$  変化の様子が示されている。さらに **Fig. 9** は、 $E/E' = 40, h/a = 1/5$  の場合の曲げ応力  $\sigma_x$  の板厚方向にわたる分布を図示したものである。ここでも古典解ならびに Ambartsumyan 理論によって得られる逆対称分布形とは異なり、やはり非対称な分布形となることが認められる。

5. 結 言

平板における厚さ方向成分 (面外方向せん断応力、板厚方向の直応力、直ひずみ) をすべて考慮に入れたこの拡張理論は、厚さ方向の変化に対してはある程度、精度よく解が求まることが前節までの考察から結論できよ

Table 2 Central midplane deflections and maximum bending stresses of transversely isotropic square plate with all simply supported edges under the sinusoidal loading of eq. (55).

$h/a$	$E/E'$	central deflection $w$ of plate at middle surface [ $\times w_0$ ]		maximum bending stress $\sigma_{x(\max)}$ [ $\times \sigma_{x^0(\max)}$ ]	
		Ambartsumyan's theory	Authors' theory (Second Approx.)	Ambartsumyan's theory	Authors' theory (Second Approx.)
1/10	0.0	1.257	1.257	1.049	1.049
	1.0	1.257	1.258	1.049	1.048
	10.0	1.257	1.257	1.049	1.052
	40.0	1.257	1.254	1.049	1.063
1/5	0.0	2.026	2.026	1.198	1.198
	1.0	2.026	2.026	1.198	1.198
	10.0	2.026	2.012	1.198	1.251
	40.0	2.026	1.955	1.198	1.425

う。したがって平板に作用する外力系が単調でなく波長の短い波形荷重のような変化の激しい場合、板厚が厚い場合、板面内の微小クラックを含めた切欠き、切込みのある場合、さらに荷重を受けた孔を有する板の場合等については当然のことながら板厚方向の直ひずみは無視できなくなり、これを考慮に入れた本理論は  $L_0$  の変位仮定から出発した高次理論と同様にある程度正確な挙動予想を与えるものと思われる。ただ注意しなければならないのは、本論文も他の多くの2次元化した平板理論と同様に St. Venant の原理に立脚点を置いているということである。すなわち本論文における境界条件、さらにはせん断応力の放物線分布の仮定等は、この原理に依拠しており従って境界からある程度離れたところでのみ十分に正しいといえるにすぎないものである。そのことは、特に異方性板を対象とした場合、St. Venant 原理の適用限界が等方性板に比較してかなり厳しい条件となることが指摘されている<sup>25), 26)</sup> ことから考えても、3次元弾性論の基礎式を厳密に考慮した平板理論もここで述べたような2次元化平板理論の展開とともに今後の重要な研究課題といえよう。

以上、本論文では変位仮定理論と対極をなす応力仮定理論について、従来提案されているものの改良修正を主たる目的として述べ、その2, 3の特徴について明らかにすることができたが、必ずしもここに述べた手法が最良ということではなく、より高いレベルでのいくつかの精度上の欠点と今後の改良にゆだねるべき点が含まれている。しかしながら、少なくとも現在までに提案されている弾性平板の2次元化理論を概括するとともに、1つの新たな考え方を提出することができたものと考えている。

#### 参 考 文 献

- 1) Naghdi, P.M. : The Theory of Shells and Plates, Handbuch der Physik (Ed. by C. Truesdell), Springer, pp. 425~640, 1972; Donnell, L.H. : Beams, Plates, and Shells, McGraw-Hill, pp. 159~304, 1976.
- 2) Reissner, E. : On the Theory of Bending of Elastic Plates, Jour. Math. Phys., Vol. 23, pp. 184~191, 1944; The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, Jour. Appl. Mech., A-69~77, 1945; Green, A.E. : On Reissner's Theory of Bending of Elastic Plates, Quart. Appl. Math., Vol. 7, pp. 223~228, 1949; Green, A.E. and W. Zerna : Theoretical Elasticity, Oxford, pp. 222~227, 1968.
- 3) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A High Order Theory of Plate Deformation-I. Homogeneous Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663~668, 1977.
- 4) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A High Order Theory of Plate Deformation-II. Laminated Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 669~676, 1977.
- 5) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : Stress Solution Determination for High Order Plate Theory, Int. J. Solids and Structures, Vol. 14, pp. 655~662, 1978.
- 6) アムバルツミヤン著(神谷紀生訳) : 異方弾性板の理論, 森北出版, pp. 1~173, 1975.
- 7) Midlin, R.D. : Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31~38, 1951.
- 8) Naghdi, P.M. : On the Theory of Thin Elastic Shells, Quart. Appl. Math., Vol. 14, pp. 369~380, 1957.
- 9) Essenburg, F. : On the Significance of the Inclusion of the Effect of Transverse Normal Strain in Problems Involving Beams with Surface Constraints, Jour. Appl. Mech., Vol. 42, pp. 127~132, 1975.
- 10) Whitney, J.M. and C.T. Sun : A Refined Theory for Laminated Anisotropic, Cylindrical Shells, Jour. Appl. Mech., Vol. 41, pp. 471~476, 1974.
- 11) Nelson, R.B. and D.R. Lorch : A Refined Theory of Laminated Orthotropic Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 41, pp. 177~183, 1974.
- 12) Schmidt, R. : A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation, Jour. Industrial Math. Soc., Vol. 27, pp. 23~38, 1977.
- 13) Reissner, E. : On Transverse Bending of Plates Including the Effects of Transverse Shear Deformation, Int. J. Solids and Structures, Vol. 15, pp. 569~573, 1975.
- 14) Chu, H.N. and G. Herrmann : Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 23, pp. 532~540, 1956.
- 15) Berger, H.M. : A New Approach to the Analysis of Large Deflection of Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 22, pp. 465~472, 1955.
- 16) Whitney, J.M. and A.W. Leissa : Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 261~266, 1966. Orthotropic Plates, Int. J. Solids and Structures, Vol. 9, pp. 1133~1139, 1973.
- 17) Wu, C.I. and J.R. Vinson : On the Nonlinear Oscillations of Plates Composed of Composite Materials, Jour. Comp. Mat., Vol. 3, pp. 548~561, 1969.
- 18) Wu, C.I. and J.R. Vinson : Influences of Large Amplitudes, Transverse Shear Deformation, and Rotatory Inertia on Lateral Vibrations of Transversely Isotropic Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 36, pp. 254~260, 1969.
- 19) Stoker, J.J. : Nonlinear Elasticity, Gordon and Breach, pp. 41~69, 1968.
- 20) Dickey, R.W. : Nonlinear Bending of Circular Plates, SIAM J. Appl. Math., Vol. 30, pp. 1~9, 1976.
- 21) Little, R.W. : Elasticity, Prentice-Hall, pp. 109~112, 1973.
- 22) 日置興一郎 : 構造力学II, 朝倉書店, pp. 56~121, 1977.
- 23) 村松正重 : 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, 山梨大学工学部卒業論文, pp. 66~96, 1979.
- 24) 前出 6), pp. 92~100.
- 25) Choi, I. and C.O. Horgan : Saint-Venant's Principle and End Effects in Anisotropic Elasticity, Jour. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 424~430, 1977.
- 26) Nair, S. : Effect of Stress-Free Edges in Plane Shear of a Rectangular Orthotropic Region, Jour. Appl. Mech., Vol. 45, pp. 307~312, 1978.