

# NÄHERUNGSBERECHNUNG PUNKTGESTÜTZTER RECHTECKPLATTEN UNTER GLEICHLAST MIT DEM RANDKOLLOKATIONSVERFAHREN\*

von Fumio FUJII\*\* und Yoshiro KOBAYASHI\*\*\*

## ZUSAMMENFASSUNG

Dieser Bericht stellt einen Lösungsweg zur Näherungsberechnung punktgestützter Rechteckplatten unter Gleichlast mit Hilfe des Randkollokationsverfahrens dar, das die Plattendifferentialgleichung exakt, aber die Auflagerbedingungen nur näherungsweise erfüllt. Es wird gezeigt, daß man dieses Berechnungsverfahren bei den Plattenaufgaben sehr einfach anwenden und mit einem geringen Rechenaufwand brauchbare Ergebnisse erhalten kann. Beispielrechnungen wurden durchgeführt.

## 1. PUNKTGESTÜTZTE PLATTEN

Im Hoch- und Brückenbau werden oft weitgespannte Platten im Feldbereich punktgestützt verwendet, um damit die großen Biegemomente und die großen Durchbiegungen vermeiden zu können. Flachdeckensysteme und Plattenbrücken mit Stützsäulen sind Beispiele dafür. Die bisher im Schrifttum behandelten punktgestützten Platten sind jedoch gering<sup>(1), (3), (4), (7), (8), (11)</sup>, und die praktischen Berechnungstabellen liegen auch nicht viel vor<sup>(1), (8)</sup>.

Eine umfangreiche Parameteruntersuchung z.B. für die verschiedenen Auflagerbedingungen ist deswegen erforderlich. Im vorliegenden Bericht werden punktgestützte Rechteckplatten unter Gleichlast mit dem Randkollokationsverfahren berechnet, und die Rechenergebnisse mit den bisherigen Lösungen verglichen. Es wird die leichte Anwendbarkeit dieses Berechnungsverfahrens bei den Plattenaufgaben gezeigt. Die berechneten Platten sind in Bild 1 zusammengestellt.

## 2. PLATTENTHEORIE

Die Plattenaufgabe im vorliegenden Fall reduziert sich auf eine Randwertaufgabe, in der man die

\* Entstand als Diplomarbeit des zweiten Verfassers am Institut für Statik der Univ. Nagoya, Japan.

\*\* Dr.-Ing. Univ. Nagoya.

\*\*\* Dipl.-Ing. Land Nagano.

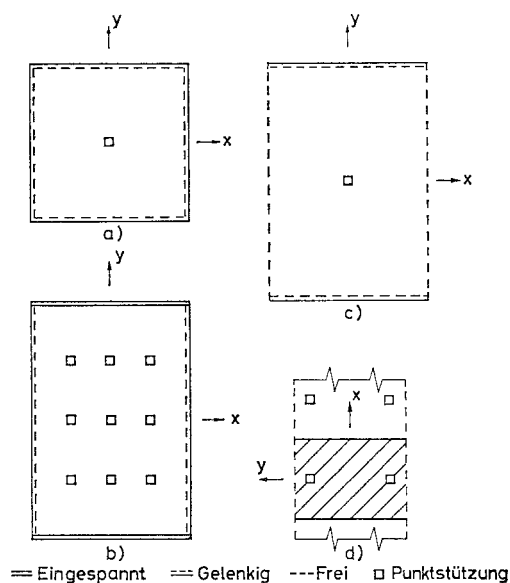


Bild 1 Berechnete Beispiele.

Differentialgleichung

$$\Delta \Delta W = q/D \dots \dots \dots (1)$$

mit  $q$ : konstante Flächenlast

$D$ : Plattensteifigkeit

bei den vorgegebenen Randbedingungen

$$LW = f \dots \dots \dots (2)$$

mit  $L$ : Differentialoperator

$f$ : Randbelastung

zu lösen hat.

Da sich für dieses Plattenproblem nicht immer eine exakte Lösung finden läßt, muß man sich in meisten Fällen mit einer Näherungslösung befriedigen. In der numerischen Plattenstatik bieten sich hierfür verschiedene Näherungsverfahren an.

## 3. RANDKOLLOKATIONSVERFAHREN

### (1) Allgemeine Vorgehensweise

Das Randkollokationsverfahren (Boundary Collo-

cation Method) ist auch eine solche numerische Berechnungsmethode, die die Plattengleichung (1) exakt, aber die Randbedingungen (2) nur näherungsweise erfüllt<sup>6)</sup>.

Für die Plattendurchbiegung wird beim Randkollokationsverfahren der Ansatz

$$W = W_q + \sum_{n=1,2,3}^N C_n W_n \dots\dots\dots(3)$$

gemacht, der sich aus einer Partikularlösung  $W_q$  und den  $N$  mit den Freiwerten  $C_n$  versehenen homogenen Lösungen  $W_n$  von (1) zusammensetzt.

Weil

$$\Delta\Delta W_q = q/D \dots\dots\dots(4)$$

und

$$\Delta\Delta W_n = 0 \quad \text{für } n=1, 2, 3, \dots, N \dots\dots\dots(5)$$

so wird die Grunddifferentialgleichung (1) identisch erfüllt. Da die angesetzte Biegefunktion (3) keine strenge Lösung ist, lassen sich die Randbedingungen (2) nicht mehr exakt, sondern nur näherungsweise erfüllen. Der einfachste Weg zu dieser näherungsweise Erfüllung der vorgeschriebenen Randbedingungen ist, (2) nur an den gewählten Punkten (Kollokationspunkte) punktweise exakt einzuarbeiten:

$$LW(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) \dots\dots\dots(6)$$

wobei  $(x_i, y_i)$ ; Koordinaten des Kollokationspunktes  $i$ . Stellt man diese Bedingungsgleichung durch Einsetzen von (3) in (6) an  $N$  Kollokationspunkten ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) auf, so ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für die  $N$  Ansatzparameter  $C_n$  in Matrixschreibweise.

$$HX = F - Q \dots\dots\dots(7)$$

mit

$$H_{in} = LW_n(x_i, y_i) \dots\dots\dots(8)$$

$$X_i = C_i \dots\dots\dots(9)$$

$$F_i = f(x_i, y_i) \dots\dots\dots(10)$$

$$Q_i = LW_q(x_i, y_i) \dots\dots\dots(11)$$

(Zeilen  $i=1, 2, 3, \dots, N$ )

(Spalten  $n=1, 2, 3, \dots, N$ )

Im Unterschied zur Steifigkeitsmatrix in der Matrizenstatik ist die Matrix  $H$  nicht symmetrisch und vollbelegt. Die von den gewählten Ansatzfunktionen  $W_n$  abhängigen Matrixkoeffizienten in  $H$  werden für die einzelnen Kollokationspunkte zeilenweise bestimmt.  $X$  ist der Lösungsvektor, der die unbekannt Parameter  $C_n$  zusammenfaßt. Auf der rechten Seite des Gleichungssystems (7) gelten die zwei Vektoren  $F$  und  $Q$  als Lastspalte.  $F$  ist von der vorgegebenen Randbelastung abhängig und bei den homogenen Randbedingungen Null.  $Q$  stellt die konstante Flächenlast  $q$  dar.

Wird das Gleichungssystem (7) nach den Freiwerten  $X_i = C_i$  aufgelöst, so kann man die Biegefunktion (3) sowie durch Differentiation die Schnittgrößen

bestimmen.

(2) **Verwendete Ansatzfunktionen**

Als Partikularlösung wird hier für die nachstehenden Beispielrechnungen

$$W_q = \frac{qr^4}{64D} \dots\dots\dots(12)$$

gewählt, wobei  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  den Abstand des betrachteten Punktes  $(x, y)$  vom Koordinatenursprung bedeutet (Bild 2 (a)).

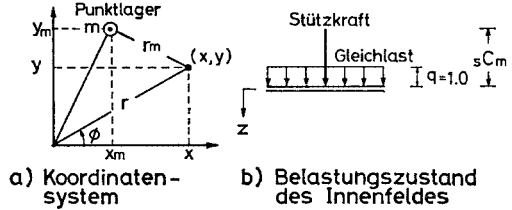


Bild 2 Koordinatensystem und Innenfeld.

Die beim Randkollokationsverfahren meist verwendeten homogenen Lösungen sind die folgenden biharmonischen Funktionen im Polarkoordinatensystem (s.z.B. <sup>4),9)</sup>.

$${}_1W_j = r^j \cos j\phi \dots\dots\dots(13)$$

$${}_2W_j = r^{j+2} \cos j\phi \quad (j=0, 1, 2, 3, \dots) \dots\dots(14)$$

$${}_3W_k = r^k \sin k\phi \dots\dots\dots(15)$$

$${}_4W_k = r^{k+2} \sin k\phi \quad (k=1, 2, 3, \dots) \dots\dots(16)$$

mit  $\phi = \tan^{-1}(y/x)$  (Bild 2 (a)).

Es gelten für  ${}_1W_j, {}_2W_j, {}_3W_k$  und  ${}_4W_k$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Delta {}_1W_j &= 0 \\ \Delta\Delta {}_2W_j &= 0 \\ \Delta\Delta {}_3W_k &= 0 \\ \Delta\Delta {}_4W_k &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

Zur Darstellung der Punktstützung ist noch die Einführung einer singulären Lösung erforderlich. Verwendet wird hier die Funktion

$${}_sW_m = \frac{1}{8\pi D} r_m^2 \ln(r_m/r_0) \dots\dots\dots(18)$$

In dieser singulären Lösung ist mit  $r_m = \{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2\}^{1/2}$  der Abstand des betrachteten Punktes  $(x, y)$  von der Punktstützung  $m(x_m, y_m)$  bezeichnet (Bild 2 (a)), und mit  $r_0$  die Längeneinheit. Für  $r_m \neq 0$  gilt wie (17)

$$\Delta\Delta {}_sW_m = 0 \dots\dots\dots(19)$$

Durch (18) ist die Einflußfläche für die Durchbiegung einer unendlich ausgedehnten Platte unter Einzellast 1.0 darstellbar.

Weil bei den punktgestützten Platten die Stützkraften noch unbekannt sind (Bild 2 (b)), müssen diese statisch überzähligen Kraftgrößen als Ansatzparameter  ${}_sC_m$  in (3) mitgenommen werden. Bei  $M$  Stützpunkten schreibt sich der Ansatz (3) daher

allgemein

$$W = W_q + \sum_{m=1,2,3}^m s C_m s W_m + \sum_{j=0,1,2}^J ({}_1 C_{j1} W_j + {}_2 C_{j2} W_j) + \sum_{k=1,2,3}^K ({}_3 C_{k3} W_k + {}_4 C_{k4} W_k) \dots\dots\dots(20)$$

und

$$N = M + 2J + 2K + 2 \dots\dots\dots(21)$$

Die erste Summation erstreckt sich über alle *M* Stützpunkte.

Wenn z.B. bei der Platten in **Bild 1** (a) die Symmetriebedingungen der Biegefläche

$$\partial W / \partial \phi = 0 \quad \text{für } \phi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \dots \dots\dots(22)$$

berücksichtigt werden müssen, dann entfallen die Terme

$${}_3 C_{k3} W_k \quad \text{und} \quad {}_4 C_{k4} W_k$$

und bleiben nur die folgenden Ansatzfunktionen.

$$W = W_q + \sum_{m=1,2,3}^M s C_m s W_m + \sum_{j=0,1,2,3}^J ({}_1 C_{j1} W_{4j} + {}_2 C_{j2} W_{4j}) \dots\dots\dots(23)$$

wobei

$$N = M + 2J + 2 \dots\dots\dots(24)$$

$$4j = 0, 4, 8, 12, \dots \dots\dots(25)$$

Für den homogenen Anteil wird in diesem Fall nur die Randlinie eines Achtels der quadratischen Plattenfläche betrachtet. Für die Punktstützungen müssen aber bei den allen vorhandenen Säulenstandpunkten (*M*=1 beim Beispiel in **Bild 1** (a)) Kollokationspunkte angeordnet werden, weil der Singularanteil (18) die symmetrische Biegefläche nicht darstellen kann.

Bei den anderen Platten in **Bildern 1** (b) bis (d) verwendet man in gleicher Weise wegen der Doppelsymmetrie

$$W = W_q + \sum_{m=1,2,3}^M s C_m s W_m + \sum_{j=0,1,2}^J ({}_1 C_{2j1} W_{2j} + {}_2 C_{2j2} W_{2j}) \dots\dots\dots(26)$$

mit

$$N = M + 2J + 2 \dots\dots\dots(27)$$

$$2j = 0, 2, 4, 6, \dots \dots\dots(28)$$

Wird die Biegefläche aus (7) und (23)/(26) bestimmt, so können die Neigungswinkel und die Schnittkräfte durch entsprechende Ableitungen ermittelt werden.

**(3) Ergebniskontrolle**

Die Ergebniskontrolle beim Randkollokationsverfahren erfolgt dadurch, nur längs der Randlinien die berechneten Randgrößen zu überprüfen, denn im Innenfeld sind alle Tragwerksbedingungen wegen (1)

schon identisch erfüllt. Bei den Kollokationspunkten gilt (2) exakt, so daß insbesondere zwischen den Kollokationspunkten die Abweichung der Randgrößen *LW(x, y)* vom Sollwert *f(x, y)*

$$LW - f^{\text{soll}} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

zu beachten ist. Entstehen nur die vernachlässigbar kleinen Randfehler, so sind die Ergebnisse zuverlässig.

**(4) Einige Hinweise**

Das Randkollokationsverfahren besitzt in der Berechnungspraxis die forgenden Vor- und Nachteile, wie bereits in der Literatur wiederholt mitgeteilt.

Wie bisher beschrieben wurde, ist die Vorgehensweise des Berechnungsverfahrens sehr einfach und leicht verständlich. Zum Unterschied von der Variationsrechnung sind keine Minimalbedingung und keine Integralrechnung notwendig. Der Rechenvorgang ist demzufolge leicht proqrammierbar. Die Eingabedaten in der elektronischen Berechnung sind nur die Koordinaten (*x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>*) der Kollokationsstellen und die Art der Randbedingungen (Zuweisung des Differentialoperators *L*).

Eine Testrechnung an einer allseitig starr eingespannten Quadratplatte zeigt, daß man schon mit 4 Unbekannten für ein Achtel der Plattenfläche eine brauchbare Lösung erhält. Der Rechenaufwand bleibt allgemein sehr gering. Die Plattenberechnung ist daher mit dem Randkollokationsverfahren selbst auf einem Kleincomputer in beschränktem Umfang durchführbar.

Der Nachteil des Verfahrens ist jedoch, daß eine Verdichtung der Kollokationspunkte nicht zur Genauigkeitssteigerung, sondern zum starken Oszillieren der Biegefläche führt. Eine theoretische Untersuchung für dieses Problem liegt nicht vor, und keine allgemein gültigen Aussagen über das numerische Verhalten können auch gemacht werden.

Der denkbare Grund für die starke Oszillation der Biegefläche besteht darin, daß die Ansatzfunktionen in (12)~(16) und (18) für die Durchbiegungen nicht lokal begrenzt, sondern sich auf den ganzen Plattenbereich beziehen. Da man jedoch die diskreten biharmonischen Grundfunktionen für den Ansatz sehr schwer finden kann, so muß man sich im Randkollokationsverfahren mit dem nichtdiskretisierten Ansatz (20) begnügen.

Die Einzelheiten der Näherungsmethode können deswegen erst aufgrund praktischer numerischer Erfahrungen speziell erklärt werden. Sind beispielsweise wie in<sup>2)</sup> behandelte sprunghaft veränderliche Randbedingungen einzuhalten, so ergeben sich wegen des starken Oszillierens keine sinnvollen Werte mehr. Bei den gleichartigen Auflagerbedingungen um den Plattenbereich kann man dagegen schon mit einem geringen Rechenaufwand eine gute Genauigkeit erzielen.

A. W. Leissa<sup>4)</sup> stellt durch einen Vergleich der verschiedenen Näherungsverfahren für die Plattenberechnung fest, daß sich das Randkollokationsverfahren hinsichtlich des Rechenaufwandes und der Genauigkeit für den praktischen Gebrauch einfach behandeln läßt. Beim Randkollokationsverfahren ist außerdem mit (18) die Lastsingularität (Punktstützung) leicht darstellbar, so daß sich das numerische Verfahren besonders zur Berechnung punktgestützter Platten als geeignet erweist.

Im folgenden werden numerische Beispiele stets mit  $q=1.0$ ,  $\nu=0.0$  und  $D=1.0$  berechnet. Das erwähnte Problem des Randkollokationsverfahrens trat bei den berechneten Beispielen nicht auf.

#### 4. BEISPIELE

##### (1) Gelenkig gelagerte Quadratplatte mit einer Säule

An einer allseitig frei drehbar gelagerten Quadratplatte mit einer Säule in Plattenmitte (Bild 3) soll zuerst das Konvergenzverhalten des Randkollokationsverfahrens gezeigt, indem man die Kollokationspunkte schrittweise vermehrt. In Bild 4 sind die verschiedenen Anordnungen der Kollokationspunkte dargestellt. Auf dem Rande eines Achtels der Plattenfläche sind die Kollokationspunkte äquidistant verteilt. Die Mitnahme der Stelle der Säulenstützung als Kollokationspunkt gewährleistet die Auflagerbedingung  $W=0$  in Plattenmitte. Bei der Verdichtung der Kollokationspunkte beträgt die Anzahl der Unbekannten jeweils  $N=5$  (Bild 4 (a)),  $N=7$  (Bild 4 (b)) und  $N=11$  (Bild 4 (c)).

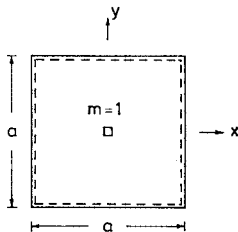
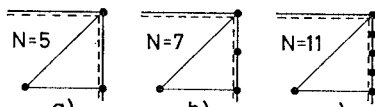


Bild 3 Frei drehbar gelagerte Quadratplatte mit einer Säule in Plattenmitte.



N Anzahl der Ansatzparameter  
• Kollokationspunkt

Bild 4 Verdichtung der Kollokationspunkte.

Die berechneten Durchbiegungen  $W$  und die Biegemomente  $M_x$  längs der  $x$ -Achse sind in Bild 5

aufgetragen. Die deckungsgleichen Kurvenzüge lassen erkennen, daß sich schon bei der Anordnung der Kollokationspunkte in Bild 4 (a) die Werte in endgültiger Größe ergeben. Eine weitere Verfeinerung der Punktverteilung am Plattenrand wie in Bild 4 (b) und Bild 4 (c) hat beim numerischen Mehraufwand keinen Einfluß auf die Ergebnisse mehr. Die Biegemomente sind theoretisch in Plattenmitte ( $r_m=0$ ) wegen der Lastsingularität unendlich groß.

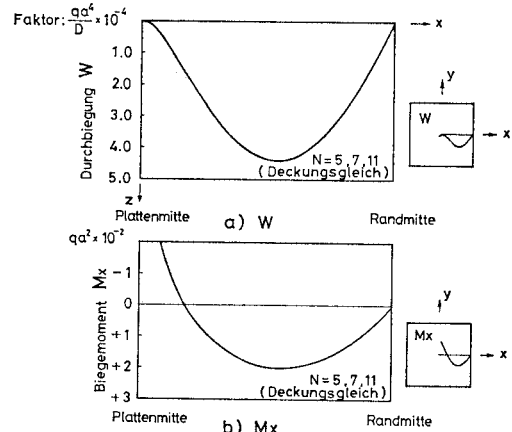


Bild 5 Einfluß der Anordnung der Kollokationspunkte auf  $W$ - und  $M_x$ -Verläufe.

Für den Stützenbereich zu bemerken ist, daß die vorhandene Berechnung eine Stütze unendlich kleiner Querschnittsfläche voraussetzt und der berechnete Momentenzustand daher besonders im Nahbereich der Stütze bei einer endlichen Fläche ungenau ist. Im von der Stütze entfernten Querschnitt sind jedoch die berechneten Momentenwerte ausreichend genau. Eine endliche Stützenfläche kann näherungsweise als eine Zusammensetzung mehrerer Punktstützen simuliert werden.

Die Stützkraft in Plattenmitte ist nach Bareš<sup>1)</sup>

$$sC_1 = -0.352qa^2$$

bei  $N=5$

$$sC_1 = -0.347qa^2$$

(Fehler 1.4%)

bei  $N=7$

$$sC_1 = -0.350qa^2$$

(Fehler 0.57%)

bei  $N=11$

$$sC_1 = -0.350qa^2$$

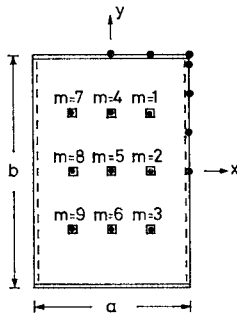
(Fehler 0.57%)

(s. Vorzeichen in Bild 2 (b))

Hierbei sieht man eine gute Übereinstimmung mit der Vergleichslösung<sup>1)</sup>.

(2) Rechteckplatte mit neun Säulen in<sup>8)</sup>

Im Tabellenwerk von Pfaffinger/Thürlimann<sup>8)</sup> sind eine Reihe von punktgestützten Rechteckplatten mit Hilfe von Einfachreihenlösungen berechnet und die Plattenmomente vertafelt. Diesen gebräuchlichen Berechnungstabellen wird das in Bild 6 dargestellte Plattenbeispiel entnommen, dessen Rechenergebnisse mit den Werten in<sup>8)</sup> verglichen werden. Die Kollokationspunkte sind auch in Bild 6 gezeigt. Um die unterschiedlichen Auflagerbedingungen (eingespannt und frei drehbar gelagert) besser darstellen zu können, ist im Eckbereich eine Verdichtung der Kollokationsstellen vorgenommen. Die Anzahl der entsprechenden Ansatzparameter ist  $N=23$  für das gewählte Beispiel.



- Kollokationspunkt
- Säule
- $a/b = 2/3 \quad N = 23$

Bild 6 Rechteckplatte (Gelenkig-Eingespannt) aus<sup>8)</sup>.

In Bild 7 sind die berechneten Biegemomente mit<sup>8)</sup> (s. Seiten 214-215 in<sup>8)</sup>) verglichen. Die gestrichelten Linien verbinden nur die in<sup>8)</sup> angegebenen Momentenwerte in den Viertelpunkten der Feldweite linear miteinander. Die berechneten Verläufe stimmen recht gut mit<sup>8)</sup> überein.

Die Auflagerkräfte  $sC_m$  an den Säulenstandpunkten sind wie folgt gegenübergestellt:

Randkollokationsverfahren Pfaffinger/Thürlimann<sup>8)</sup>

$sC_1 = sC_3 = sC_7 = sC_9 =$	-1.6263	-1.6250
	(0.08%)	
$sC_4 = sC_6 =$	-1.4612	-1.4657
	(0.3%)	
$sC_2 = sC_8 =$	-1.6562	-1.6605
	(0.26%)	
$sC_5 =$	-1.4846	-1.4808
	(0.26%)	

Faktor:  $qA^2$  und  $A = a/4$  ( $U = 0.08A$  in<sup>8)</sup>)

(Numerierung der Säulen s. Bild 6)

Hieraus geht auch hervor, daß sich die Stützkkräfte mit dem Randkollokationsverfahren zufriedenstellend genau ermitteln lassen.

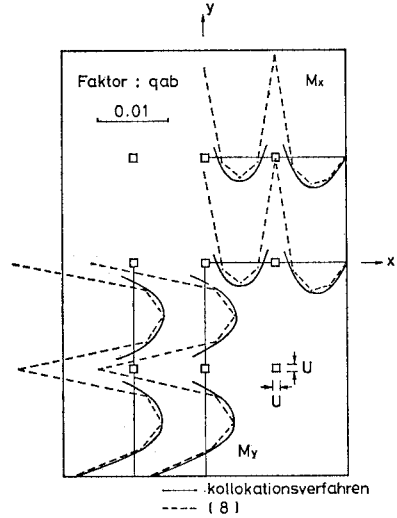


Bild 7 Momentenzustand (Vergleich mit<sup>8)</sup>).

(3) Vergleich mit<sup>3)</sup> von A. Stamm

A. Stamm berechnet in<sup>3)</sup> mit dem einfachen Differenzenverfahren eine zweiseitig frei drehbar gelagerte Rechteckplatte mit zwei gegenüberliegenden freien Rändern und mit einer Säule in Plattenmitte. Das Plattensystem ist in Bild 8 mit den Kollokationspunkten ( $N=25$ ) skizziert.

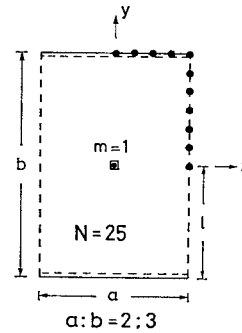
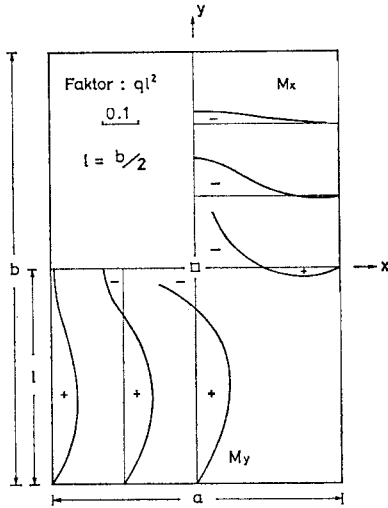


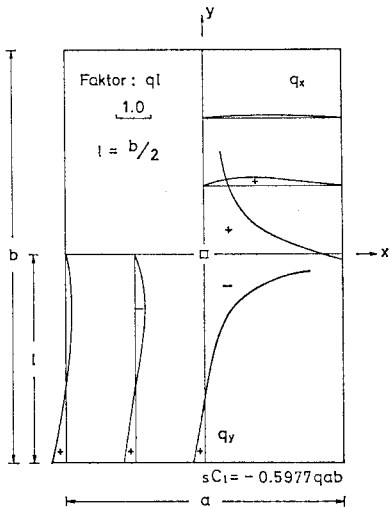
Bild 8 Rechteckplatte in<sup>3)</sup>.

Die berechneten Schnittkräfte sind in Bild 9 und Bild 10 aufgezeichnet und zeigen gute Übereinstimmung mit den in<sup>3)</sup> mitgeteilten Ergebnissen. Während A. Stamm bei einer Gitterteilung  $8 \times 12$  für ein Viertel der Platte ein Gleichungssystem mit 108 Unbekannten lösen muß, ergibt sich hier ein viel kleineres Gleichungssystem mit  $N=25$ . Es zeigt sich im Momentenbild, daß die Biegemomente  $M_y$  in einer Entfernung von der Säule in Querrichtung ( $x$ -Richtung) beinahe konstant verlaufen und sich nach der Balkentheorie mit guter Näherung ermitteln lassen. Bei der Betrachtung von  $M_x$  fällt es auf, daß quer zur Spannrichtung im fast ganzen Plattenbereich die negativen Biegemomente  $M_x$  auftreten, die beim Stahlbetonbau mit der Querbewehrung



Die berechneten Momente fallen mit [3] zusammen.

**Bild 9** Vergleich der berechneten Biegemomente mit<sup>3)</sup>.



Die berechneten Querkräfte fallen mit [3] zusammen.

**Bild 10** Vergleich der berechneten Querkräfte mit<sup>3)</sup>.

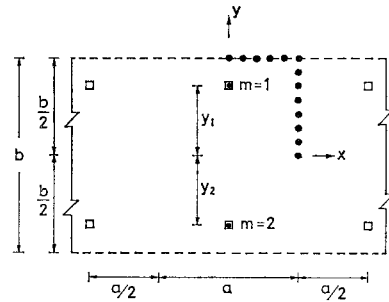
reichlich abgedeckt werden müssen. Für die Stützkraft in Plattenmitte ergibt die Rechnung  $sC_1 = -0.5977qab$ , und die Stabstatik an einem zweifeldigen Durchlaufträger  $sC_1 = -0.625qab$ .

**(4) Durchlaufender Plattenstreifen**

Zuletzt wird ein sich in Längsrichtung unbegrenzt bis ins Unendliche fortsetzender Plattenstreifen mit freien Rändern und Stützenreihen berechnet (**Bild 11**), wobei der Abstand der parallel laufenden Stützenreihen  $2y_m$  verändert wird:

$2y_m/a = 1.0, 0.8 \text{ und } 0.6$

Das Abmessungsverhältnis (Plattenbreite)/(Feldweite)  $= b/a = 1.4$  wurde gewählt, um ein Rechenbeispiel zu erhalten, für das eine Plattenberechnung sinnvoll ist. Mit  $b/a = 1.4$  und  $2y_m/a = 1.0$  ergibt sich außerdem das gleiche Plattensystem, das G. Bretthauer/H. F. Seiler in<sup>11)</sup> mit Hilfe der Funktionspiegelung berechnen.



$2y_m/a = 1.0, 0.8 \text{ und } 0.6$   
 $N = 30 \quad b/a = 1.4/1.0$

**Bild 11** Plattenstreifen auf Stützenreihen.

Betrachtet wird hier unter Beachtung der Symmetriebedingungen nur eine Feldweite in **Bild 11**, für die längs  $x = a/2$  und  $y = b/2$  die entsprechenden Randbedingungen durch Kollokation berücksichtigt werden müssen. Aus der in **Bild 11** gezeigten Punktverteilung für die Kollokation folgt ein Gleichungssystem mit  $N = 30$ .

Die Momentenbilder in den Schnitten  $x = a/2$  und  $x = 0$  sind bzw. in **Bild 12** und **Bild 13** aufskizziert. Die  $M_y$ -Kurven in **Bild 12** zeigen, daß der Vorzeichenwechsel der Biegebeanspruchung in Querrichtung mit der Veränderung der Lage der Punktstützungen schlagartig erfolgt. In Längsrichtung werden die Biegemoment  $M_x$  zur Punktstützung hin angezogen, die Flächen der Momentenbilder für  $M_x$  bleiben aber aus Gleichgewichtsgründen unverändert. In **Bild 13** sieht man, daß die  $M_x$ -Verläufe entlang der  $y$ -Achse von dem Abstand  $y_m$  der Stützen von der Feldmitte stärker abhängig sind als im Schnitt  $x = a/2$ . Ferner stellt man in **Bild 13** fest, daß im Schnitt  $x = 0$  in der unmittelbaren Nähe der freien Ränder stets positive Biegemomente  $M_y$  auftreten. Dies bestätigt auch das **Bild 9** für die Platte von A. Stamm<sup>3)</sup>. Die Stützkkräfte  $sC_1 = sC_2$  der Punktsäulen sind:

$2y_m/a$	Eigene Rechnung	Exakt
1.0	-0.498 (0.4%)	
0.8	-0.5	-0.5
0.6	-0.5	
Faktor: $qab$		

Für die von den freien Rändern entfernten Stützungen erhält man die exakten Werte.

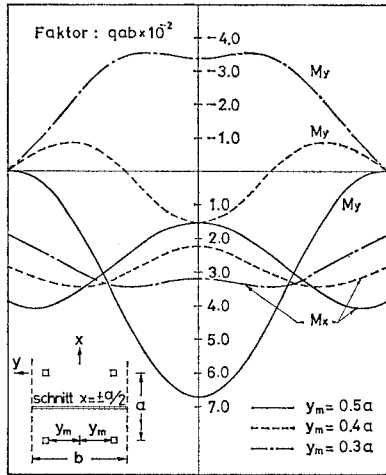


Bild 12 Momentenbilder für  $M_x$  und  $M_y$  (Schnitt  $x = \pm a/2$ ).

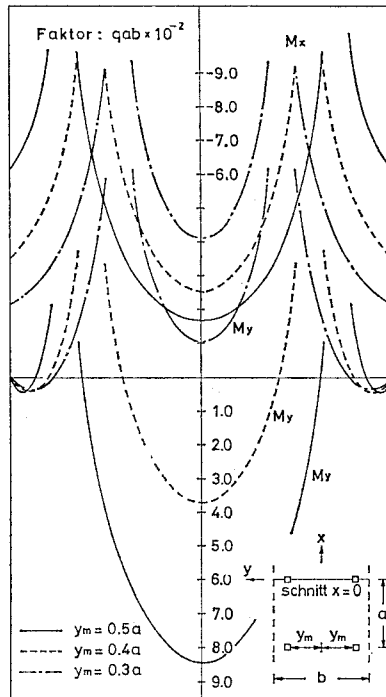


Bild 13 Momentenbilder für  $M_x$  und  $M_y$  (Schnitt  $x = 0$ ).

## 5. SCHLUBFOLGERUNGEN

Es wurden mit dem Randkollokationsverfahren im Innenbereich punktgestützte Platten unter Gleichlast berechnet. Es zeigt sich aus den durchgeführten Beispielrechnungen, daß bei den Platten mit freien

Rändern quer zur Spannrichtung große negative Biegemomente auftreten.

Im Schrifttum wurde bisher oft mitgeteilt, daß das Randkollokationsverfahren in meisten Fällen keine brauchbaren Ergebnisse bringt. Der ausschlaggebende Vorzug des Berechnungsverfahrens ist aber die leichte Anwendbarkeit. In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, daß mit dem Näherungsverfahren zur Plattenberechnung in beschränktem Umfang (symmetrische Systeme) eine genügende Genauigkeit erreicht wird.

## Literatur

- 1) Bares, R.: Berechnungstabellen für Platten und Wandscheiben, Wiesbaden, Bauverlag, 1969.
- 2) Zöphel, J.: Die Quadratplatte mit teilweise frei drehbaren und teilweise starr eingespannten Rändern unter Gleichlast, Die Bautechnik, Heft 9, S. 319~321, 51 (1974).
- 3) Stamm, A.: Schnittkräfte und Einflußflächen einer zweiseitig frei drehbar gelagerten Rechteckplatte mit einer Säule in Plattenmitte, Der Bauingenieur, Heft 10, S. 363~367, 47 (1972).
- 4) Leissa, A. W. and W. E. Clausen: A Comparison of Approximate Methods for the Solution of Plate Bending Problems, AIAA Journal, Vol. 7, No. 5, pp. 920~928, (1969).
- 5) Ramm, E.: Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der linearen Biegetheorie—Anwendung der verbesserten Kollokation (diskretisiertes Fehlerquadratminimum) als Randverfahren, Diss., Univ. Stuttgart, 1972.
- 6) Collatz, L.: The Numerical Treatment of Differential Equations, Berlin, Springer, 1966.
- 7) Text für den Plattenkurs: Platten, Theorie, Berechnung, Bemessung, Teil II/B, Bericht Nr. 76-1, Inst. für Baustatik der Univ. Stuttgart, 1976.
- 8) Pfaffinger, D. and B. Thürlimann: Tabellen für unterzugslose Decken, Zürich, Verlag-AG der akademischen technischen Vereine, 1967.
- 9) Müller, G.: Beitrag zur numerischen Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Treffitz-Methode, Diss., Univ. Stuttgart, 1975.
- 10) Hoppe, H.: Über Erfahrungen mit Kollokationsverfahren bei zweidimensionalen Randwertaufgaben, ZAMM, T 52/54, 47 (1967).
- 11) Bretthauer, G. and H. F. Seiler: Plattenstreifen und Scheibenstreifen mit freien Längsrändern, Beton- und Stahlbetonbau, S. 10~16, Heft 1 (1972), S. 52~63, Heft 3 (1972), S. 85~89, Heft 4 (1972).
- 12) Bergmann, M.: Die finite Übersetzung von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungssystemen der Flächentragwerke durch Kollokation, Bericht Nr. 73-8, Inst. für Statik, TU Braunschweig, 1973.

(Received July 19, 1979)