

離散化系の幾何学的非線形問題での 力学的関係と平面骨組への適用*

MECHANICS IN GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEM OF DISCRETE SYSTEM AND APPLICATION TO PLANE FRAME-WORKS

阿井正博**・西野文雄***

By Masahiro AI and Humio NISHINO

1. はじめに

構造全体の連続系を有限要素法の手順により離散化し変位法により解を得るといふ組織的な手法は、微小変位問題においてきわめて広い汎用性を示すものであるが、有限変位問題においてもそのことは十分期待されている。

これまでに示されている幾何学的非線形問題の解析においては、はりの問題でははり-柱の式が、板の問題では Von Karmann の式がその基本となる基礎方程式として採用されており、それらの離散化に関して多くの報告がなされている。しかし、前述の2つの基礎方程式は、変位に関する線形項に続く2次の非線形項までを含む理論式ではあるが、任意の大きさの変位を生じる有限変位問題に適用し得る理論式ではない。したがって、それらの基礎方程式を単に離散化しただけの解析手法^{1)~8), 10), 13), 14), 17), 19), 21)}は、系の初期状態のまわりの比較の変位が小さい範囲での有限変位問題にしか適用できない。

幾何学的非線形問題とは、扱う変位が大きいために系の幾何形状変化が無視できなくなり基礎方程式が非線形となる有限変位問題であるが、生ずるひずみは単位に比較して十分小さいのが普通であり、応力とひずみ(合応力と一般化ひずみ)の関係を表す構成方程式には線形式が用いられる。このことは、十分小さく要素分割した離散化系では、各要素は十分大きく並進し回転するが、要素の変形自体はひずみが微小である程度にしか生じないことを意味する。以上の幾何学的非線形問題の特性を解析手法上に反映させることについて、すでに多くの研究結果が報告されている。平面骨組の有限変位解析におい

て、はり要素の変位自由度を要素の剛体変位を表すパラメーターと変形を表すパラメーターに分解して、剛体変位とともに移動する要素座標に関して変形成分ははりの曲げ理論で扱うことはかなり以前から行われている^{2), 3), 12), 18), 20), 22)}。このとき、前述したひずみが微小であることにより、要素の大きささえ小さくすれば、剛体変位成分を除いた要素の変形成分は要素の大きさに相対していくらでも小さくすることができ、要素座標に関する要素の内力系と変形成分間の関係は微小変位理論に近づけることができるという考え方がこれらの解法の基底にある。また、板の有限変位問題では、初期状態から有限変位後までの間に適当な変位段階を設定し、各変位の前段階において規定された要素ごとの局所座標に関して次段階の変位状態を記述することにより、同様の考え方を導入したものもある^{9), 11), 15), 24)}。以上の手法では、原則的には、離散化を密に行えば、はり-柱の式や Von Karmann の式程度の比較的非線形性の小さい基礎方程式を各要素に適用することにより任意に有限変位する幾何学的非線形問題を扱うことができ、有限変位問題に対する有効な対応手段と考えられる。

本文では最初に、前述した要素の変位自由度を剛体変位と変形の自由度に分離して扱う変位法における力学的関係を、幾何学的非線形問題での一般論として述べることを試みている。ついで、その一般論を平面骨組構造に適用した場合の具体的な定式化を行っているが、その中では、はりの有限変位問題の基礎式として従来から用いられているはり-柱の式ではなく、変位の大きさを制限することのない有限変位問題としての基礎方程式からはり-柱理論の結果よりもより高次の非線形性を表現し得る解を求めている。

2. 幾何学的非線形問題での力学的関係

構造解析でいうところの、いわゆる離散化された系の

* 本報告の一部内容は土木学会第33回年次学術講演会にて発表²³⁾。その後、東京大学工学系学位論文²⁴⁾に集録。

** 正会員 工博 法政大学講師 工学部土木工学科

*** 正会員 Ph.D. 東京大学教授 工学部土木工学科

幾何学的非線形問題における力学的関係について考える。

(1) 構造要素の力学

構造中の1点の変位状況はその空間位置や回転，ほかに曲げねじれ問題でのねじれ率等で表現されるが，それらのパラメーターの組を離散系の点の空間位置とよぶものとする。

離散化された構造系の節点の空間位置を X_j , $j=1, \dots, N$ と表して節点位置とよぶものとし，系の要素 (e) 上の節点に接続している有限個の代表点の空間位置をまとめて $\{X\}_{(e)}$, $e=1, \dots, M$ と表すものとし要素位置とよぶものとする。要素の初期形状と変形特性が与えられているものとし代表点以外には力が作用しないものとするれば，要素自体の不安定現象等の特異状態を除いて，要素の空間形状は $\{X\}_{(e)}$ をパラメーターとして唯一定まる。このとき，剛体変位に対して要素の変形状態自体は変化しないことは明らかであり，要素 (e) の変形状態を規定するパラメーター $e_{(e)}$ が考えられるものとするれば， $e_{(e)}$ は要素の剛体変位に対応する $\{X\}_{(e)}$ の変化に対して一定である。

$\{X\}_{(e)}$ の空間形状にある要素においてその代表点の自由度に関してある特定の静定支持による自由度の拘束を考え，その静定支持により拘束される $\{X\}_{(e)}$ の自由度を $\{X\}_{(e)}^*$ ，他の自由度を $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ と表すものとする。静定支持の条件が要素の剛体変位を拘束するに必要十分な自由度制限であることより， $\{X\}_{(e)}^{\circ} = \text{const.}$ のもとに $\{X\}_{(e)}^*$ を変化させれば要素の変形状態は必ず変化する。一方，静定支持の自由度拘束を解くものとするれば，与えられた $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ の任意の変化に対して要素の剛体変位は唯一定まり，その剛体変位に従属する特定の $\{X\}_{(e)}^*$ の変化を考えれば要素の変形状態自体は変化しない。

要素が $\{X\}_{(e)}$ の空間形状にあるとき， $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ を特定の値 $\{X^*\}_{(e)}^{\circ}$ に変化させるような剛体変位を考え，その剛体変位後の $\{X\}_{(e)}$ ， $\{X\}_{(e)}^*$ を，それぞれ $\{X'\}_{(e)}$ ， $\{X'\}_{(e)}^*$ と表すものとする。さらに，要素の変形がないときの $\{X'\}_{(e)}^*$ を特に $\{X'^*\}_{(e)}^*$ と表すものとする。ここで，要素 (e) がさまざまな空間形状にあるという $\{X\}_{(e)}$ の集合を考えた場合，変形状態が同じであれば $\{X'\}_{(e)}^*$ は共通で $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ が異なるのみであり，変形状態が異なれば $\{X'\}_{(e)}^*$ は異なる。 $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ が共通であるとき， $\{X\}_{(e)}$ が異なれば $\{X'\}_{(e)}^*$ は異なる。そして， $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ と $\{X'\}_{(e)}^*$ が共通であれば， $\{X\}_{(e)}$ が共通であり同じ空間形状であることを意味する。以上のもとに， $e_{(e)} = \{X'\}_{(e)}^{\circ} - \{X'^*\}_{(e)}^{\circ}$ は，変形がないとき零となる要素の変形状態を表すパラメーターと考えることができ， $V_{(e)} = \{X\}_{(e)}^{\circ} - \{X^*\}_{(e)}^{\circ}$ は $\{X^*\}_{(e)}^{\circ}$ の位置を基準とする

剛体変位を規定するパラメーターと考えることができる。 $e_{(e)}$ と $V_{(e)}$ が与えられれば $\{X\}_{(e)}$ は定まる。

また，要素の剛体変位 $V_{(e)}$ とともに移動する局所座標を考えるものとし， $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ ， $\{X\}_{(e)}^*$ に対応する局所座標での代表点の位置を $\{x\}_{(e)}^{\circ}$ ， $\{x\}_{(e)}^*$ と表すものとするれば， $\{x\}_{(e)}^{\circ}$ は常に一定であり，要素の空間形状変化に含まれる変形成分の変化に対して $\{x\}_{(e)}^*$ のみが変化する。

$e_{(e)}$ は， $\{X\}_{(e)}^{\circ}$ と $\{X\}_{(e)}^*$ に関する前述の操作のもとに $\{X\}_{(e)}$ に対して幾何学的に定まる量であり，

$$e_{(e)} = \Gamma_e(\{X\}_{(e)}) \dots \dots \dots (1)$$

という代数関数として一般的に表示できる。

空間形状が $\{X\}_{(e)}$ である要素の代表点に作用している力を， $\{X\}_{(e)}$ の方向に，すなわち微分 $\delta\{X\}_{(e)}$ との内積が微小外力仕事となるように $\{F\}_{(e)}$ と表して要素力とよぶものとする。 $\{F\}_{(e)}$ は，要素の変形特性などにより $\{X\}_{(e)}$ に対して定まるが，その関係を次のように整理することができる。 $\{X\}_{(e)}$ に対応した $\{X'\}_{(e)}$ の要素位置にある静定支持された要素を考え， $\{X'\}_{(e)}$ の方向の要素力を $\{F'\}_{(e)}$ と表すものとする。このとき， $\{F'\}_{(e)}$ の各成分は独立ではなく，要素の剛体的つり合い条件を満足するという従属関係がある。 $\{F'\}_{(e)}$ の中より独立な成分を取り出す選び方は一義的ではないが，ここでは，前述の静定支持が剛体変位を拘束する必要十分な条件であることを考えて，独立な成分として $e_{(e)}$ の方向の，すなわち $\delta e_{(e)}$ との内積が要素の微小内力仕事となる要素力の成分を選び出し，特に $f_{(e)}$ と表して要素の変形力とよぶものとする。

$f_{(e)}$ と $e_{(e)}$ の関係は，構造要素の変形特性により定まる関係であり要素の変形の問題をなんらかの方法で解いて得られるが，弾性構造要素では，

$$f_{(e)} = \Gamma_f(e_{(e)}) \dots \dots \dots (2)$$

と一般的に表すことができる。安定な変形特性の構造要素では式 (2) の関係は正值であり，特に構造要素が弾性体であるときには，

$$\delta U_{(e)} = f_{(e)}^T \delta e_{(e)} \dots \dots \dots (3)$$

で定義される要素のひずみエネルギー関数 $U_{(e)}(e)$ が存在し，式 (2) の微係数マトリックス

$$[\kappa_{(e)}] = [\partial \Gamma_f / \partial e]_{(e)} \dots \dots \dots (4)$$

は正值対称となる。ここで，マトリックス $[\kappa_{(e)}]$ を要素の変形力—変形間の接線剛性マトリックスとよぶものとする。

$f_{(e)}$ に対して $\{F'\}_{(e)}$ は，要素の剛体的つり合い条件，すなわち静定支持条件での反力，を考慮することにより得られ，

$$\{F'\}_{(e)} = [Q_{F(e)'}(e)] f_{(e)} \dots \dots \dots (5)$$

とマトリックス表示することができる。 $\{F'\}_{(e)}$ に対し

て $\{F\}_{(e)}$ は, $\{X\}_{(e)}$ から $\{X\}_{(e)}$ への剛体回転に対する変換マトリックスを $[T_{F(e)}]$ として,

$$\{F\}_{(e)} = [Q_{F(e)}(\{X\})]f_{(e)} \dots\dots\dots (6)$$

$$[Q_{F(e)}] = [T_{F(e)}][Q_{F(e)}'] \dots\dots\dots (7)$$

と表すことができる. 与えられた要素位置 $\{X\}_{(e)}$ に対して要素力 $\{F\}_{(e)}$ は, 式 (1), (2), (6) の関係を介して得られることになる.

要素位置 $\{X\}_{(e)}$ の微小増分による変形 $e_{(e)}$ の増分は, 式 (1) の微分を考えて,

$$\delta e_{(e)} = [Q_{X(e)}(\{X\})]\delta\{X\}_{(e)} \dots\dots\dots (8)$$

$$[Q_{X(e)}] = [\partial F_e / \partial \{X\}]_{(e)} \dots\dots\dots (9)$$

と表すことができるが, このとき $[Q_{X(e)}]$ は, 式 (7) の $[Q_{F(e)}]$ と

$$[Q_{X(e)}] = [Q_{F(e)}]^T \dots\dots\dots (10)$$

という反傾関係にある. この関係は, 要素のつり合い状態で $\delta\{X\}_{(e)}$ に対する仮想仕事の式,

$$f_{(e)}^T \delta e_{(e)} = \{F\}_{(e)}^T \delta\{X\}_{(e)}$$

を考え, 式 (6) の関係を代入することによりいえる.

要素位置 $\{X\}_{(e)}$ の微小増分による要素力 $\{F\}_{(e)}$ の変化を表す微係数マトリックス $[K_{(e)}]$ を考えて, 要素力—要素位置間の接線剛性マトリックスとよぶものとする. 式 (6) の要素位置 $\{X\}_{(e)}$ に関する微分を考え, 式 (4), (8) を用いれば, $\{F\}_{(e)}$ の微小増分は,

$$\delta\{F\}_{(e)} = [Q_{F(e)}][\kappa_{(e)}][Q_{X(e)}]\delta\{X\}_{(e)} + [\delta Q_{F(e)}]f_{(e)}$$

と表すことができる. 前式の右辺第 2 項は, 式 (1), (9), (10) を考えて, $e_{(e)}$ のみが $\{X\}_{(e)}$ の関数であり $f_{(e)}$ が変化しないとみなすことにより,

$$[\delta Q_{F(e)}]f_{(e)} = \left[\frac{\partial}{\partial \{X\}_{(e)}} \left\{ \frac{\partial (e^T f)_{(e)}}{\partial \{X\}_{(e)}} \right\} \right]_{f=\text{const.}} \delta\{X\}_{(e)}$$

と表現することができる. 以上より, 要素力—要素位置間の接線剛性マトリックス $[K_{(e)}]$ は,

$$[K_{(e)}(\{X\})] = [K_{M(e)}(\{X\})] + [K_{G(e)}(\{X\}, f)] \dots\dots\dots (11)$$

$$[K_{M(e)}] = [Q_{F(e)}][\kappa_{(e)}][Q_{X(e)}] \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$[K_{G(e)}] = \left[\frac{\partial}{\partial \{X\}_{(e)}} \left\{ \frac{\partial (e^T f)_{(e)}}{\partial \{X\}_{(e)}} \right\} \right]_{f=\text{const.}} \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

の形で与えられることになる. $[K_{M(e)}]$ は $[\kappa_{(e)}]$ の対称性と式 (10) の関係より, $[K_{G(e)}]$ は式 (12·b) の右辺の形より, それぞれ対称マトリックスであることがわかる.

要素力 $\{F\}_{(e)}$ の誘導過程を考えると, 式 (6) の右辺の形より, $\{F\}_{(e)}$ は, 直接には, 変形力 $f_{(e)}$ と $[Q_{F(e)}]$ に含まれる要素位置 $\{X\}_{(e)}$ の関数であり, $f_{(e)}$ は式 (1), (2) を介して $\{X\}_{(e)}$ の関数となっている. 式

(12·a) で表される $[K_{M(e)}]$ は, 式 (6) において $[Q_{F(e)}]$ が変化しないものとみなしたときの, $\delta\{X\}_{(e)}$ により生じる変形力の変化に起因した接線剛性成分である. $[K_{M(e)}]$ は, 従来からいわれているところの線形剛性と初期ひずみ剛性¹²⁾を加えたものに対応するが, 前述の理由よりここでは変形剛性マトリックスとよぶものとする. $[K_{G(e)}]$ は, 逆に, $\delta\{X\}_{(e)}$ により $f_{(e)}$ は変化せず $[Q_{F(e)}]$ のみが増分すると考えたときの接線剛性成分であり, 従来よりよばれている幾何剛性マトリックスに対応する.

(2) 構造系の力学

要素 (e) , $e=1, \dots, M$ の代表点を節点に結合させてできる構造全体の力学的関係について考える. 簡単のために, 要素の代表点は節点にその全自由度が結合されているものとする.

構造系の節点位置が与えられれば, 要素位置はその各代表点の接続する節点の空間位置により代数的に定まる関係にあり, $\{X_{(e)}\}$, $e=1, \dots, M$, および X_j , $j=1, \dots, N$, を成分とする列ベクトルをそれぞれ $\{X_{(E)}\}$, $\{X_j\}$ として

$$\{X_{(E)}\} = \mathbf{A}(\{X_j\}) \dots\dots\dots (13)$$

と表すことができる.

節点力 F_j , $j=1, \dots, N$, を節点位置の微小変化 δX_j との内積が微小外力仕事となる量として定義するものとする. 節点 j の節点力 F_j は, j に接続する代表点を含む要素力の対応する成分 $F_{(e)j}$ と j の空間位置 X_j により定まり, $\{F\}_{(e)}$, $e=1, \dots, M$, および F_j , $j=1, \dots, N$ を成分とする列ベクトルをそれぞれ $\{F_{(E)}\}$, $\{F_j\}$ として

$$\{F_j\} = [S_F(\{X_j\})]\{F_{(E)}\} \dots\dots\dots (14)$$

とマトリックス表示することができる. このとき, 式 (13) の微係数マトリックスを

$$[S_X(\{X_j\})] = [\partial \mathbf{A}(\{X_j\}) / \partial \{X_j\}] \dots\dots\dots (15)$$

と表すものとする,

$$[S_X(\{X_j\})] = [S_F(\{X_j\})]^T \dots\dots\dots (16)$$

の反傾関係が成立する.

各節点位置の各自由度は, 与えられた問題の支持条件と外力条件により, その座標値, または座標方向の外力値を指定される. それらの幾何学的, または力学的な条件値を成分とする $\{F_j\}$, $\{X_j\}$ と同じ大きさ同じ成分順序の列ベクトルを $\{\bar{B}_j\}$ と表すものとするれば, $\{\bar{B}_j\}$ より力学的条件のもとにある成分のみをとり出す 0 と 1 を成分とするマトリックスを $[C^F]$ として, 不つり合い力 $\{E_j^F\}$ は,

$$\{E_j^F\} = [C^F](\{F_j\} - \{\bar{B}_j\}) \dots\dots\dots (17)$$

と表すことができ, つり合い条件は $\{E_j^F\} = \{0\}$ で与え

られる. $\{\bar{\mathbf{B}}_J\}$ より幾何学的条件のもとにある成分をとり出すマトリックスを $[\mathbf{C}^X]$ として, 系の反力 $\{\mathbf{R}^X\}$ は

$$\{\mathbf{R}^X\} = [\mathbf{C}^X] \{\mathbf{F}_J\} \dots \dots \dots (18)$$

で与えられ, 幾何学的条件は

$$[\mathbf{C}^X] (\{\mathbf{X}_J\} - \{\bar{\mathbf{B}}_J\}) = \{\mathbf{0}\} \dots \dots \dots (19)$$

と表すことができる.

力学的条件のもとにある $\{\mathbf{X}_J\}$ の部分列ベクトルを $\{\mathbf{X}^f\}$, 幾何学的条件のもとにある部分列ベクトルを $\{\mathbf{X}^g\}$ と表すものとすれば, $\{\mathbf{X}_J\}$ はそれらを用いて,

$$\{\mathbf{X}_J\} = [\mathbf{C}^F]^T \{\mathbf{X}^f\} + [\mathbf{C}^X]^T \{\mathbf{X}^g\} \dots \dots (20 \cdot a)$$

と表すことができ,

$$\{\mathbf{X}^f\} = [\mathbf{C}^F] \{\mathbf{X}_J\}, \quad \{\mathbf{X}^g\} = [\mathbf{C}^X] \{\mathbf{X}_J\}$$

の関係を代入して,

$$[\mathbf{C}^F]^T [\mathbf{C}^F] + [\mathbf{C}^X]^T [\mathbf{C}^X] = [\mathbf{I}] \dots \dots (20 \cdot b)$$

の関係が得られる. ここに, $[\mathbf{I}]$ は $\{\mathbf{X}_J\}$ と同じ大きさの単位行列を表す.

式 (16), (20·a) の関係は, 構造全体で考えた仮想仕事の原理により説明できる. 系の節点位置 $\{\mathbf{X}_J\}$ を与えれば式 (1), (2), (6), (13), (14) の関係より節点力 $\{\mathbf{F}_J\}$ は定まり, 作用外力がこの節点力に等しいとき系はつり合い状態にある. つり合い状態での節点位置の微小変化 $\delta\{\mathbf{X}_J\}$ に対する仮想仕事の原理を考える. $\mathbf{f}_{(e)}, \mathbf{e}_{(e)}, e=1, \dots, M$, を成分とする列ベクトルをそれぞれ $\{\mathbf{f}_{(e)}\}, \{\mathbf{e}_{(e)}\}$ と表すものとして, $\delta\{\mathbf{X}_J\}$ による要素変形の増分を $\delta\{\mathbf{E}_{(E)}\}$ とすれば, 仮想仕事の式は,

$$\{\mathbf{f}_{(E)}\}^T \delta\{\mathbf{e}_{(E)}\} = \{\mathbf{F}_J\}^T \delta\{\mathbf{X}_J\} \dots \dots \dots (21)$$

で与えられる. 前式左辺に各要素の仮想仕事の式

$$\mathbf{f}_{(e)}^T \delta \mathbf{e}_{(e)} = \{\mathbf{F}\}_{(e)}^T \delta \{\mathbf{X}\}_{(e)}$$

を代入すれば,

$$\{\mathbf{F}_{(E)}\}^T \delta\{\mathbf{X}_{(E)}\} = \{\mathbf{F}_J\}^T \delta\{\mathbf{X}_J\} \dots \dots (22 \cdot a)$$

の関係が得られ, 式 (14) を代入することにより式 (16) の関係が得られる. 式 (21) の右辺の外力項を $\delta\{\mathbf{X}^f\}$ と $\delta\{\mathbf{X}^g\}$ に関して表すものとする, 対応する節点力はそれぞれ

$$\{\mathbf{F}^f\} = [\mathbf{C}^F] \{\mathbf{F}_J\}, \quad \{\mathbf{F}^g\} (= \{\mathbf{R}^g\}) = [\mathbf{C}^X] \{\mathbf{F}_J\}$$

であり, 式 (22·a) と同等の関係式

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{(E)}\}^T \delta\{\mathbf{X}_{(E)}\} \\ = \{\mathbf{F}_J\}^T ([\mathbf{C}^F]^T \delta\{\mathbf{X}^f\} + [\mathbf{C}^X]^T \delta\{\mathbf{X}^g\}) \end{aligned} \dots \dots (22 \cdot b)$$

が得られる. 式 (22·a, b) の右辺を等しいと置くことにより, 式 (20·a) の関係が得られる.

構造系の節点位置の微小変化 $\delta\{\mathbf{X}_J\}$ による節点力の変化 $\delta\{\mathbf{F}_J\}$ を表す線形化式, すなわち系の節点自由度間の接線剛性の表示を考える. 式 (14) の $\{\mathbf{X}_J\}$ に関する微分を考えると,

$$\delta\{\mathbf{F}_J\} = [\mathbf{S}_F(\{\mathbf{X}_J\})] \delta\{\mathbf{F}_{(E)}\}$$

$$+ [\delta \mathbf{S}_F(\{\mathbf{X}_J\})] \{\mathbf{F}_{(E)}\}$$

と表すことができ, $\delta\{\mathbf{F}_J\}$ は, $\delta\{\mathbf{X}_J\}$ による要素力の変化によるものと節点力-要素力関係の変化によるものから生じる. 前式右辺第1項は式 (11) の要素力-要素位置間の接線剛性および式 (15) を用いて, 第2項は式 (15) と式 (16) の反傾関係を用いて, それぞれ, $\delta\{\mathbf{X}_J\}$ に関して展開することができ, 節点自由度間の接線剛性を $[\mathbf{K}_J(\{\mathbf{X}_J\})]$ として,

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_J(\{\mathbf{X}_J\})] \\ = [\mathbf{K}_{EJ}(\{\mathbf{X}_J\})] + [\mathbf{K}_{TJ}(\{\mathbf{X}_J\}, \{\mathbf{F}_{(E)}\})] \end{aligned} \dots \dots (23)$$

$$[\mathbf{K}_{EJ}] = [\mathbf{S}_F(\{\mathbf{X}_J\})] [\mathbf{K}_{(E)}] [\mathbf{S}_X(\{\mathbf{X}_J\})] \dots \dots (24 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{TJ}] = \left[\frac{\partial}{\partial \{\mathbf{X}_J\}} \right. \\ \left. \cdot \left\{ \frac{\partial (\mathbf{A}(\{\mathbf{X}_J\})^T \{\mathbf{F}_{(E)}\})}{\partial \{\mathbf{X}_J\}} \right\} \right]_{\{\mathbf{F}_{(E)}\} = \text{const.}} \dots \dots (24 \cdot b) \end{aligned}$$

と表すことができる. ここに, $[\mathbf{K}_{(E)}]$ は $[\mathbf{K}_{(e)}]$, $e=1, \dots, M$, を対角成分とする対角マトリックスを表しており, 記号 $[\mathbf{F}_{(E)}] = \text{const.}$ は, 式 (12·b) と同様に, $\{\mathbf{X}_J\}$ に関する微分において $\{\mathbf{F}_{(E)}\}$ を定数とみなすことを表す. 系の力学的条件下にある節点自由度間の接線剛性は, $[\mathbf{K}_J]$ の部分行列を, $[\mathbf{K}_J^f] = [\mathbf{C}^F] [\mathbf{K}_J] [\mathbf{C}^F]^T$ ととり出して表される.

ここで, 式 (13) の要素位置と節点位置の間の代数関係に代えて, 各代表点 e が接続する節点位置を要素位置 $\{\mathbf{X}\}_{(e)}$ そのものとして採用するものとする, 要素位置と節点位置の関係は, $[\mathbf{S}_X] (= [\mathbf{S}_F]^T)$ が 0 と 1 を成分とする接続マトリックスとなり,

$$\{\mathbf{X}_{(E)}\} = [\mathbf{S}_X] \{\mathbf{X}_J\} \dots \dots \dots (13)'$$

と表され, 節点自由度間の接線剛性は,

$$[\mathbf{K}_J(\{\mathbf{X}_J\})] = [\mathbf{S}_F] [\mathbf{K}_{(E)}(\{\mathbf{X}_J\})] [\mathbf{S}_X] \dots \dots (23)'$$

と表されることになる.

式 (23) の接線剛性マトリックスの対称性より系のひずみエネルギーを考えることができるが, 系全体のひずみエネルギーは式 (3) で定義される各要素のひずみエネルギーの和で与えられる. また, 作用外力が保存力であれば, $\{\bar{\mathbf{P}}_J\} = [\mathbf{C}^F] \{\bar{\mathbf{B}}_J\}$ として,

$$\delta V_f = \{\bar{\mathbf{P}}_J\}^T \delta\{\mathbf{X}^f\}$$

で定義される外力ポテンシャル $V_f(\{\mathbf{X}^f\})$ が存在し, 系の全ポテンシャル・エネルギーは,

$$\begin{aligned} W(\{\mathbf{X}^f\}) = \sum_{e=1}^M U_{(e)}(\{\mathbf{X}^f\}) - V_f(\{\mathbf{X}^f\}) \end{aligned} \dots \dots (25)$$

で与えられることになる. $W(\{\mathbf{X}^f\})$ の停留条件が式 (17) のつり合い条件 $\{\mathbf{E}^f\} = \{\mathbf{0}\}$ に等しいことは, こ

れまでの展開を逆にたどっていうことができる。

以上に述べた離散化系での力学的関係を次のようにまとめることができる。式 (2) を要素全体で考えた関数関係を \mathbf{A}_f として、

変形力-変形関係:

$$\{\mathbf{f}_{(E)}\} = \mathbf{A}_f(\{\mathbf{e}_{(E)}\}) \dots\dots\dots (26)$$

と表すものとする。要素全体で考えて式 (1) に式 (13) を代入し、 $\{\mathbf{X}_f\}$ を $[C^X]\{\mathbf{B}_f\}$ に固定したときの関数関係を \mathbf{A}_e と表して、

変形-節点位置関係:

$$\{\mathbf{e}_{(E)}\} = \mathbf{A}_e(\{\mathbf{X}_f^j\}) \dots\dots\dots (27)$$

が決まる。式 (6) を式 (14) に代入して、式 (17) のつり合い条件 $\{\mathbf{E}_f^j\} = \{\mathbf{0}\}$ を考えると、

つり合い式:

$$[\Sigma_{F(E)}(\{\mathbf{X}_f^j\})]\{\mathbf{f}_{(E)}\} = \{\mathbf{P}_f^j\} \dots\dots\dots (28)$$

と表すことができる。ただし、 $[\Sigma_{F(E)}]$ は

$$[\Sigma_{F(E)}] = [C^F][S_F][Q_{F(E)}] \dots\dots\dots (29)$$

であり、 $[Q_{F(E)}]$ は式 (7) の $[Q_{F(e)}]$ 、 $e=1, \dots, M$ を対角成分とする対角マトリックスを表す。

式 (27) で表されるベクトル値関数の $\{\mathbf{X}_f^j\}$ に関する微係数マトリックスを

$$\delta\{\mathbf{e}_{(E)}\} = [\Sigma_{X(E)}(\{\mathbf{X}_f^j\})]\delta\{\mathbf{X}_f^j\} \dots\dots\dots (30)$$

と表すものとする。 $[\Sigma_{X(E)}]$ は式 (8) および式 (13)、(20・a) の微分関係より

$$[\Sigma_{X(E)}] = [Q_{X(E)}][S_X][C^F]^T \dots\dots\dots (31)$$

であり、 $[Q_{X(E)}]$ と $[\Sigma_{F(E)}]$ は式 (10) と同様の反傾関係

$$[\Sigma_{X(E)}] = [\Sigma_{F(E)}]^T \dots\dots\dots (32)$$

にある。ここに、式(31)右辺中の $[Q_{X(E)}]$ は、 $[Q_{F(E)}]$ と同様に、 $[Q_{X(e)}]$ 、 $e=1, \dots, M$ を対角成分とする対角マトリックスを表す。

連続体の連続系としての基礎方程式は物理的意味においてひずみ-変位関係、つり合い式、および構成方程式に大別され、一般に基本的な物理量として変位、外力、ひずみおよび応力を考えるのが普通であるが、それらの基本式および物理量にここで述べている離散系としての代数関係を対応させて考えることができる。連続系の無限自由度の変位と外力は離散化された系の節点位置と節点力に対応し、連続系のひずみと離散系要素の変形とは考える最小単位の要素の変形状態を規定するという意味では同等であり、同様に考えて応力と変形力も対応関係にある。したがって、離散化された系での基本的な代数関係、式 (26)~(28) において、式 (26) を離散系での広義の構成方程式、式 (27) を広義のひずみ-変位関係式、式 (28) をつり合い式と考えてよい。

3. 平面骨組の有限変位解析

前章で述べた要素の変位自由度を剛体変位と変形の自由度に分離して幾何学的非線形問題を扱う解析手法を、平面骨組に適用した場合の具体的な定式化を以下で考える。

(1) 要素の変形-要素位置関係と要素力-変形力関係

空間に直交デカルト座標 $\{x, y\}$ を考えるものとし、 x -軸から y -軸の方向に回転する角度座標を θ とする。

Fig. 1 に示す要素 (e) の両端 A, B の空間座標を $\{x, y, \theta\}_{A, B}$ と表すものとして、要素位置は、

$$\{\mathbf{X}\}_{(e)} = \{(x, y, \theta)_A, (x, y, \theta)_B\}_{(e)}$$

で与えられる。要素の剛体変位を拘束する静定支持の形式としては片持支持と単純支持の2通りが考えられるが、ここでは **Fig. 1** に示すような単純支持を採用する。このとき単純支持により拘束される自由度は **Fig. 1** の x_A, y_A, τ であり、要素の剛体変位 $V_{(e)}$ は、

$$V_{(e)} = \{x_A, y_A, \tau\}_{(e)} \dots\dots\dots (33)$$

ただし、

$$\tau = \arctan(\bar{y}/\bar{x}) \dots\dots\dots (34)$$

で与えられる。ここに、 $\bar{x} = x_B - x_A$ 、 $\bar{y} = y_B - y_A$ である。変形状態を保ったまま $V_{(e)}$ が零となる剛体変位の後の他の要素自由度を考えて、要素の変形 $e_{(e)}$ を

$$e_{(e)} = \{\epsilon, \varphi_A, \varphi_B\}_{(e)} \dots\dots\dots (35)$$

で定義するものとする。このとき、 $e_{(e)}$ と要素位置の関

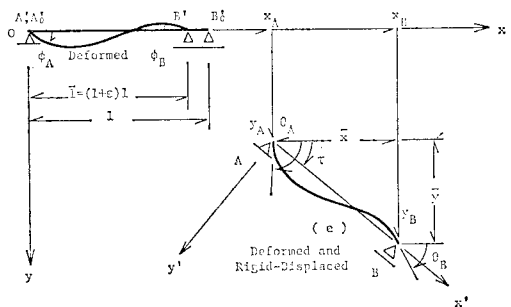


Fig. 1 Beam Element in Space

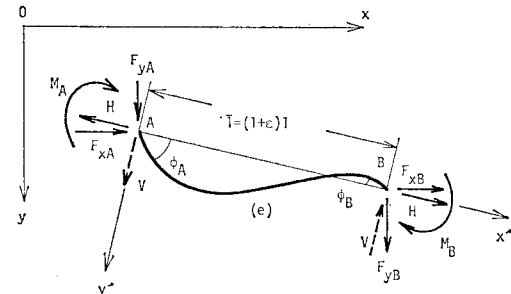


Fig. 2 Joint Forces of Element

係は、

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{l} - 1 \dots\dots\dots (36 \cdot a)$$

$$\varphi_A = \theta_A - \arctan(\bar{y}/\bar{x}) \dots\dots\dots (36 \cdot b)$$

$$\varphi_B = \theta_B - \arctan(\bar{y}/\bar{x}) \dots\dots\dots (36 \cdot c)$$

で与えられる。ここに、 l は要素の無応力時の重心線に沿った長さを表す。

要素の両端に作用している力を空間座標に関して成分表示し (Fig. 2) 要素位置 $\{X\}_{(e)}$ に対応させれば、要素の要素力は、

$$\{F\}_{(e)} = \{(F_x, F_y, M)_A, (F_x, F_y, M)_B\}_{(e)}$$

で与えられる。要素の局所座標として両端を結ぶ方向に x' -座標、それに直角方向に y' -座標を考えるものとして、要素に作用する力は局所座標に関する H, M_A, M_B と剛体的なつり合い条件により決定される。要素の変形力 $f_{(e)}$ は式 (35) の $e_{(e)}$ の成分に対応させて、

$$f_{(e)} = \{Hl, M_A, M_B\}_{(e)} \dots\dots\dots (37)$$

で与えられる。

変形力 $f_{(e)}$ と要素位置 $\{X\}_{(e)}$ が与えられれば要素力 $\{F\}_{(e)}$ は決まるが、その変換 $\{F\}_{(e)} = [Q_{F(e)}]f_{(e)}$ を定めるマトリックス $[Q_{F(e)}]$ は、

$$[Q_{F(e)}] = [T_{F(e)}][Q_{F(e)'}] \dots\dots\dots (38)$$

$$[k_{G(e)}] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \frac{(Hl)}{l} \sin^2 \tau - \frac{M_A + M_B}{l} \sin 2\tau, & -\frac{(Hl)}{l} \sin \tau \cos \tau + \frac{M_A + M_B}{l} \cos 2\tau, & 0 \\ \frac{(Hl)}{l} \cos^2 \tau + \frac{M_A + M_B}{l} \sin 2\tau, & & 0 \\ \text{Sym.} & & 0 \end{bmatrix}_{(e)} \dots\dots\dots (41 \cdot b)$$

と表すことができる。

(2) 変形力-変形関係

面内はり要素の変形力と変形との関係を、補遺 1 に示している 1 軸曲げの有限変位問題での基礎方程式を以下のように近似的に解いて誘導する。

直線はり要素を Fig. 3 のように単純支持し、強制回転 φ_A, φ_B および外力 H を作用させた変形状態を考える。ここで、基礎方程式の解法上、はりの変形に関して重心線の不伸長：

$$(x_G')^2 + (y_G')^2 = 1 \dots\dots\dots (42)$$

を付帯条件として加えるものとし、伸び変形に関する項は得られた解に付加して考慮するものとする (後述)。

1 軸曲げのつり合い式 (A19) をここでの外力条件のもとで考え、 κ に関して積分した後、直交マトリックスを右辺に移せば、

$$\begin{Bmatrix} N \\ M' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_G' & y_G' \\ -y_G' & x_G' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (43)$$

$$[T_{F(e)}] = \begin{bmatrix} [\bar{T}]^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\bar{T}]^T \end{bmatrix}_{(e)} \dots\dots\dots (39 \cdot a)$$

$$[\bar{T}]_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}}{l}, \frac{\bar{y}}{l}, 0 \\ -\frac{\bar{y}}{l}, \frac{\bar{x}}{l}, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix}_{(e)} \dots\dots\dots (39 \cdot b)$$

$$[Q_{F(e)'}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l}, 0, 0 \\ 0, \frac{1}{l}, \frac{1}{l} \\ 0, 1, 0 \\ \frac{1}{l}, 0, 0 \\ 0, \frac{-1}{l}, \frac{-1}{l} \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix}_{(e)} \dots\dots\dots (40)$$

で与えられる。ただし、 \bar{l} は変形後の要素の両端を結ぶ距離、 $\bar{l} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ を表す。

前章の式 (12・b) で表される要素力-要素位置間の接線剛性マトリックスの幾何剛性成分 $[K_{G(e)}]$ は、変形 $e_{(e)}$ の要素位置に関する 2 階の微係数と変形力 $f_{(e)}$ で定まり、ここでのはり要素に対しては、

$$[K_{G(e)}] = \begin{bmatrix} [k_{G(e)}], & -[k_{G(e)}] \\ \text{Sym.} & [k_{G(e)}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots (41 \cdot a)$$

が得られる。ここに、 $\{F_x, F_y\}$ は積分定数であるが、断面に作用する力の $\{x, y\}$ -方向成分を表す。

ここで、はりの無応力状態と前述の変形状態を線形的に結ぶ経路

$$\{\bar{H}(\rho), \bar{\varphi}_A(\rho), \bar{\varphi}_B(\rho)\} = \rho \{H, \varphi_A, \varphi_B\} \quad 0 < \rho < 1 \dots\dots\dots (44)$$

を規定し、この経路に沿うはりの変形を考える。式 (44) の経路に対して系のすべての未知量は ρ の関数と考えることができ、 ρ に関する解析性を仮定してそのべき級数表示を次のように表すものとする。

$$\begin{Bmatrix} x_G(\rho, \zeta) \\ y_G(\rho, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\zeta) \rho^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\zeta) \rho^n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (45 \cdot a)$$

$$M(\rho, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\zeta) \rho^n \dots\dots\dots (45 \cdot b)$$

$$N(\rho, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(\zeta) \rho^n \dots\dots\dots (45 \cdot c)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x(\rho) \\ F_y(\rho) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} F_{xn}\rho^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} F_{yn}\rho^n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(45 \cdot d)$$

式 (42) の不伸長の条件のもとでの式 (A8・b), (A22・b) を式 (43) に代入すれば変位表示のつり合い式が得られる。変位表示のつり合い式と式 (42) に式 (45・a~d) のべき級数表示を代入して展開し, ρ の次数に関して整理すればいわゆる振動方程式が得られる。変位 $u_n, v_n, n=1, 2, 3, \dots$ を決定する振動方程式は, 式 (42) と式 (43) の第 2 行成分より,

$$u_n'' = -\frac{1}{2l} \sum_{m=1}^{n-1} (u_m u_{n-m} + v_m v_{n-m}) \dots\dots\dots(46 \cdot a)$$

$$v_n'' + \frac{l^3}{EI} F_{yn} = \frac{l^2}{EI} \sum_{m=1}^{n-1} (v_m F_{xn-m} - u_m F_{yn-m}) + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{n-1} (v_m u_{n-m}'' - u_m v_{n-m}'') \dots\dots\dots(46 \cdot b)$$

で与えられる。ここに, E は弾性定数, I ははりの断面 2 次モーメントを表しており, 記号 ()' は $\xi = \zeta/l$ で定義した規準座標に関する微分を表す。

Fig. 3 の支持条件と式 (44) をはりの両端で考えることにより, 境界条件式のべき級数表示は,

$$u_n(0) = 0 \dots\dots\dots(47 \cdot a)$$

$$F_{xn} = \begin{cases} H, & n=1 \\ 0, & n > 1 \end{cases} \dots\dots\dots(47 \cdot b)$$

$$x_G(\rho, \xi) = l\xi + \left[\frac{HL}{EA} \xi \right] \rho + \frac{l}{30} \begin{bmatrix} (-27 \xi^5 + 90 \xi^4 - 110 \xi^3 + 60 \xi^2 - 15 \xi) \varphi_A^2 \\ + (-27 \xi^5 + 45 \xi^4 - 20 \xi^3) \varphi_B^2 \\ + (-54 \xi^5 + 135 \xi^4 - 110 \xi^3 + 30 \xi^2) \varphi_A \varphi_B \end{bmatrix} \rho^2 - \frac{Hl^3}{6300EI} \begin{bmatrix} (675 \xi^7 - 3150 \xi^6 + 5754 \xi^5 - 5145 \xi^4 + 2275 \xi^3 - 420 \xi^2) \varphi_A^2 \\ + (675 \xi^7 - 1575 \xi^6 + 1029 \xi^5 - 140 \xi^3) \varphi_B^2 \\ + (1350 \xi^7 - 4725 \xi^6 + 5943 \xi^5 - 3045 \xi^4 + 385 \xi^3 + 105 \xi^2) \varphi_A \varphi_B \end{bmatrix} \rho^3 + 0(\rho^4) \dots\dots\dots(49 \cdot a)$$

$$y_G(\rho, \xi) = l \left[(\xi^2 - 2\xi^2 + \xi) \varphi_A + (\xi^3 - \xi^2) \varphi_B \right] \rho + \frac{Hl^3}{60EI} \left[(3\xi^5 - 10\xi^4 + 11\xi^3 - 4\xi^2) \varphi_A + (3\xi^5 - 5\xi^4 + \xi^3 + \xi^2) \varphi_B \right] \rho^2 + \left[-\frac{l}{210} \left\{ (162 \xi^7 - 756 \xi^6 + 1428 \xi^5 - 1400 \xi^4 + 765 \xi^3 - 234 \xi^2 + 35 \xi) \varphi_A^3 + (162 \xi^7 - 378 \xi^6 + 294 \xi^5 - 70 \xi^4 - 5 \xi^3 - 3 \xi^2) \varphi_B^3 + (486 \xi^7 - 1890 \xi^6 + 2856 \xi^5 - 2100 \xi^4 + 762 \xi^3 - 114 \xi^2) \varphi_A^2 \varphi_B + (486 \xi^7 - 1512 \xi^6 + 1722 \xi^5 - 840 \xi^4 + 132 \xi^3 + 12 \xi^2) \varphi_A \varphi_B^2 \right\} \rho^3 + 0(\rho^4) + \frac{Hl^2 l^3}{25200(EI)^2} \left\{ (30 \xi^7 - 140 \xi^6 + 231 \xi^5 - 140 \xi^4 - 3 \xi^3 + 22 \xi^2) \varphi_A + (30 \xi^7 - 70 \xi^6 + 21 \xi^5 + 35 \xi^4 - 3 \xi^3 - 13 \xi^2) \varphi_B \right\} \right] \rho^3 + 0(\rho^4) \dots\dots\dots(49 \cdot b)$$

$$N(\rho, \xi) = [H] \rho - \frac{6EI}{l^2} \left[(3\xi^2 - 4\xi + 1) \varphi_A^2 + (3\xi^2 - 2\xi) \varphi_B^2 + (6\xi^2 - 6\xi + 1) \varphi_A \varphi_B \right] \rho^2 + \frac{H}{10} \begin{bmatrix} (-60 \xi^4 + 160 \xi^3 - 146 \xi^2 + 52 \xi - 6) \varphi_A^2 \\ + (-60 \xi^4 + 80 \xi^3 - 26 \xi^2) \varphi_B^2 \\ + (-120 \xi^4 + 240 \xi^3 - 152 \xi^2 + 32 \xi - 1) \varphi_A \varphi_B \end{bmatrix} \rho^3 + 0(\rho^4) \dots\dots\dots(50 \cdot a)$$

$$v_n(0) = 0 \dots\dots\dots(47 \cdot c)$$

$$v_n(1) = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots \dots\dots(47 \cdot d)$$

$$\begin{cases} v_{2r+1}'(0) = (-1)^r \frac{l \varphi_A^{2r+1}}{(2r+1)!} \dots\dots\dots(47 \cdot e) \\ v_{2r}'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{2r+1}'(1) = (-1)^r \frac{l \varphi_A^{2r+1}}{(2r+1)!} \dots\dots\dots(47 \cdot f) \\ v_{2r}'(1) = 0, \quad r=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

と表される。式 (46・a, b) は $n=1$ で右辺=0 の非振動方程式であり, 式 (47・a~f) の境界条件のもとに $n=1, 2, 3, \dots$ の順に解くことができる。

断面の軸力と曲げモーメントのべき級数表示の各項は, 式 (46・a, b), (47・a~f) を解いた結果を式 (43) の第 1 行成分と曲げモーメントの変位表示式に代入して,

$$N_n = F_{xn} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{n-1} (u_m F_{xn-m} + v_m F_{yn-m}) \dots\dots\dots(48 \cdot a)$$

$$M_n = EI \left\{ -\frac{v_n''}{l^2} + \frac{1}{l^3} \sum_{m=1}^{n-1} (-u_{n-m} v_m'' + v_{n-m} u_m'') \right\} \dots\dots\dots(48 \cdot b)$$

と表すことができる。

以上の振動方程式の系の $n=3$ までの解は次のように得られる。

$$\begin{aligned}
 M(\rho, \xi) &= \frac{EI\kappa_0}{EI} - \frac{l}{EI} [(6\xi-4)\varphi_A + (6\xi-2)\varphi_B]\rho \\
 &\quad - \frac{HI}{60} [(60\xi^3-120\xi^2+66\xi-8)\varphi_A + (60\xi^3-60\xi^2+6\xi+2)\varphi_B]\rho^2 \\
 &\quad + \left[\begin{aligned} &\frac{EI}{210l} \{ (1134\xi^5-3780\xi^4+4620\xi^3-2520\xi^2+600\xi-48)\varphi_A^3 \\ &\quad + (1134\xi^5-1890\xi^4+840\xi^3-30\xi-6)\varphi_B^3 \\ &\quad + (3402\xi^5-9450\xi^4+9240\xi^3-3780\xi^2+582\xi-18)\varphi_A^2\varphi_B \\ &\quad + (3402\xi^5-7560\xi^4+5460\xi^3-1260\xi^2-48\xi+24)\varphi_A\varphi_B^2 \} \\ &\quad - \frac{H^2l^3}{25200EI} \{ (1260\xi^5-4200\xi^4+4620\xi^3-1680\xi^2-18\xi+44)\varphi_A \\ &\quad \quad + (1260\xi^5-2100\xi^4+420\xi^3+420\xi^2-18\xi-26)\varphi_B \} \end{aligned} \right] \rho^3 + 0(\rho^4) \dots\dots (50 \cdot b) \\
 F_x(\rho) &= [H]\rho \dots\dots\dots (51 \cdot a) \\
 F_y(\rho) &= -\frac{6EI}{l^2} [\varphi_A + \varphi_B]\rho - \frac{H}{10} [\varphi_A + \varphi_B]\rho^2 \\
 &\quad + \left[-\frac{EI}{35l^2} (5\varphi_A^3 + 5\varphi_B^3 + 8\varphi_A^2\varphi_B + 8\varphi_A\varphi_B^2) + \frac{H^2l^2}{1400EI} (\varphi_A + \varphi_B) \right] \rho^3 + 0(\rho^4) \dots\dots\dots (51 \cdot b)
 \end{aligned}$$

以上の結果において、式 (49・a) の下線——を付した項と式 (50・b) の下線——を付した項は、それぞれ伸び変形、および曲率一定 $\kappa_0 = \text{const.}$ の円弧はりに対するものであり、以下の考察のもとに不伸長の直線はりの解に付加したものである。

微小ひずみの範囲で許されるはりの変形状態を考えると、曲げ変形は断面寸法さえ小さく考えればいくらかでも大きくなり得るが、伸び変形は微小でしかあり得ない。したがって、曲げ変形が十分大きい変形状態では伸び変形を考慮する場合と不伸長とした場合との解の間には問題となる数値的差異は生じないが、曲げ変形が小さい範囲では微小な伸び変形により十分大きい断面力が生じることを解の中に十分正確に反映しておく必要がある。以上の理由により、式 (49・a) の右辺に微小変位問題と同様の伸び変形の項を付加した。この付加項により、後述する 1 軸曲げ要素の変形力-変形関係での特異状態が除かれることにもなる。

円弧はりの形状は初期曲率 κ_0 に見合う等曲げを作用させることにより直線となるが、この直線形状の等曲げ状態を基準とすれば、それ以後に加えられる変形力と変形の関係は直線はりのそれと同様である。

式 (49・a, b)~(51・a, b) は ρ をパラメーターとした式 (44) の外力の線形経路に対する要素の変形経路を表すものであるが、一般の問題としては $\{\bar{H}(\rho), \bar{\varphi}_A(\rho), \bar{\varphi}_B(\rho)\}$ の最終状態 ($\rho=1$) での値が同じ $\{H, \varphi_A, \varphi_B\}$ であってもその間の経路が異なれば $\rho=1$ での変形状態は異なると考えるのが普通である。しかし、Fig. 3 のはり要素自体の不安定現象を含まない基準状態のまわりでの $\{H, \varphi_A, \varphi_B\}$ の比較的小さい範囲では任意の経路において $\{H, \varphi_A, \varphi_B\}$ に対するはりの変形状態は唯一であり、その変形状態は式 (49・a, b)~(51・a, b) の $\rho=1$ での値で十分に近似表現されるものと思われる。以上

の解の適用性については後に考察する。

式 (49・a) と式 (50・b) の $\rho=1, \xi=0, 1$ での値より式 (37) の変形力と式 (35) の変形の関係は次のように表すことができる。

$$HI = \frac{\epsilon + \frac{1}{30} (2\varphi_A^2 + 2\varphi_B^2 - \varphi_A\varphi_B)}{\frac{1}{EAl} + \frac{l}{6300EI} (11\varphi_A^2 + 11\varphi_B^2 - 13\varphi_A\varphi_B)} \dots\dots\dots (52 \cdot a)$$

$$\begin{aligned}
 M_A &= EI\kappa_0 + \frac{EI}{l} (4\varphi_A + 2\varphi_B) + \frac{HI}{30} (4\varphi_A - \varphi_B) \\
 &\quad - \frac{EI}{35l} (8\varphi_A^3 + \varphi_B^3 + 3\varphi_A^2\varphi_B - 4\varphi_A\varphi_B^2) \\
 &\quad - \frac{l(HI)^2}{12600EI} (22\varphi_A - 13\varphi_B) \dots\dots\dots (52 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_B &= -EI\kappa_0 + \frac{EI}{l} (2\varphi_A + 4\varphi_B) \\
 &\quad + \frac{HI}{30} (-\varphi_A + 4\varphi_B) \\
 &\quad - \frac{EI}{35l} (\varphi_A^3 + 8\varphi_B^3 - 4\varphi_A^2\varphi_B + 3\varphi_A\varphi_B^2) \\
 &\quad - \frac{l(HI)^2}{12600EI} (-13\varphi_A + 22\varphi_B) \dots\dots\dots (52 \cdot c)
 \end{aligned}$$

式 (52・a~c) の $\{\epsilon, \varphi_A, \varphi_B\}$ に関する微係数を考えることにより、変形力-変形間の接線剛性マトリックス $[\kappa_{(e)}]$ は、

$$[\kappa_{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{\xi}^{HI}}, & \frac{r_{\xi}^{\varphi A}}{r_{\xi}^{HI}}, & \frac{r_{\xi}^{\varphi B}}{r_{\xi}^{HI}} \\ r_{MA}^{\varphi A} + \frac{r_{MA}^{HI} r_{\xi}^{\varphi A}}{r_{\xi}^{HI}}, & r_{MA}^{\varphi B} + \frac{r_{MA}^{HI} r_{\xi}^{\varphi B}}{r_{\xi}^{HI}} \\ \text{Sym.} & & r_{MB}^{\varphi B} + \frac{r_{MB}^{HI} r_{\xi}^{\varphi B}}{r_{\xi}^{HI}} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

ただし、

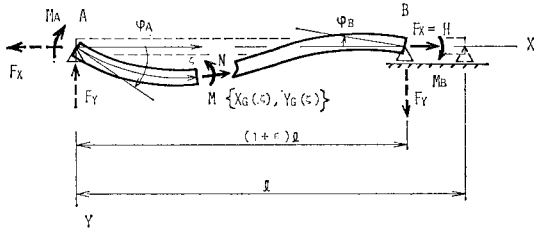


Fig. 3 Deformation of Beam Element

$$r_{\epsilon}^{HI} = \frac{1}{EAL} + \frac{l}{6300EI} (11\varphi_A^2 + 11\varphi_B^2 - 13\varphi_A\varphi_B) \dots\dots\dots(54 \cdot a)$$

$$r_{\epsilon}^{\varphi A} = r_{M_A}^{\varphi A} = \frac{1}{30} (4\varphi_A - \varphi_B) - \frac{l(Hl)}{6300EI} (22\varphi_A - 13\varphi_B) \dots\dots\dots(54 \cdot b)$$

$$r_{\epsilon}^{\varphi B} = r_{M_B}^{\varphi B} = \frac{1}{30} (-\varphi_A + 4\varphi_B) - \frac{l(Hl)}{6300EI} (-13\varphi_A + 22\varphi_B) \dots\dots\dots(54 \cdot c)$$

$$r_{M_A}^{\varphi A} = \frac{4EI}{l} + \frac{2}{15} (Hl) - \frac{EI}{35l} (24\varphi_A^2 - 4\varphi_B^2 + 6\varphi_A\varphi_B) - \frac{11l}{6300EI} (Hl)^2 \dots\dots\dots(54 \cdot d)$$

$$r_{M_A}^{\varphi B} = r_{M_B}^{\varphi A} = \frac{2EI}{l} - \frac{1}{30} (Hl) - \frac{EI}{35l} (3\varphi_A^2 + 3\varphi_B^2 - 8\varphi_A\varphi_B) + \frac{13l}{12600EI} (Hl)^2 \dots\dots\dots(54 \cdot e)$$

$$r_{M_B}^{\varphi B} = \frac{4EI}{l} + \frac{2}{15} (Hl) - \frac{EI}{35l} (-4\varphi_A^2 + 24\varphi_B^2 + 6\varphi_A\varphi_B) - \frac{11l}{6300EI} (Hl)^2 \dots\dots\dots(54 \cdot f)$$

と表される。また、要素のひずみエネルギー関数 $U_{(e)}$ は、 $\delta U_{(e)} = Hl\delta\epsilon + M_A\delta\varphi_A + M_B\delta\varphi_B$ を積分することにより、

$$U_{(e)} = EIk^0(\varphi_A - \varphi_B) + \frac{(Hl)^2}{2EAL} + \frac{2EI}{l} (\varphi_A^2 + \varphi_B^2 + \varphi_A\varphi_B) - \frac{EI}{35l} (2\varphi_A^4 + 2\varphi_B^4 - 2\varphi_A^2\varphi_B^2 + \varphi_A^3\varphi_B + \varphi_A\varphi_B^3) + \frac{l(Hl)^2}{12600EI} (11\varphi_A^2 + 11\varphi_B^2 - 13\varphi_A\varphi_B) \dots\dots\dots(55)$$

で与えられる。

(3) 数値計算例

Fig. 4 に示す平面骨組の数値計算を行った。部材断面は $400 \times 150 \text{ mm}^2$ の H 形鋼 (断面積 = 122.1 cm^2 , 断面 2 次モーメント = 1290 cm^4) とし、弾性定数は $E = 210000 \text{ kg/cm}^2$ とした。荷重形式としては No. 1~16 の各節点に x 方向の等しい外力 P_x を考えて対応する変形経路を数値計算した。繰り返し計算の手法としては、適当な外力段階ごとに Newton-Raphson 法を適用するものとした。外力と No. 1, 10, 16 の節点の x, y -方向変位および回転変位の関係を Fig. 5(a)~(c) に示す。最終状態 $P_x = 9.877 \text{ t}$ での節点座標を Table 1 に、各部材の変形状態を Table 2 に示す。また、Fig. 6 は Table 1 の節点座標を図示したものである。最終状態での部材の最大変形は No. 25 で生じ、

$$\left(\frac{Hl}{\pi^2 EI} \right)_{25} = 1.15, \quad \varphi_{A25} = 0.423$$

であった。

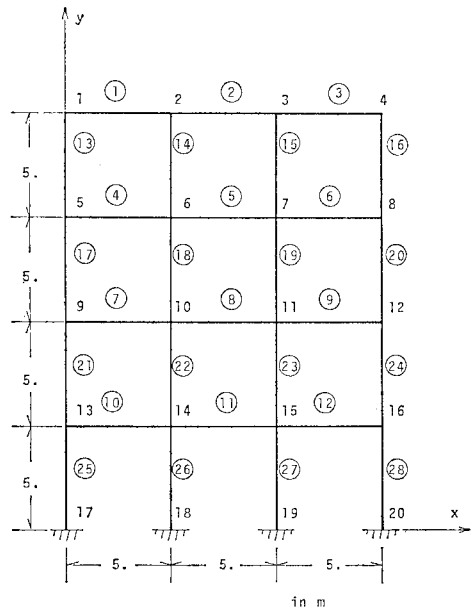


Fig. 4 Initial Configuration

4. 考 察

(1) はり要素の変形力-変形関係について

本文での 1 軸曲げ要素の変形力-変形関係は Fig. 3 の単純支持はりにおいて $\{Hl, \varphi_A, \varphi_B\}$ を境界条件として与えて対応する $\{\epsilon, M_A, M_B\}$ を摂動法により求めて

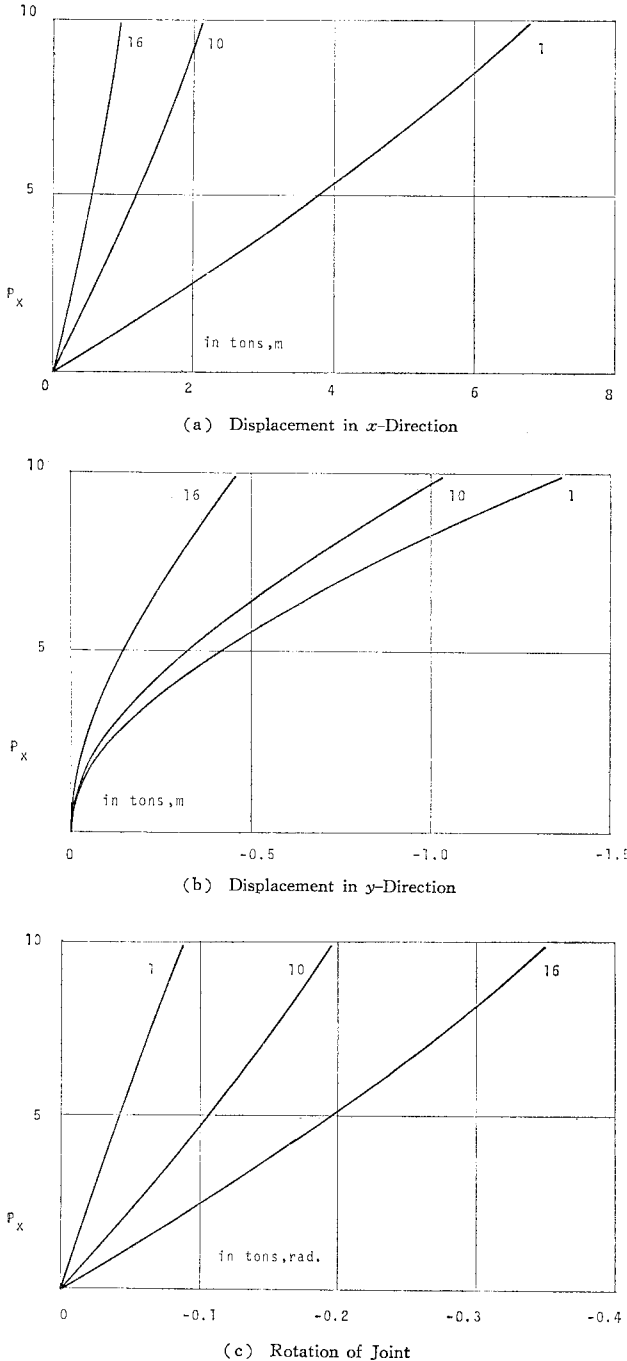


Fig. 5 Joint Displacements

誘導しているが、 $\{\epsilon, \varphi_A, \varphi_B\}$ を独立に与えて $\{Hl, M_A, M_B\}$ をその関数として求める方が変位法による構造解析への適用としてはより直接的であると考えられる。前者による式 (52・a~c) の関係式を求める前に、有限変位微小ひずみ問題としての基礎方程式²³⁾に同様の摂動法を考えて後者による関係式を同じく 3 次項まで求め

Table 1 Joint Position in Equilibrium for $P_x=9.877 t$

| No. | Coordinate in m, rad. | | |
|-----|-----------------------|--------|----------|
| | x | y | θ |
| 1 | 6.779 | 18.637 | -0.088 |
| 2 | 11.776 | 18.582 | -0.053 |
| 3 | 16.775 | 18.593 | -0.048 |
| 4 | 21.773 | 18.605 | -0.081 |
| 5 | 5.872 | 13.722 | -0.182 |
| 6 | 10.861 | 13.673 | -0.128 |
| 7 | 15.852 | 13.685 | -0.126 |
| 8 | 20.840 | 13.697 | -0.179 |
| 9 | 4.243 | 9.001 | -0.264 |
| 10 | 9.216 | 8.968 | -0.195 |
| 11 | 14.196 | 8.984 | -0.198 |
| 12 | 19.170 | 8.994 | -0.265 |
| 13 | 2.036 | 4.524 | -0.352 |
| 14 | 6.993 | 4.524 | -0.227 |
| 15 | 11.967 | 4.542 | -0.231 |
| 16 | 16.923 | 4.546 | -0.350 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 5.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 10.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 15.000 | 0.000 | 0.000 |

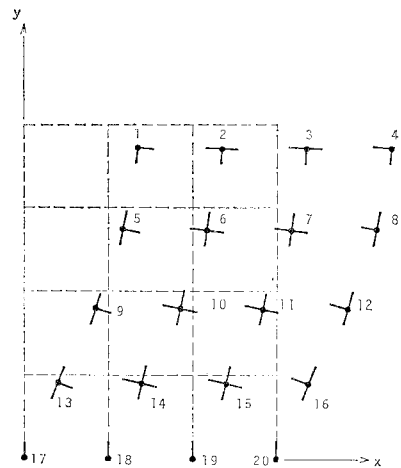


Fig. 6 Joint Position in Equilibrium for $P_x=9.877 t$

たが、その結果からは良好な変形力-変形の関係は得られなかった。それに関して以下のように考察することができる。

初期状態と強制変位 $\{\epsilon, \varphi_A, \varphi_B\}$ を受けた変形状態とを線形に結ぶ経路

$$\{\bar{\epsilon}(\rho), \bar{\varphi}_A(\rho), \bar{\varphi}_B(\rho)\} = \rho\{\epsilon, \varphi_A, \varphi_B\}, \quad 0 < \rho < 1$$

において、最終状態 $\rho=1$ において曲げ変形のみが大きい微小ひずみ有限変位の状態にあるとしても、経路上で

Table 2 Deformation and Deformation Force of Element for $F_x=9.877 t$

| No. | Deformation | | | Deformation Force in tm | | |
|-----|-------------|----------------|----------|-------------------------|---------|---------|
| | ϵ | ϕ_A | ϕ_B | HI | M_A | M_B |
| 1 | -0.00041 | -0.07690 | -0.04193 | -10.87 | -21.11 | -17.39 |
| 2 | -0.00021 | -0.05492 | -0.04987 | 1.68 | -17.32 | -16.77 |
| 3 | -0.00047 | -0.05012 | -0.08299 | 19.96 | -19.93 | -23.60 |
| 4 | -0.00220 | -0.17252 | -0.11836 | 28.35 | -50.68 | -44.61 |
| 5 | -0.00164 | -0.13082 | -0.12890 | 35.34 | -42.75 | -42.54 |
| 6 | -0.00245 | -0.12672 | -0.18175 | 52.25 | -48.15 | -54.29 |
| 7 | -0.00553 | -0.27731 | -0.18793 | 86.80 | -82.81 | -72.07 |
| 8 | -0.00382 | -0.19792 | -0.20131 | 91.53 | -66.39 | -66.80 |
| 9 | -0.00535 | -0.19999 | -0.26707 | 12.46 | -74.38 | -82.83 |
| 10 | -0.00865 | -0.35256 | -0.22742 | 121.53 | -105.16 | -89.61 |
| 11 | -0.00523 | -0.23090 | -0.23464 | 85.68 | -77.26 | -77.71 |
| 12 | -0.00882 | -0.23179 | -0.35099 | 78.78 | -89.64 | -103.65 |
| 13 | -0.00055 | 0.00007 | 0.09481 | 45.05 | 10.15 | 21.11 |
| 14 | -0.00111 | 0.05615 | 0.13170 | 6.82 | 26.46 | 34.70 |
| 15 | -0.00121 | 0.05948 | 0.13813 | 21.83 | 27.93 | 36.70 |
| 16 | -0.00078 | 0.00839 | 0.10720 | -37.32 | 13.53 | 23.60 |
| 17 | -0.00119 | 0.04616 | 0.14969 | 164.88 | 26.93 | 40.53 |
| 18 | -0.00320 | 0.14175 | 0.20806 | 25.08 | 53.53 | 60.91 |
| 19 | -0.00321 | 0.14067 | 0.21230 | 69.76 | 54.27 | 62.75 |
| 20 | -0.00190 | 0.07621 | 0.16188 | -128.96 | 33.45 | 40.77 |
| 21 | -0.00162 | 0.10552 | 0.17394 | 371.88 | 44.77 | 55.88 |
| 22 | -0.00633 | 0.23647 | 0.26913 | 44.09 | 81.24 | 84.93 |
| 23 | -0.00598 | 0.23415 | 0.26715 | 142.80 | 82.68 | 16.91 |
| 24 | -0.00335 | 0.11751 | 0.20264 | -293.65 | 44.80 | 49.39 |
| 25 | -0.00783 | <u>0.42301</u> | 0.07059 | <u>617.45</u> | 127.03 | 60.39 |
| 26 | -0.01121 | 0.41497 | 0.18770 | 4.16 | 109.52 | 85.63 |
| 27 | -0.01000 | 0.40866 | 0.17765 | 185.75 | 115.59 | 84.67 |
| 28 | -0.01275 | 0.40015 | 0.04994 | -490.42 | 63.09 | 58.85 |

微小ひずみの条件が満たされているとは限らない。

Fig. 3 の B 端での水平力 II を外して強制変位 φ_A, φ_B のみを与えたときの B 端の x 方向の縮みを ϵ_M と表すものとすると、 $\epsilon_M(\rho)$ の第 1 近似は、

$$\epsilon_M \approx -\frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{dy_G}{d\zeta} \right)^2 d\zeta$$

の関係式より、 ρ に関する 2 次式

$$\epsilon_M(\rho) \approx \{a(\varphi_A^2 + \varphi_B^2) + b\varphi_A\varphi_B\}\rho^2$$

で表され、前述の強制変位経路上で水平力 $II(\rho)$ があることにより生ずる ϵ を ϵ_H とすれば、 ϵ_M と ϵ_H の関係は **Fig. 7** のように表される。すなわち、最終状態において $\epsilon_H(1)$ が十分小さい値であっても、変形 φ_A, φ_B が大きい場合には経路上で $\epsilon_H(\rho)$ は有限でならねばならない。したがって、 $H(\rho)$ も経路上で $H(1)$ に比較してきわめて大きい値をもつことになり、そのような特異性のある関数 $H(\rho)$ が摂動法による収束解として求められることは疑問であり、少なくとも 3 次までの有限項では有効に表現できないといえる。

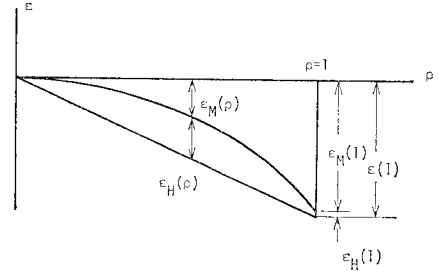


Fig. 7 $\epsilon_H(\rho)$ on Linear Path

ここで、要素長を有限とする実際の構造解析での式 (52・a~c) の変形力-変形関係の適用範囲を考える。3 次までの摂動解を用いた変形力-変形間の接線剛性 (式 (53), (54・a~f)) を用いれば両端ヒンジの直線はりの Euler 座屈荷重として

$$(HI^2/EI)_{cr.} = -10.25$$

が得られ、厳密解の $-\pi^2$ に対して 4% 程度の誤差を含む。2 次までの摂動解を用いた結果では同座屈荷重は

$$(HI^2/EI)_{cr.} = -12$$

となり、Hartz⁵⁾ の結果と一致する。はり要素の両端の回転を拘束したときに

$$HI^2/EI = -4\pi^2 (\approx -39.48)$$

で生じる Euler 座屈荷重は 1 要素の接線剛性からは得られない。式 (52・a) から得られる

$$\frac{\partial HI}{\partial(\varphi_B^2)} \Big|_{\varphi_A=\varphi_B=0} = EAI \left(\frac{1}{15} - \frac{11}{6300} \frac{HI^2}{EI} \right)$$

の関係を考えると、 $HI^2/EI > 38.18$ において

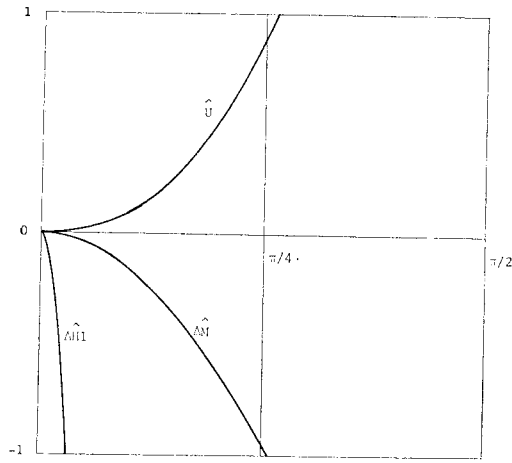
$$\frac{\partial HI}{\partial(\varphi_B^2)} \Big|_{\varphi_A=\varphi_B=0} < 0$$

となり、これは現実の力学的特性に反する。以上より、無次元量 HI^2/EI が $[-4\pi^2, 4\pi^2]$ 程度の範囲を外れる場合には式 (52・a~c) の関係は明らかに適用外にある。式 (52・a~c) の適用範囲を明確にするためには組織的な数値実験が必要であろうが、両端ヒンジの要素の座屈荷重の近似度より考えて HI に関しては $|HI^2/EI| < \pi^2$ 程度を満足する要素分割を行えば十分であろう。

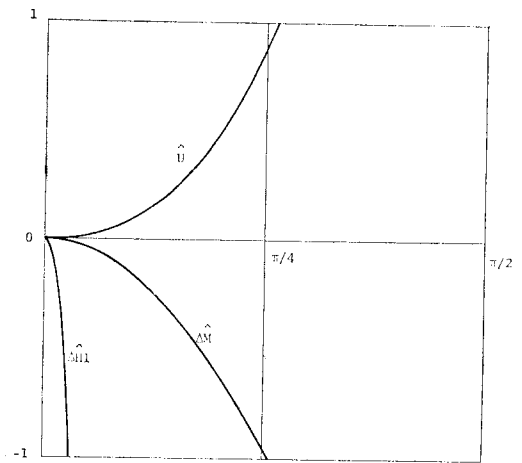
φ_A, φ_B の適用範囲について **Fig. 8, 9** を示す。**Fig. 8, 9** は、それぞれ、要素の水平力 $III=0, \pi^2 EI/2l$ に対して $\varphi (= \varphi_A = \varphi_B)$ を区間 $[0, \pi/2]$ で変化させたときの要素の無次元化されたひずみエネルギー \hat{U} 、および水平力、両端モーメントの誤差 $\Delta \hat{H}, \Delta \hat{M} (= \Delta \hat{M}_A = \Delta \hat{M}_B)$ を 1 次、2 次、3 次の摂動解について ((a), (b), (c) 図) 表したものである。無次元量 $\hat{U}, \Delta \hat{H}, \Delta \hat{M}$ は次のように数値計算している。最初に、与えられた HI, φ に対して各次数の摂動解により U, ϵ, M を求め、このときの ϵ, φ を強制変位として与える骨組としての数値解析 (20 等分割, 3 次解) を行うことにより ϵ, φ に対して数値的に厳密と考えられるひずみエネルギー U^* ,

水平力 $(HL)^*$ および両端モーメント M^* を得る。それにより、 \hat{U} , $\hat{\Delta HL}$, $\hat{\Delta M}$ の値を

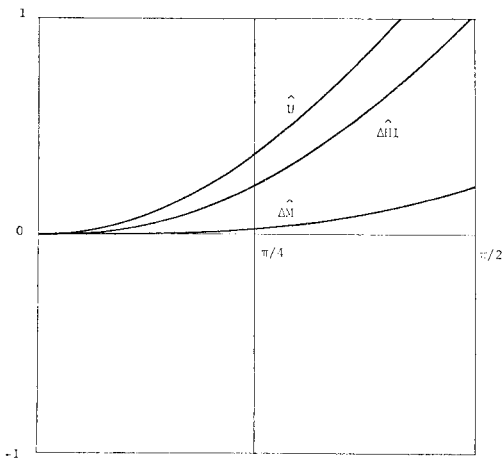
$$\hat{U} = \frac{U^*}{\frac{\pi^2 EI}{l}}, \quad \hat{\Delta HL} = \frac{(HL) - (HL)^*}{\frac{\pi^2 EI}{l}}$$



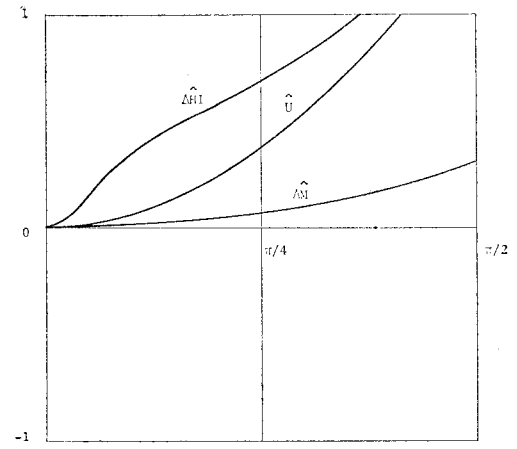
(a) 1st Approximation



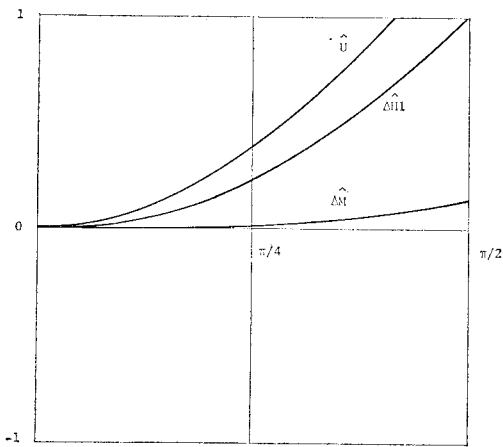
(a) 1st Approximation



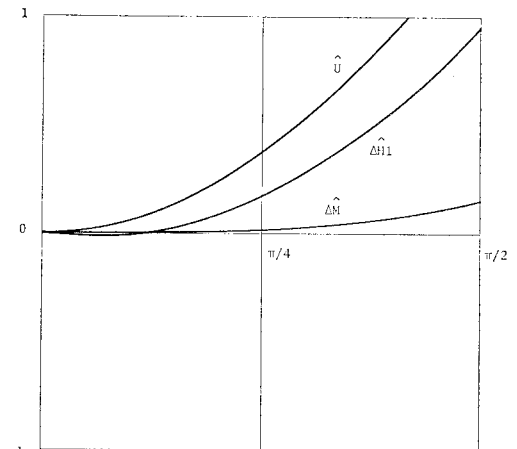
(b) 2nd Approximation



(b) 2nd Approximation



(c) 3rd Approximation



(c) 3rd Approximation

Fig. 8 Normalized Error for $HL=0$

Fig. 9 Normalized Error for $HL=\pi^2 EI/2l$

$$\Delta \hat{M} = \frac{M - M^*}{\frac{\pi^2 EI}{l}}$$

として定めた。以上の数値計算は長さ 10 m の 200×200 mm² の H 形鋼 (断面積=63.53 cm², 断面 2 次モーメント=4 720 cm⁴, 弾性定数=2 100 000 kg/cm²) に対して行っているが, 無次元量 Al^3/I の値が変われば \hat{U} , $\Delta \hat{H}$, $\Delta \hat{M}$ の相関性は変わる。

5. ま と め

変位法による構造解析では, 構造全体の連続系は節点位置を自由度とする離散系に置換され, 連続系としての基礎方程式は節点位置に関する代数方程式に変換される。いわゆる初期剛性のある一般の構造要素を構造中で考えれば, 要素の変形は節点での強制変位と要素上に作用する外力により生じていると考えることができるが, このとき要素の大きさを小さくしてゆく過程を考えると要素の変形は節点での強制変位により支配的に規定され要素上の外力の影響はしだいに小さくなる。構造全体の任意の外力条件に対して, 要素上の外力の影響が要素節点での強制変位による項に比較して微小と考えられる程度の要素分割のもとに, 外力をすべて節点上に集中化する変位法により連続系としての解に十分近い精度の解が得られるといえる。実際の構造解析では扱う自由度をできるだけ少なくして十分な精度の解を得ることが望まれるが, この 2 つの要求はあい矛盾するものであり, 本来無限自由度の連続系での未知量の分布を離散化して表すためには要求される精度に呼応してある程度の要素分割を必要とする。その要素分割数は, 微小変位問題であるか有限変位問題であるかを問わず, 離散化のためには本質的に必要とされる自由度数といえる。

幾何学的非線形問題の変位法による解析を, 本文で述べているような要素の変位自由度を剛体変位の自由度と変形の自由度に分解する手法で行うものとする, 要素の変形力-変形関係は, 元来は非線形な関係であるが, 一般に要素の大きさを小さくすれば微小変位理論と同様の線形関係に近づくものと思われる。系の幾何学的な非線形性は, 要素の変形-節点位置, および節点力-変形力間の非線形代数関係に集約されることになる。変形力-変形関係に含まれる打切誤差は前述したように分割数を多くすることにより克服されるが, 非線形性をまったく含まない変形力-変形関係を用いて十分な精度の解を得るためには細かい要素分割を必要とする。変形力-変形関係の非線形性と要素分割数とは相補的な関係にあり, 要求される解の幾何学的非線形性に関する精度のもとに与えられた変形力-変形関係に対応して必要とされ

る要素分割数が定まると考えてよい。この非線形性に対する必要分割数が前述した離散化のために必要とされる分割数と同程度であるような非線形性を含む変形力-変形関係が得られれば, 幾何学的非線形性の問題は解決されたといえるものと思われる。それ以上の非線形関係を求めることは, 解析上の興味は残すが, 適当な自由度の離散系に変換して前述したような変位法を適用する手法では系全体の解析の統一性より考えて必要としない。

6. おわりに

本研究は文部省科学研究費の補助を受けている。本論文集の頁数規定の制約上, 具体的な展開を詳細に記載することができなかった。また, 要素分割の無限小極限での解の収束に関する節等も校正の段階で削除した。それらについては著者の学位論文²⁶⁾を参照されたい。

補遺 1 軸曲げ有限変位問題の基礎方程式

面内はりの有限変位有限ひずみ問題としての基礎方程式については, 曲げせん断変形を考慮した曲線はりに関して Reissner¹⁹⁾ の報告があり, 曲げせん断変形を考えない直線はりに関する報告として西野ら²³⁾のものがある。ここでは, 曲げせん断変形を考えない曲線はりを対象として, 西野らが採用している Green のひずみテンソルによる軸方向直ひずみの表示に代えて, 長手方向物体固定座標に関する伸び率をひずみパラメーターとした場合の有限ひずみ問題としての基礎方程式の定式化を考える。

2次元面内に空間座標として直交デカルト座標 $\{x, y\}$ を考え, x, y -方向の単位ベクトルを $\{\mathbf{i}_{(xy)}\} = \{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y\}$ と表すものとする。無応力状態のはりの重心線の長さに沿って ζ -座標, ζ とは直角な方向の断面の長さに沿って η -座標を定め, $\{\zeta, \eta\}$ を物体固定座標とする。

はりの重心線の空間形状を, ζ -座標を独立変数として,

$$\mathbf{r}_G(\zeta) = \langle x_G(\zeta), y_G(\zeta) \rangle \{\mathbf{i}_{(xy)}\} \dots \dots \dots (A1)$$

と表すものとする (Fig. A1)。はりの変形に関する Euler-Bernoulli の仮定のもとに, ζ, η -方向の単位ベクトル $\{\mathbf{i}_{(\zeta\eta)}\} = \{\mathbf{i}_\zeta, \mathbf{i}_\eta\}$ は式 (A1) の ζ に関する微係数を用いて,

$$\{\mathbf{i}_{(\zeta\eta)}\} = \frac{1}{g_G} \begin{bmatrix} x_G' & y_G' \\ -y_G' & x_G' \end{bmatrix} \{\mathbf{i}_{(xy)}\} \dots \dots \dots (A2)$$

と表される。ここに,

$$g_G = \sqrt{(x_G')^2 + (y_G')^2} \dots \dots \dots (A3)$$

であり, 記号 ()' は ζ に関する微分を表す。また,

Fig. A1 に示すたわみ角 $\theta(\zeta)$ は,

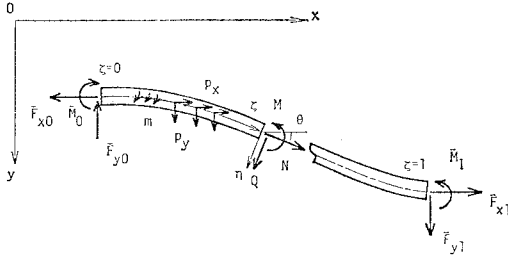


Fig. A 1 Two-Dimensional Beam Element

$$\theta(\zeta) = \arctan(y_G'/x_G') \dots\dots\dots (A4)$$

と表される。式 (A 2) で与えられる η -方向の単位ベクトル i_η を用いて、はりの任意の物質点 $\{\zeta, \eta\}$ の空間位置は

$$r(\zeta, \eta) = \langle x_G, y_G \rangle + \frac{\eta}{g_G} \langle -y_G', x_G' \rangle \{i_{(xy)}\} \dots\dots\dots (A5)$$

と与えられることになり、運動場が定まる。運動場において $\{\zeta, \eta\}$ 座標に関する Green のひずみテンソルを考えると、 $e_{\zeta\zeta}$ 以外のひずみテンソル成分は生じない。ここで、 $g(\zeta, \eta)$ を $g = |r'|$ で定義するものとする、式 (A 5) を展開して、

$$g(\zeta, \eta) = g_G - \eta \frac{-y_G' x_G'' + x_G' y_G''}{g_G^2} \dots\dots\dots (A6)$$

と表される。 ζ -方向の計量テンソル成分 $g_{\zeta\zeta}$ は $g_{\zeta\zeta} = g^2$ であり、 $e_{\zeta\zeta}$ は $e_{\zeta\zeta} = (g^2 - g_0^2)/2$ で与えられるが、ここでは $\{\zeta, \eta\}$ の物質点の ζ -座標に関する伸び率 $\epsilon_{\zeta\zeta} = g - g_0$ での変形を表すものとする。ここに、記号 ()₀ は初期状態での物理量を意味する。式 (A 6) より、 $\epsilon_{\zeta\zeta}$ は

$$\epsilon_{\zeta\zeta}(\zeta, \eta) = \epsilon_G - \eta(\kappa - \kappa_0) \dots\dots\dots (A7)$$

$$\epsilon_G = g_G - 1 \dots\dots\dots (A8 \cdot a)$$

$$\kappa = \frac{-y_G' x_G'' + x_G' y_G''}{g_G^2} \dots\dots\dots (A8 \cdot b)$$

と与えられることになる。

ζ -方向の直ひずみのみが生じる式 (A 5) の運動場において、応力は ζ -方向の直応力 $\sigma_{\zeta\zeta}$ のみが生ずるものとし、 $\sigma_{\zeta\zeta}$ は $\epsilon_{\zeta\zeta}$ が有限であっても E を弾性定数として、

$$\sigma_{\zeta\zeta} = E \epsilon_{\zeta\zeta} \dots\dots\dots (A9)$$

と表されるものと仮定する。

式 (A 5) の運動場でののはりの仮想仕事の式は、断面寸法が初期状態における重心線の曲率半径に比較して十分小さいという条件のもとに、

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_A \sigma_{\zeta\zeta} \delta \epsilon_{\zeta\zeta} d(\text{area}) d\zeta \\ &= \int_0^l \int_A (\bar{p}_x d \delta x + \bar{p}_y d \delta y) d(\text{area}) d\zeta \\ &+ \left[\int_A (\bar{q}_x d \delta x + \bar{q}_y d \delta y) d(\text{area}) \right]_0^l \dots\dots\dots (A10) \end{aligned}$$

と与えられる。ここに、 A, l ははりの断面積、初期状態での重心線の長さを表しており、 $\{\bar{p}_x d, \bar{p}_y d\}$ は $\zeta \times \eta$ の単位当りに作用する $\{x, y\}$ -方向の体積力を、 $\{\bar{q}_x d, \bar{q}_y d\}_{\zeta=0, \text{or } l}$ は $\zeta=0, \text{ or } l$ の端面において η の単位当りに作用する表面力をそれぞれ表す。微小な仮想変位 $\{\delta x_G, \delta y_G\}$ による各物理量の増分は、式 (A 3), (A 4), (A 7) および (A 8・a, b) の変分を考えて、

$$\delta \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \delta \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix} - \delta \theta \frac{\eta}{g_G} \begin{Bmatrix} x_G' \\ y_G' \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (A11)$$

$$\delta \epsilon_{\zeta\zeta} = \delta \epsilon_G - \eta \delta \kappa \dots\dots\dots (A12)$$

$$\delta \epsilon_G = \frac{x_G' \delta x_G' + y_G' \delta y_G'}{g_G} \dots\dots\dots (A13 \cdot a)$$

$$\delta \kappa = \delta(\theta') = (\delta \theta)' \dots\dots\dots (A13 \cdot b)$$

$$\delta \theta = \frac{x_G' \delta y_G' - y_G' \delta x_G'}{g_G^2} \dots\dots\dots (A14)$$

と表すことができる。式 (A 11)~(A 14) を式 (A 10) に代入した後、断面の合応力 N, M を

$$N = \int_A \sigma_{\zeta\zeta} d(\text{area}) \dots\dots\dots (A15 \cdot a)$$

$$M = \int_A \sigma_{\zeta\zeta} \eta d(\text{area}) \dots\dots\dots (A15 \cdot b)$$

で定義し、さらに、 $\{\bar{p}_x, \bar{p}_y\}, m^*$ および $\{\bar{F}_x, \bar{F}_y\}_{\zeta=0, \text{or } l}, M_{\zeta=0, \text{or } l}^*$ を

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} \bar{p}_x d \\ \bar{p}_y d \end{Bmatrix} d(\text{area}) \dots\dots\dots (A16 \cdot a)$$

$$m^* = - \int_A \frac{\eta}{g_G} (\bar{p}_x d x_G' + \bar{p}_y d y_G') d(\text{area}) \dots\dots\dots (A16 \cdot b)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \end{Bmatrix}_{\zeta=0, \text{or } l} = \int_A \begin{Bmatrix} \bar{q}_x d \\ \bar{q}_y d \end{Bmatrix}_{\zeta=0, \text{or } l} d(\text{area}) \dots\dots\dots (A17 \cdot a)$$

$$M_{\zeta=0, \text{or } l}^* = - \int_A \frac{\eta}{g_G} (\bar{q}_x d x_G' + \bar{q}_y d y_G')_{\zeta=0, \text{or } l} d(\text{area}) \dots\dots\dots (A17 \cdot b)$$

で定義するものとして、部分積分を繰り返すことにより、

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \left[\left(N \frac{x_G'}{g_G} - \frac{M' - m^*}{g_G} \cdot \frac{y_G'}{g_G} \right)' + \bar{p}_x \right] \delta x_G \\ &+ \left[\left(N \frac{y_G'}{g_G} + \frac{M' - m^*}{g_G} \cdot \frac{x_G'}{g_G} \right)' + \bar{p}_y \right] \delta y_G \Big] d\zeta \\ &+ \left[\left(N \frac{x_G'}{g_G} - \frac{M' - m^*}{g_G} \cdot \frac{y_G'}{g_G} \right) - \bar{F}_x \right] \delta x_G \\ &+ \left[\left(N \frac{y_G'}{g_G} + \frac{M' - m^*}{g_G} \cdot \frac{x_G'}{g_G} \right) - \bar{F}_y \right] \delta y_G \\ &+ \{M - M^*\} \delta \theta \Big]_{\zeta=0}^l = 0 \dots\dots\dots (A18) \end{aligned}$$

が得られる。式 (A 16・a, b), (A 17・a, b) で表される $\{\bar{p}_x, \bar{p}_y\}, m^*$ および $\{\bar{F}_x, \bar{F}_y\}_{\zeta=0, \text{or } l}, M_{\zeta=0, \text{or } l}^*$ は、

体積力および表面力を重心線上に集中化した合力としての力やモーメントであり、 m^* , $M_{\zeta=0,orl}^*$ は変形後のたわみ角 θ に依存して定まる。ここで、はりに作用する外力は重心線上に集中化した力およびモーメントが直接与えられるものとし、 m^* , $M_{\zeta=0,orl}^*$ を \bar{m} , $\bar{M}_{\zeta=0,orl}$ と表すものとすれば、式 (A 18) より、つり合い式は、

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{gG} \begin{bmatrix} x_{G'} & -y_{G'} \\ y_{G'} & x_{G'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M' - \bar{m} \end{bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (A19)$$

として求まり、力学的境界条件は、

$$\frac{1}{gG} \begin{bmatrix} x_{G'} & -y_{G'} \\ y_{G'} & x_{G'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M' - \bar{m} \end{bmatrix} \Big|_{\zeta=0,orl} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \end{Bmatrix} \Big|_{\zeta=0,orl} \dots\dots\dots (A20 \cdot a)$$

$$M|_{\zeta=0,orl} = \bar{M}|_{\zeta=0,orl} \dots\dots\dots (A20 \cdot b)$$

と求まることになる。

式 (A 20・a, b) に対応する幾何学的境界条件は、

$$\begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix} \Big|_{\zeta=0,orl} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_G \\ \bar{y}_G \end{Bmatrix} \Big|_{\zeta=0,orl} \dots\dots\dots (A21 \cdot a)$$

$$\arctan \left(\frac{y_{G'}}{x_{G'}} \right) \Big|_{\zeta=0,orl} = \bar{\theta} \Big|_{\zeta=0,orl} \dots\dots\dots (A21 \cdot b)$$

と表される。

合応力と一般化ひずみの関係は、式 (A 7) を式 (A 9), (A 15・a, b) に代入して積分することにより、

$$N = EA\epsilon_G \dots\dots\dots (A22 \cdot a)$$

$$M = -EI(\kappa - \kappa_0) \dots\dots\dots (A22 \cdot b)$$

と表される。ここに、 I は断面 2 次モーメントを表す。

以上の曲げせん断変形を含まない面内はりの有限変位問題の定式化において、はりの直ひずみを Green のひずみテンソル成分 $e_{\zeta\zeta}$ で表すものとすれば、 $e_{\zeta\zeta}$ は η に関する 2 次式となり、直応力 $\sigma_{\zeta\zeta}$ が $e_{\zeta\zeta}$ と線形関係にあるとした場合の有限ひずみ問題において断面の合応力表示は微小ひずみ問題とは異なる結果となる²³⁾。一方、本文で行っているように直ひずみを規定する量として ζ -座標に関する伸び率 $\epsilon_{\zeta\zeta}$ を採用するものとすれば、直応力 $\sigma_{\zeta\zeta}$ が $\epsilon_{\zeta\zeta}$ と線形関係にあるものとして、有限ひずみ問題においても $\sigma_{\zeta\zeta}$ は微小ひずみ問題と同様に断面で線形分布することとなり、断面の合応力は軸力とモーメントで表されることになる。

参 考 文 献

1) Livesley, R.K. : The Application of An Electronic Digital Computer to Some Problems of Structural Analysis, The Structural Engineer, Vol. 34, No. 1, London, England, pp. 1~12, 1956.
 2) Saafan, S.A. : Nonlinear Behavior of Structural Plane Frames, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 89, No. ST 4,

Proc. Paper 3615, pp. 557~579, Aug., 1963.
 3) Saafan, S.A. : closure to "Nonlinear Behavior of Structural Frames", J. of Str. Div., ASCE, Vol. 91, No. ST 1, Proc. Paper 3615, pp. 279~281, Feb., 1965.
 4) Merchant, W. and P.M. Brotton : A Generalized Method of Analysis of Elastic Plane Frames, IABSE, Symposium, Rio de Janeiro, Brazil, 1964.
 5) Hartz, B.J. : Matrix Formulation of Structural Stability Problems, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 91, No. ST 6, Proc. Paper 4572, Dec., 1965.
 6) Schmit, L.A., F.K. Bogner and R.L. Fox : Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Shell Discrete Elements, AIAA J., Vol. 6, No. 5, pp. 781~791, May, 1968.
 7) Conner, J.J., R.D. Logcher and S.C. Chan : Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 94, No. ST 6, Proc. Paper 6011, pp. 1525~1547, June, 1968.
 8) Mallet, R.H. and P.V. Marcal : Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 94, No. ST 9, Proc. Paper 6115, pp. 2081~2105, Sept., 1968.
 9) Murray, D.W. and E.L. Wilson : Finite Element Large Deflection Analysis of Plates, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 95, No. EM 1, Proc. Paper 6398, pp. 143~165, Feb., 1969.
 10) Brebbia, C., and J. Conner : Geometrically Nonlinear Finite-Element Analysis, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 95, No. EM 2, Proc. Paper 6516, pp. 463~483, Apr., 1969.
 11) Murray, D.W. and E.L. Wilson : Finite-Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates, AIAA J., Vol. 7, No. 10, Oct., 1969.
 12) Powell, G.H. : Theory of Nonlinear Elastic Structures, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 95, No. ST 12, Proc. Paper 6943, pp. 2687~2701, Dec., 1969.
 13) Dawe, D.J. : A Finite-Deflection Analysis of Shallow Arches by Discrete Element Method, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 3, pp. 529~552, 1971.
 14) 大地幸三 : 構造解析とコンピュータ, 産業図書, 1971.
 15) Yang, T.Y. : Finite Displacement Plate Flexure by the Use of Matrix Incremental Approach, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 4, pp. 415~432, 1972.
 16) Reissner, E. : On One-Dimensional Finite-Strain Beam Theory, ZAMP, Vol. 23, pp. 795~804, 1972.
 17) Colville, J. and E.B. Becker : Large Displacement Analysis of Thin Plates, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 99, No. ST 3, Proc. Paper 9593, pp. 349~364, March, 1973.
 18) Oran, C. : Tangent Stiffness in Plane Frames, J. of Str. Div., ASCE, Vol. 99, pp. 973~985, June, 1973.
 19) Vos, R.G., and W.P. Vann : A Finite Element Tensor Approach to Plate Buckling and Postbuckling, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 5, pp. 351~365, 1973.
 20) 土木工学における数値解析/変形応力解析編, 土木学会編, サイエンス社, 1974.
 21) 篠崎 武 : 平面骨組の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 224, pp. 47~53, 1974.
 22) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗 : 接線剛性法による骨組構造物の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 238, pp. 31~42, 1975.

- 23) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 237, pp. 11~26, 1975.
- 24) 小松定夫・北田俊夫・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，No. 244, pp. 1~14, 1975.
- 25) 阿井正博・西野文雄：平面骨組の幾何学的非線形問題に関する一手法，土木学会第33回年次学術講演会講演概要集，第1部，1978-9.
- 26) 阿井正博：1次元構造要素の幾何学的非線形問題について，東京大学工学系研究科学位論文，1979-3.

(1979.7.9・受付)
