

補剛アーチの幾何学的非線形性

GEOMETRICAL NONLINEARITY OF STIFFENED ARCHES

前田 幸雄*・林 正**

By Yukio MAEDA and Masa HAYASHI

1. 緒 言

補剛アーチの架設例は多いが、その幾何学的非線形性状はあまり調べられていないようである。複雑な形状を有する補剛アーチでも、マトリックス解析法を用いれば座屈荷重や種々の荷重による変形の影響を調べることは困難なことではない。しかし、きわめて多様な構造形式が存在する補剛アーチの非線形性状を簡単な式で一般的に表すことは難しいために、いままで非線形性に関する統一的な研究が行われなかった理由の1つであると考えられる。

補剛アーチの代表的な形式である外的静定な下路式のローゼ桁やランガー桁では、補剛桁に大きな引張力が生じるために幾何学的非線形性はほとんど現れない。この種の補剛アーチの座屈性状に関して、平井・倉西¹⁾や Pfüger²⁾の研究があるが、通常的设计荷重強度に対して座屈強度がきわめて大きく、かつ全体座屈は起きにくいことから、設計において幾何学的非線形性の照査を行う必要はないと考えられる。

補剛桁とアーチリブが支材によって重ねばりのように結合された逆ローゼ桁の座屈強度については、Dischinger が求めた近似式^{2),3)}があるが、ライズ比の影響は考慮されていない。

上路式補剛アーチの幾何学的非線形性は、安藤・成岡⁴⁾によって調べられたことがある。この報告では、桁とアーチリブとの剛比と支間長を変化させて計算しているが、計算例の数が少ないことと計算で無次元表示が用いられていないために、この種のアーチの一般的な非線形性状は理解しにくい。また、補剛桁の一端をヒンジで固定した形式については、荒井・大森⁵⁾が簡略計算により変形の影響を調べており、桁の水平移動を拘束するこ

とによって非線形性を抑制することができることを報告している。

本報告は、桁とアーチを剛結した上・中路式補剛アーチの幾何学的非線形性について研究したものである。基本的な構造形式として桁に軸力が生じない形式と、桁の一端を固定して水平移動を拘束した形式を扱った。研究結果に一般性をもたせるために非線形性に関する無次元量を選び出し、これをパラメーターとして数値計算を行う。計算にはマトリックス解析法^{7),8)}を用いて、補剛桁の取り付け位置、支承条件および上述のパラメーターの値を変化させてその影響を調べることにする。

まず、これらのアーチの概略的な幾何学的非線形性状を知るために線形座屈強度を調べた。周知のように、固有値問題として扱う線形座屈解析⁷⁾では、活荷重等による骨組形状の変化により生じる非線形性を調べることはできないが、その非線形性の概略的な性状は座屈強度を基準値として判断することができる。また、本研究では、いわゆる変形の影響を調べるために座屈荷重を基準量としたパラメーターを用いるので、各種のアーチについてその座屈荷重または座屈係数を知る必要がある。種々の補剛アーチについての計算結果より、桁に軸力が生じない補剛アーチの座屈係数の実用算定式として、アーチリブと補剛桁との曲げ剛性比の影響を考慮した精度のよい近似式を提示する。

変形の影響による非線形性の照査は道路橋示方書⁴⁾で規定されているが、設計においてこの影響を考慮すべき限界値として与えられている値について疑義があることをリブアーチの場合について指摘した⁹⁾。特に、本研究で扱うような補剛アーチについては、示方書で限界値の算出の根拠とした式がリブアーチに対する近似式であることから、座屈係数の値も含めて厳密な解法を用いて限界値の精度を調べる必要があると考えられる。

本報告では、リブアーチの場合に用いたのと同じく⁹⁾、有限変位解析⁹⁾による厳密な非線形計算を用いたパラメ

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系

トリック解析により変形の影響を調べる。すなわち、桁に軸力が生じない各種の補剛アーチの曲げモーメントとたわみに生じる非線形性を、アーチリブの形状、剛性と死・活荷重強度に関する無次元パラメータの種々の値に対して定量的に求め、一般性のある非線形挙動を明らかにする。そして、この有限変位解析による計算結果を算出根拠とする妥当な限界値を求める。限界値の算定式には活荷重強度による影響を考慮しているの、死荷重強度のみで規定する限界値より合理的な設計基準になる。

2. 構造形式

補剛アーチには種々の形式が存在するが、本研究では図-1 に示すような補剛桁とアーチリブが剛結された上路式と中路式のアーチを考える。

図-1 のように、補剛桁の位置によって A, B, C の 3 つの形式に分類した。アーチリブの形状は放物線とし、アーチリブと補剛桁はともに等断面とした。アーチリブの支承条件は両端固定と両端ヒンジの場合を考え、このようなアーチを固定式および 2 ヒンジ式補剛アーチとよぶことにする。また、桁に関しては両端ローラー支持の場合と、一端ヒンジで他端ローラー支持の場合を考察する。この補剛桁の一端がヒンジで支持された形式には * 印を用いて区別することにし、A*, B*, C* で表す。なお、補剛桁のない固定リブアーチと 2 ヒンジリブアーチを、それぞれ F-type, H-type と略記する。

A, B, C-type では鉛直荷重により桁に軸力はほとんど生じないが、桁の水平移動が拘束された A*, B*, C*-type では偏載荷重により桁の一部に大きな軸力が生じる。

数値計算ではアーチリブを水平射影長に対して 20 等分割し、節点に 0 から 20 までの番号をつけた。また、各節点には支柱（または吊材）を鉛直方向に配置した。

3. 座屈性状

座屈計算では、次の無次元量を用いた。

$$n = f/L, \lambda = L\sqrt{A/I} \dots\dots\dots(1\cdot a, b)$$

$$\alpha = H_{cr}L^2/EI \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 n はライズ比、 λ はアーチリブと補剛桁に関する細長比、 α は座屈係数²⁾で H_{cr} は限界水平反力、 E はヤング係数である。なお、全載等分布荷重 w による座屈荷重 w_{cr} は近似的に次式で与えられる。

$$w_{cr} = 8 \alpha n EI/L^3 \dots\dots\dots(3)$$

式 (1・b) と (2) の断面積 A と断面 2 次モーメント I には、それぞれアーチリブと補剛桁の値の和を用いるも

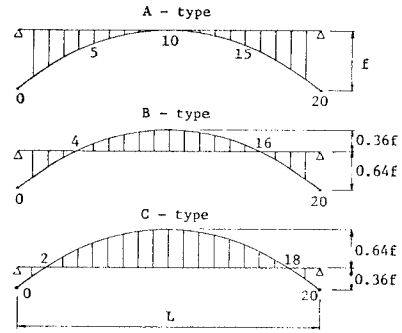


図-1 構造形式

表-1 2 ヒンジ式アーチの座屈係数

($A_A/A_G=1/1, \lambda=200$)

Type	I_A/I_G	n			
		0.1	0.15	0.2	0.3
H	1/0	36.4	32.9	28.9	20.7
A	3/1	36.5	33.2	29.3	21.5
	1/1	36.7	33.6	30.0	22.6
	1/3	36.9	34.0	30.6	23.6
B	3/1	36.5	33.3	29.4	21.7
	1/1	36.7	33.7	30.1	22.8
	1/3	36.9	34.1	30.7	23.8
C	1/3	36.7	33.5	29.8	22.0
	1/1	36.9	34.0	30.4	23.2
	1/3	37.1	34.4	31.1	24.2

表-2 固定式アーチの座屈係数

($A_A/A_G=1/1, \lambda=200$)

Type	I_A/I_G	n			
		0.1	0.15	0.2	0.3
F	1/0	76.1	70.9	64.4	50.0
A	3/1	73.9	68.6	62.2	48.2
	1/1	69.9	64.6	58.2	44.7
	1/3	61.7	56.4	50.4	38.1
B	3/1	74.2	69.0	62.6	48.5
	1/1	70.6	65.4	59.2	45.7
	1/3	62.8	57.7	51.7	39.4
C	3/1	75.2	70.8	65.2	52.2
	1/1	72.0	67.6	62.1	49.5
	1/3	64.4	60.0	54.5	42.5

のとする。すなわち、アーチリブの値には添字 A を、補剛桁の値には G を用いて表せば、 A と I は次式で与えられる。

$$A = A_A + A_G, I = I_A + I_G \dots\dots\dots(4\cdot a, b)$$

座屈荷重にはリブと桁の曲げ剛性比の値が影響するので、断面 2 次モーメント比には次の値を用いた。

$$I_A/I_G = 3/1, 1/1, 1/3 \dots\dots\dots(5)$$

断面積比と細長比はのちほど説明するように (表-4, 5 参照)、座屈荷重にほとんど影響しないので大部分の計算では、

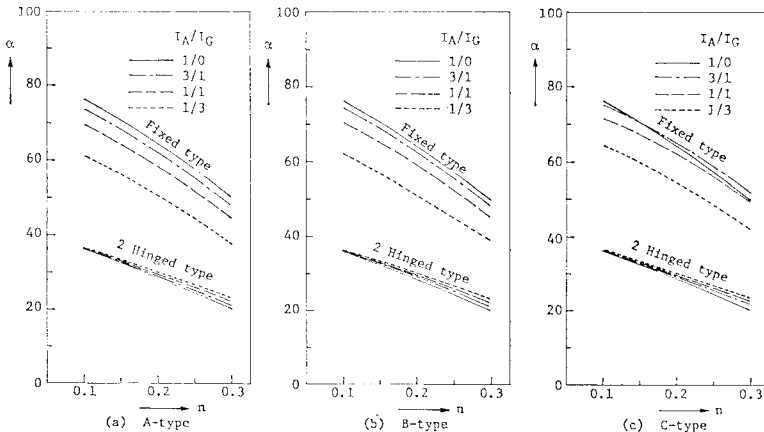


図-2 A, B, C-type の座屈係数

$$A_A/A_G=1/1, \lambda=200$$

とした。また、支柱の伸び剛性も影響しないので、断面積は式(4・a)のAの1/20とし、曲げ剛性は無視した。

荷重は、全載等分布荷重をアーチリブと補剛桁に2分して載荷した。なお、座屈荷重は通常の幾何剛性行列¹⁾を用いた固有値問題の解として求めた。

まず、桁に軸力が生じないA, B, C-typeの座屈係数を求める。種々のライズ比に対する計算結果を表-1, 2に示す。このときの断面積比は1/1, 細長比は200である。この値を図-2に示した。

表-1と図-2から、アーチリブの両端がヒンジである2ヒンジ式補剛アーチでは、線形座屈荷重に及ぼす補剛桁の位置および曲げ剛性比の影響は少ないことがわかる。

一方、アーチリブを固定支持にした形式では桁の位置による影響は少ないが曲げ剛性比の影響はかなり現れており、アーチリブの剛性が小さくなるに従って2ヒンジアーチの挙動に近づくために座屈荷重は減少する(図-5(a)参照)。表-2の値では、F-typeに比べて剛性が1/3のA-typeが最大24%低くなっている。しかし、剛性が1/1の場合には、表-2のすべての形式について座屈荷重の減少率は10%以内であり、3/1の場合には4%以内である。

なお、計算結果の精度は、表-1, 2に示したリブアーチの値をStüssiが求めた値²⁾、または示方書に示されている表-3の値³⁾と比べてその差はわずかであるので問題は無いといえる。

座屈係数に及ぼす細長比と、リブと桁との断面積比の

表-3 リブアーチの座屈係数

$n=f/L$	0.1	0.15	0.2	0.3
2 Hinged Arch	36.0	32.0	28.0	20.0
Fixed Arch	76.0	69.5	63.0	48.0

影響を調べるために固定式アーチについて若干の計算を行った。計算結果の一部を表-4と5に示した。固定リブアーチおよび上・中路式補剛アーチについてはこれらの影響はほとんど現れない。しかし、このことがすべてのアーチについていえないことを示すために、外的静定な下路式補剛アーチ(D-type)の座屈係数の値を表-4, 5に併記した。表中の曲げ剛性比が0/1のD-typeが下路式ランガー桁, 1/1が下路式ローゼ桁である。これらの補剛アーチでは

全体座屈の現象は起きず、1次の座屈モードには節が多く現れて、あたかも高次モードのような形状を示す^{注1)}。タイドアーチでも全体座屈は起きないことが報告されている³⁾。なお上述のD-typeについて曲げ剛性比の影響を調べたが、式(5)の範囲では1~10%程度であった。

表-4 固定式アーチの座屈係数 ($A_A/A_G=1/1$)

Type	I_A/I_G	$n=0.1$			$n=0.3$		
		λ			λ		
		100	200	300	100	200	300
F	1/0	75.88	76.10	76.14	49.87	49.99	50.01
A	1/1	67.16	69.88	70.86	41.98	44.70	46.06
C	1/1	70.23	71.95	72.42	47.66	49.51	50.38
D	0/1	64.59	248.4	528.4	20.63	81.33	93.37
	1/1	297.7	494.4	611.1	70.01	79.62	82.11

表-5 固定式アーチの座屈係数 ($\lambda=200$)

Type	I_A/I_G	$n=0.1$			$n=0.3$		
		A_A/A_G			A_A/A_G		
		1/3	1/1	3/1	1/3	1/1	3/1
A	1/1	69.70	69.88	69.94	44.60	44.70	44.73
C	1/1	71.82	71.95	71.98	49.37	49.51	49.55
D	0/1	127.4	248.4	363.9	41.06	81.33	91.28
	1/1	393.7	494.4	549.9	75.94	79.62	80.93

注1) ローゼ桁の座屈については、エネルギー法による研究³⁾がある。この文献1)で用いられている無次元量 ϕ を次式のように変形することができる。

$$\phi = \frac{E_h A_h L^3}{E I_s} = \frac{1}{\rho} \nu^2 \left(E \equiv E_h, \rho = \frac{s}{L}, \nu = \frac{A_h}{A}, \lambda = L \sqrt{\frac{A}{I}} \right)$$

ここに、sは格間長、添字hは吊材に関する量を表し、AとIは等断面リブの場合には式(4)の値に等しい。なお、表-4, 5のD-typeの場合には $\rho = \nu = 1/20$ であるので、 $\phi = \lambda^2$ になる。

文献1)の図-2・39によれば、 $n=0.2, I_A/I=0.09$ の下路式ローゼ桁の座屈係数 α は、 $\sqrt{\phi} < 300$ のときには α は $\sqrt{\phi}$ の値に比例し、このときの座屈変形は高次モードになることが示されている。したがって、 $\nu/\rho = \text{const.}$ の場合には、 α は $\sqrt{\phi} = \lambda$ に比例して増大することがわかる。

また、支柱（または吊材）の伸び剛性を $10^{-1} \sim 10$ 倍の範囲で変化させてその影響を調べたが注2), A, B-type ではライズ比により座屈係数に数パーセントから十数パーセント程度の影響が現れたのに対し、D-type では数倍の差が生じた。曲げ剛性比と吊材の伸び剛性に関する D-type の座屈性状は、文献 1) による結果と同じ性状である注3)。

D-type の下路式補剛アーチの弾性座屈荷重は、通常設計荷重の数十倍になり、活荷重による変形の影響もほとんど現れない。したがって、弾性領域における D-type の非線形挙動を詳しく調べる必要はないと考えられるが、線形座屈解析は幾何学的非線形性を調べるための近似解法であるので、座屈解析による精度を確かめるために有限変位解析により、より厳密な分岐座屈荷重を求める。計算結果を付録に示す。

次に、補剛桁の一端をヒンジで固定した A*, B*, C*-type の座屈性状を調べる。座屈係数の値を表-6 に示す。表-1, 2 の A, B, C-type の値と比較して、桁の水平移動を拘束したことによる効果は明らかであり、特に 2 ヒンジ形式の補剛アーチでは座屈係数は 2.3~4.4 倍になる。またその効果は、B*-type で最も顕著である。A*, B*, C*-type では、A, B, C-type とは異なり、桁の取り付け位置による差が現れている。さらに、B*, C*-type では、アーチリブの支承条件による差は少なく、かつリブと桁の曲げ剛性比の影響も少ないことがわかる。

表-6 の座屈係数を、

表-6 A*, B*, C*-type の座屈係数

$$(A_A/A_G=1/1, \lambda=200)$$

Type	I_A/I_G	2 Hinged type arch				Fixed type arch			
		$n=f/L$				$n=f/L$			
		0.1	0.15	0.2	0.3	0.1	0.15	0.2	0.3
A*	3/1	81.6	74.7	66.4	49.3	119.8	112.8	102.8	79.9
	1/1	82.0	75.6	67.8	51.5	114.2	106.9	97.0	75.2
	1/3	82.3	76.3	68.9	53.3	104.5	97.0	87.6	67.6
B*	3/1	128.4	127.0	118.6	94.7	132.9	138.7	135.6	118.5
	1/1	128.6	127.9	120.3	98.0	132.5	137.6	134.1	116.9
	1/3	128.6	128.3	121.4	100.0	131.5	135.0	130.5	112.4
C*	3/1	90.2	93.9	91.7	80.9	93.0	94.4	92.8	83.5
	1/1	90.4	94.5	92.9	83.6	93.3	95.1	93.8	85.6
	1/3	90.4	94.9	93.8	85.8	93.0	95.4	94.4	87.0

注 2) マトリックス法による解析では、節点間の局部座屈（部材座屈）は考慮していない。

注 3) 下路式補剛アーチの座屈変形は、中央径間部の数パネルのせん断座屈のような形状であるので（付録、図-B参照）、図-Aの破線のような変形に対しては、アーチリブと吊材の伸び剛性が座屈に寄与する。

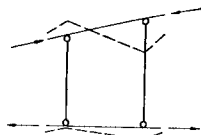


図-A

$$A_A/A_G=I_A/I_G=1/1, \lambda=200$$

の場合について他の形式と比較して図-3 に示す。

A*, B*, C*-type の座屈性状を調べるために、表-6

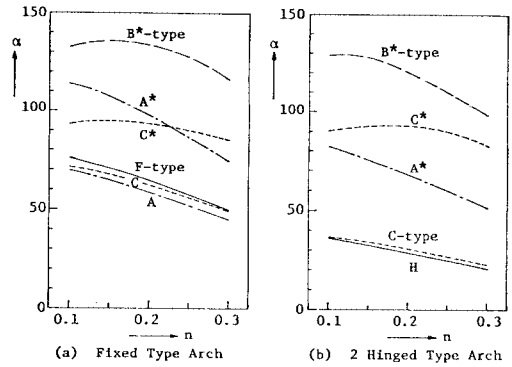


図-3 A*, B*, C*-type の座屈係数

表-7 桁の支承条件による座屈係数の相違

$$(A_A/A_G=I_A/I_G=1/1, \lambda=200)$$

Type	Mode	2 Hinged type arch				Fixed type arch			
		$n=f/L$				$n=f/L$			
		0.1	0.15	0.2	0.3	0.1	0.15	0.2	0.3
A	α_2	82.0	75.6	67.8	51.5	114.2	106.9	97.0	75.2
	α_1^*	82.0	75.6	67.8	51.5	114.2	106.9	97.0	75.2
B	α_2	148.4	137.9	125.3	98.4	205.8	189.7	171.1	132.5
	α_1^*	128.6	127.9	120.3	98.0	132.5	137.6	134.1	116.9
C	α_2	143.9	138.6	127.3	104.5	146.0	154.1	152.8	133.2
	α_1^*	90.4	94.5	92.9	83.6	93.3	95.1	93.8	85.6

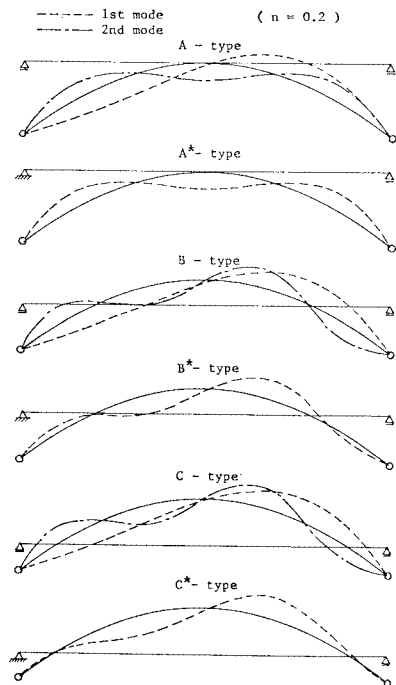


図-4 2 ヒンジ式補剛アーチの座屈モード

に示した1次モードの座屈係数 α_1^* と、A, B, C-type の2次モードの座屈係数 α_2 を対比して表-7に示した。 α_1^* と α_2 の値は A-type では完全に同値であり、B, C-type ではライズ比が大きいほど α_1^* は α_2 に近い値になる。ライズ比が0.2の2ヒンジ式補剛アーチの座屈モードを図-4に示したが、B*-type ではアーチリブの変位が最も大きくなるスパンの1/4点の近くに補剛桁が取り付けられているので、その座屈強度が最も大きくなることが理解される。また、A, B, C-type の1次モードの形状はよく似ているので、表-1に示したように桁の取り付け位置は座屈強度にあまり影響しないことがわかる。

4. 面内座屈の実用算定式

表-1, 2 または 図-2 に示した計算結果から、桁に軸力がほとんど生じない A, B, C-type の補剛アーチの座屈強度には、桁の取り付け位置による影響は少ないが、ライズ比はリブアーチの場合と同じような影響があることがわかった。また固定式補剛アーチの場合には、リブと桁の曲げ剛性比の影響を無視できないことが明らかになった。この結果から、図-1に示した桁に軸力が生じない上・中路的補剛アーチの全載等分布荷重による面内座屈の実用算定式を求めてみる。

式(2)に式(4・b)を代入すると次式のようになる。

$$H_{cr} = \alpha \frac{E(I_A + I_G)}{L^2} \dots\dots\dots (6)$$

上式の α は、表-1, 2 に示した補剛アーチの座屈係数であるが、この α の近似値を α' として、アーチリブの支承条件が同一なリブアーチの座屈係数を用いて α' を表すことにする。

まず、固定式補剛アーチでは、表-2 より I_G の比率が増せば座屈係数は減少することから、桁部の曲げ剛性 EI_G に対する低減率 κ と固定リブアーチの座屈係数 α_F を用いて、限界水平反力を次の近似式で表す。

$$H_{cr} = \alpha_F \frac{E(I_A + \kappa I_G)}{L^2} \dots\dots\dots (7)$$

式(6)と(7)を等置することにより、式(6)の α に対する近似値 α' として次式を得る。

$$\alpha' = \alpha_F \left(\frac{I_A + \kappa I_G}{I_A + I_G} \right) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、座屈係数に及ぼす曲げ剛性比の影響を表-2の値から類推して、 κ は次式で表されるものと仮定する。

$$\kappa = a \sqrt{\frac{I_A}{I_A + I_G}} + b \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 a, b は未知定数である。この定数は次の2つの条件から求める。すなわち、 I_G の値が零に近いときに

は式(8)の α' は α_F に、 I_A が零のときには α' は2ヒンジリブアーチの座屈係数 α_H にほぼ等しくなることを用いる。

これらの条件より a, b を求めて式(9)に代入すると、

$$\kappa = \left(1 - \frac{\alpha_H}{\alpha_F} \right) \sqrt{\frac{I_A}{I_A + I_G}} + \frac{\alpha_H}{\alpha_F} \dots\dots\dots (10)$$

となる。

2ヒンジ式補剛アーチの場合には、表-1にみられるように曲げ剛性比の影響が少ないので、最も座屈係数の値が小さい2ヒンジリブアーチの値を用いて式(6)の座屈係数を近似することにする。すなわち、

$$\alpha' = \alpha_H \dots\dots\dots (11)$$

したがって、式(6)に対する2ヒンジ式補剛アーチの近似式は次のようになる。

$$H_{cr} = \alpha_H \frac{E(I_A + I_G)}{L^2} \dots\dots\dots (12)$$

表-8 座屈係数の近似値の誤差(%)

Type	I_A/I_G	2 Hinged type arch				Fixed type arch			
		$n=f/L$				$n=f/L$			
		0.1	0.15	0.2	0.3	0.1	0.15	0.2	0.3
A	3/1	-1.3	-3.6	-4.5	-7.1	1.0	-0.6	-0.6	-2.3
	1/1	-1.8	-4.8	-6.6	-11.5	0.4	-0.9	-0.6	-1.8
	1/3	-2.4	-5.9	-8.5	-15.2	-1.2	-1.7	-1.0	-1.7
B	3/1	-1.5	-3.9	-4.9	-7.7	0.6	-1.1	-1.2	-3.0
	1/1	-2.0	-5.0	-7.0	-12.1	-0.6	-2.2	-2.2	-3.9
	1/3	-2.5	-6.1	-8.9	-16.0	-2.8	-3.8	-3.5	-4.8
C	3/1	-1.9	-4.6	-5.9	-9.1	-0.7	-3.6	-5.2	-9.9
	1/1	-2.4	-5.8	-8.0	-13.6	-2.5	-5.3	-6.9	-11.3
	1/3	-2.9	-6.9	-9.9	-17.4	-5.3	-7.6	-8.5	-11.7

式(8)と(11)の精度を確かめるために、表-1, 2の値 α に対する誤差を調べたのが表-8の数値である。誤差は次式で求めたものであり、リブアーチの値 α_H 、 α_F には表-3の示方書の値を用いた。

$$\text{Error} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} \times 100 (\%) \dots\dots\dots (13)$$

式(13)の定義により、表-8の正の値は危険側の誤差である。固定式補剛アーチの場合には危険側の誤差が現れることがあるが、最大1%であるので問題はないと考えられる。ライズ比が大きいときにはかなりの安全側の誤差が生ずるが、 $n \leq 0.2$ の場合には10%以下である。

曲げ剛性比による座屈係数の変化を図-5に示した。図では、表-1, 2のA, C-typeの値と、式(8), (11)による近似値を比較した。横座標軸の I_A/I の値が0と1のときのA, C-typeの値は、それぞれ上・中路的のランガー桁および曲げ剛性のない桁を有するアーチについて固有値計算から求めた値である。

さて、式(7)と(12)をまとめて

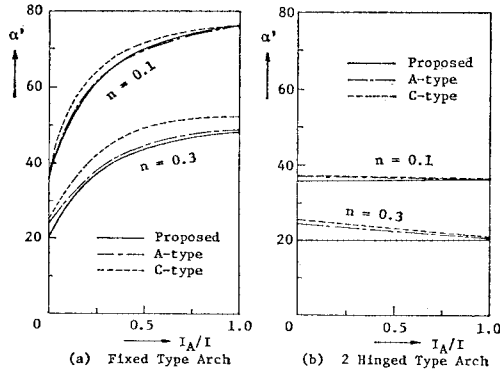


図-5 座屈係数とその近似値

$$H_{cr} = \alpha_R EI^2 / L^2 \dots\dots\dots (14)$$

と表すことができる。ここに、 α_R はリブアーチの座屈係数 α_F または α_H であり、 I' は次式 (15) で与えられる補剛アーチの換算断面 2 次モーメントである。

$$I' = I_A + \kappa I_G \dots\dots\dots (15)$$

したがって、桁に軸力が生じない補剛アーチの面内座屈に関する実用算定式として、式 (4・b) の I に対して式 (8) または (11) による座屈係数の近似値 α' を用いるか、または座屈係数として表-3 のリブアーチの値を用いる場合には式 (15) の換算値 I' を用いればよい。ここに、

$$2 \text{ Hinged type arch} : \kappa = 1 \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

Fixed type arch :

$$\kappa = \frac{\alpha_H}{\alpha_F} + \left(1 - \frac{\alpha_H}{\alpha_F}\right) \sqrt{\frac{I_A}{I_A + I_G}} \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

5. 変形の影響

(1) 無次元パラメーターと計算値

桁に軸力が生じない A, B, C-type の補剛アーチの幾何学的非線形性を、厳密な有限変位解析⁸⁾に基づく数値計算により調べる。

パラメトリック解析では、式 (1) の無次元量のほかに等分布死荷重 w と等分布活荷重 p に関する次の無次元量を用いる⁹⁾。

$$r = w/w_0, \beta = p/w \dots\dots\dots (17\cdot a, b)$$

ここに、 w_0 は無次元化のために用いた基準荷重強度であって、式 (3) の全載等分布荷重による線形座屈強度 w_{cr} の 1/8 の値を用いる^{注4)}。すなわち、

$$w_0 = \alpha \frac{EI}{L^3} \cdot \frac{f}{L} \dots\dots\dots (18)$$

数値計算では、アーチリブと補剛桁との剛比をすべて

注 4) w_0 は示方書 4) で規定されている有限変位の影響を考慮すべき死荷重強度の限界値と同じである。

表-9 無次元パラメーターの値

n	0.1	0.15	0.2	0.3			
λ	100	150	200	300	400		
r	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	
β	0.01	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0

$$A_A/A_G = I_A/I_G = 1/1$$

とした。ただし、特別な場合として、 $I_A=0$ の逆ランガー桁 (A'-type) も計算する。支柱 (または吊材) の断面積は、式 (4・a) の A の 1/20 とした。式 (1), (17) の無次元量の値には、表-9 に示す値を用いた。なお、式 (18) の w_0 の値の算出にあたっては、 α の値として表-1, 2 の値を用いるべきであるが、リブアーチと比較するために表-3 の示方書の値を用いた。

荷重としては前述の等分布死・活荷重を考え、死荷重はアーチリブと桁に 2 分してそれぞれに全載し、活荷重は桁の片側半分に載荷した。この荷重条件のもとでは、リブと桁に生じる曲げモーメントとたわみはスパンのほぼ 1/4 点付近で最大になる。最大値が生じる断面は、補剛桁の位置、ライズ比、細長比、荷重強度等によって多少移動するが、本文では次の断面に着目した。すなわち、固定式アーチでは固定端 (第 0 節点) とスパンの 3/10 点 (第 6 節点)、2 ヒンジ式アーチではスパンの 1/4 点 (第 5 節点) を選んだ。ただし、B-type の 2 ヒンジ式補剛アーチでは、第 6 節点に着目した。

非線形性は、次式で定義される増加率 (%) で表すことにする。曲げモーメントに対しては、

$$\text{増加率} = \frac{M_i - M_i^0}{M_i^0} \times 100 = \frac{4M_i}{M_i^0} \times 100 (\%) \dots\dots\dots (19)$$

ここに、添字 i は着目断面の節点番号^{注5)}を、右肩の添字 0 は線形値を表す。なお、アーチリブに生じる軸力には非線形性が現れないので省略する。

数値計算は、リブアーチも含めた 9 形式のアーチについて、表-9 に示したパラメーターのすべての値を組み合わせた場合を計算したので、7560 ケースになる。

(2) 幾何学的非線形性状

各構造形式のアーチにおけるパラメーターの影響を調べるために、式 (19) の増加率を 図-6~9 に示す。アーチリブと桁の曲げモーメント増加率はほとんど差がないので (表-10~12 参照)、図はすべてアーチリブの値である。

着目した断面諸量の中で固定端モーメントを除けば、死荷重強度が小さいとき ($r \leq 2.0$) には構造形式による

注 5) これらの節点番号はすべてアーチリブ上の節点を表すが、桁の断面力に着目する場合には、式 (19) の i は上述のアーチリブの節点の真上 (または下) の桁上の節点番号を表す。

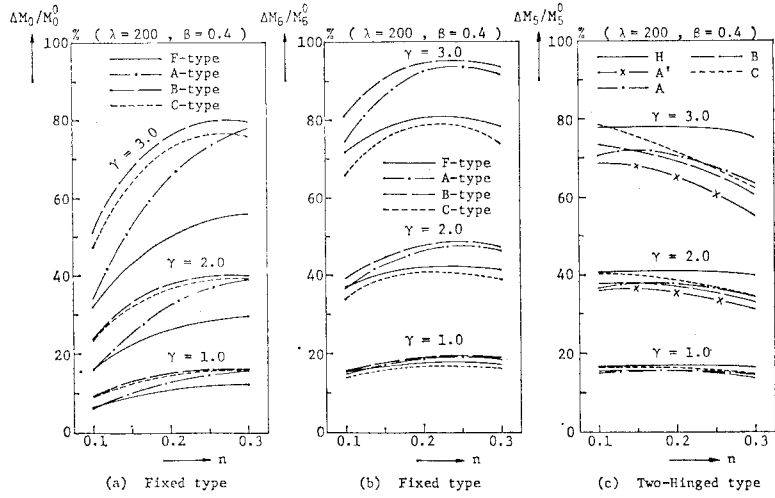


図-6 曲げモーメントの増加率

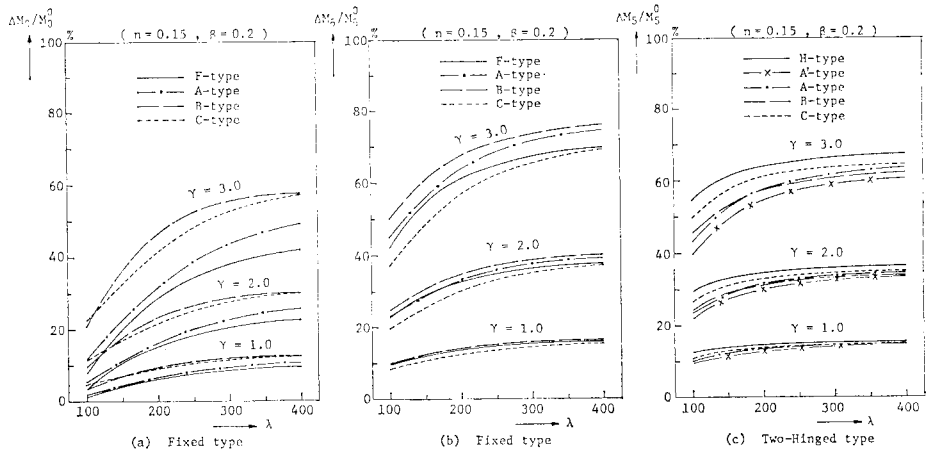


図-7 曲げモーメントの増加率

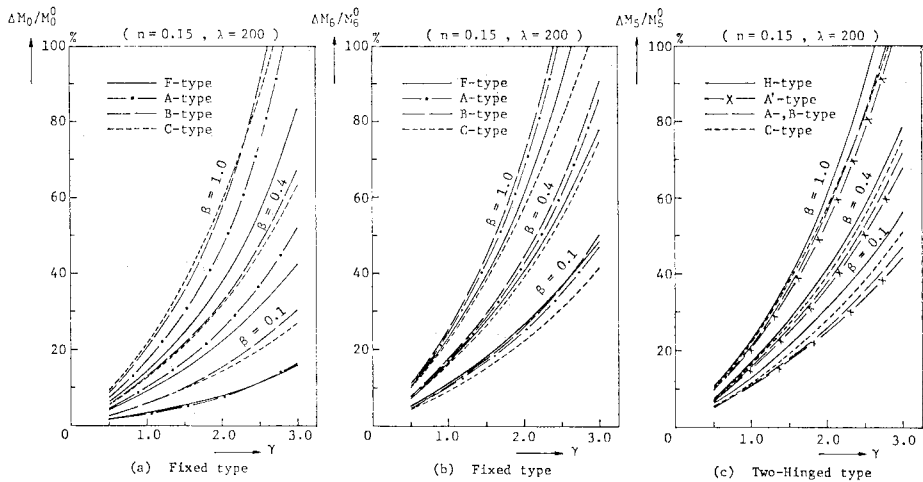


図-8 曲げモーメントの増加率

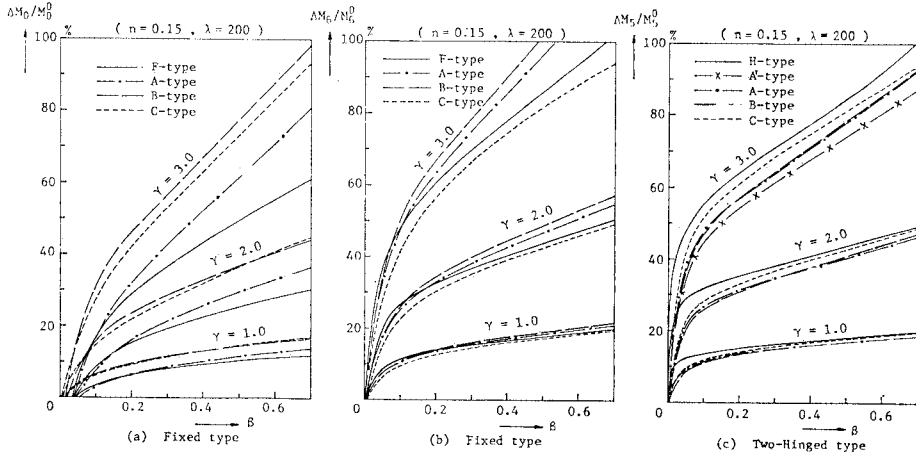


図-9 曲げモーメントの増加率

差は少ないことがわかる。実橋では、 r の値が2を超えることはまずないと考えられるので、通常的设计荷重強度の範囲内では、桁に軸力の生じない補剛アーチの構造全体的な非線形挙動はリブアーチの性状にきわめて近いものであるといえる(図-6~9 (b), (c))。

4個のパラメーター n, λ, r, β の中では、死荷重強度に関する r の値が非線形性に最も影響する(図-8)。道路橋示方書⁴⁾で規定している変形の影響を考慮すべき限界値 $r=1$ ^{注6)} のときには、ライズ比 n と細長比 λ の値は非線形性にほとんど影響しない(図-6, 7)。

活荷重強度に関しては、図-9より $\beta < 0.1$ のときには β の値が非線形性に敏感に影響することがわかる。特に、長大アーチ橋では r の値が大きくて β の値が小さいので、活荷重強度のわずかな変化により非線形性が大幅に変わることには注意する必要がある。

r の値が小さいときの死・活荷重強度と非線形性の関係を示したのが図-10である。図の曲線は、固定式と2ヒンジ式補剛アーチについて、実橋でとり得るパラメーターの値の範囲内 ($0.1 \leq n \leq 0.3, 100 \leq \lambda \leq 300$) で曲げモーメントに生じる非線形増加率の最大値をプロットしたものである。この最大増加率の曲線は、アーチリブに着目しても桁に着目してもほとんど変わらない(表-10, 11 参照)。図中の $\beta=0.01$ の値は、死荷重の

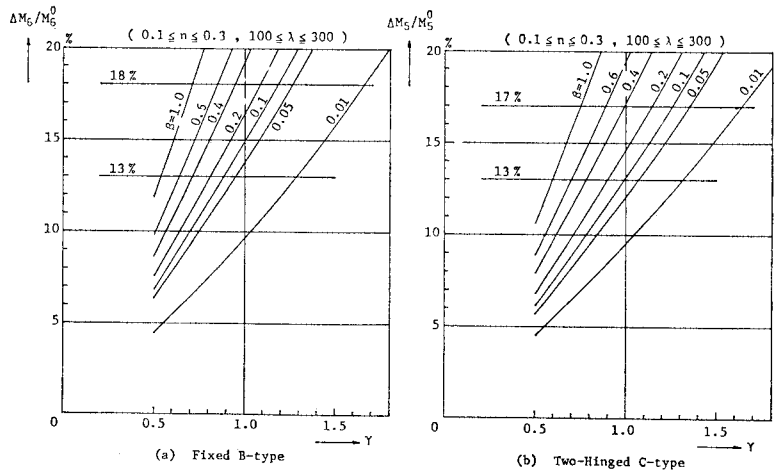


図-10 曲げモーメントの最大増加率

みが作用した場合に初期不整の影響を考慮したものである。図より、 r の値が小さくても活荷重強度 β の値により、非線形性はかなり変化することがわかる。

各形式のアーチについて、 $0.1 \leq n \leq 0.3, 100 \leq \lambda \leq 300, \beta \leq 0.4$ の範囲で曲げモーメントとたわみに生じる増加率の最大値をまとめたのが表-10, 11の値である。固定式アーチのたわみの最大増加率は省略したが、曲げモーメントの値よりわずかながら小さくなる。

リブアーチと補剛アーチの値を比較すると r の値が大きくなるに従って差が現れる。しかし、増加率の計算において、式(18)の w_0 の値を求めるときに表-3のリブアーチの座屈係数の値を用いずに表-1, 2の補剛アーチの値を用いれば、固定式補剛アーチの増加率は減少し、2ヒンジ式補剛アーチでは増加するので、補剛アーチの増加率はリブアーチの値にかなり一致するようになる。いま、 $r=1.0$ (または 2.0) で $\beta=0.4$ のときに、

注6) 今回改訂された示方書の規定では、リブアーチに対して $r=8/9$ 、2ヒンジ式補剛アーチに対して $r=8/12$ を限界値としている。

表一10 固定式アーチの最大増加率(%)
($0.1 \leq n \leq 0.3, 100 \leq \lambda \leq 300, \beta \leq 0.4$)

Type		$\gamma=0.5$		$\gamma=1.0$		$\gamma=2.0$	
		$\Delta M_6^0/M_6^0$	$\Delta M_5^0/M_6^0$	$\Delta M_6^0/M_6^0$	$\Delta M_5^0/M_6^0$	$\Delta M_6^0/M_6^0$	$\Delta M_5^0/M_6^0$
Rib	F	5.9	8.2	12.8	17.9	30.8	43.6
	A	7.2	8.6	15.8	19.0	39.1	47.1
	B	7.3	8.7	16.1	19.2	40.6	48.9
	C	7.4	8.0	16.1	17.5	39.6	42.5
Girder	A	—	8.9	—	19.5	—	48.5
	B	—	8.8	—	19.4	—	48.4
	C	—	8.1	—	17.7	—	42.9

表一11 2 ヒンジ式アーチの最大増加率(%)
($0.1 \leq n \leq 0.3, 100 \leq \lambda \leq 300, \beta \leq 0.4$)

Type		$\gamma=0.5$		$\gamma=1.0$		$\gamma=2.0$	
		$\Delta M_5^0/M_5^0$	$\Delta \delta_5/\delta_5^0$	$\Delta M_5^0/M_5^0$	$\Delta \delta_5/\delta_5^0$	$\Delta M_5^0/M_5^0$	$\Delta \delta_5/\delta_5^0$
Rib	H	8.0	8.0	17.3	17.4	42.2	42.4
	A	7.6	7.3	16.4	15.8	39.8	38.3
	B	7.5	7.5	16.5	16.2	40.2	39.3
	C	7.9	7.3	17.3	15.9	42.2	38.2
Girder	A'	7.5	6.9	16.2	14.9	39.2	35.8
	A	7.7	—	16.7	—	40.4	—
	B	7.6	—	16.6	—	40.6	—
	C	8.0	—	17.4	—	42.5	—

座屈係数の値が 10% 変わると γ の値が 0.1(0.2) 変わるので、図-8 または 図-10 から増加率は約 2%(6%) 変化することがわかる。

上述の補正計算を行えば、表一10, 11 より補剛アーチのアーチリブと桁の曲げモーメントの増加率は $\gamma=0.5, \beta=0.4$ のときには約 8%, $\gamma=1.0$ で $\beta=0.4$ のときには 17~18% になる。また、 γ の値が 0.5 と 1.0 の中間の値の場合には、図-10 より増加率を直線補間して算出しても誤差は 0.1% 以下になることがわかる。

6. 限界値の評価

すでに示した図や表から、 γ の値のほかに死・活荷重強度の比 β の値によっても非線形性がかなり変わることを確かめた。したがって、活荷重による変形の影響を照査する限界値には活荷重強度の値も考慮する方がより合理的であることは明らかであり、このような限界値の算定式としてリブアーチについて次式を提示した⁹⁾。

$$\gamma + \beta = 1 \dots\dots\dots(20)$$

上式の一般性と精度について

は等断面と変断面リブアーチについて詳細に調べ、無次元パラメーターの値が $0.1 \leq n \leq 0.3, 100 \leq \lambda \leq 300$ の範囲では、各断面の最大縁応力度に 10% を超える非線形性が生じないことを確認した。

桁に軸力の生じない補剛アーチの場合にも、式(20)の限界値に対して、アーチリブの縁応力度に生じる非線形性はリブアーチに近いものと考えられる。しかし、補剛アーチの場合には、アーチリブよりも桁に生じる応力度の方が問題になる。すなわち、この種の補剛アーチでは表一10, 11 に示した曲げモーメントの増加率の値がそのまま桁の縁応力度の増加率になるので、アーチリブよりも桁の縁応力度に大きな非線形性が生じるからである。

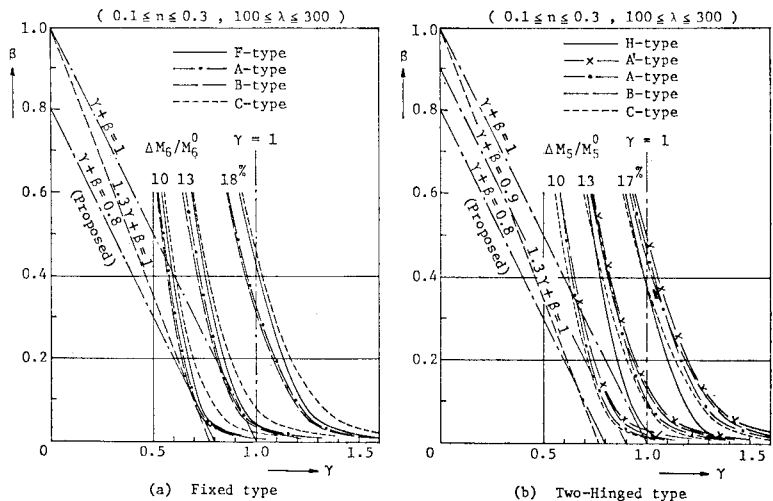
そこで、式(20)を求めたのと同じ方法を用いて限界値の算定式を求めてみる。まず 図-10 において、曲げモーメントの最大増加率が 10, 13, 18 または 17% になるときの γ と β の値を求め、これらのパラメーターを座標軸としたグラフに増加率一定の曲線を描いたのが 図-11 である。この曲線を、実用上の便宜を考えて直線で表すことにし、かつ設計上安全側になるように接線で近似することにする。

図-11 の曲線群に対して種々の接線が考えられるが、簡単な直線式として次式を用いる。

$$\gamma + \beta = k \quad (k: \text{const.}) \dots\dots\dots(21)$$

ここで、限界値における桁の縁応力度の増加率を仮に 10% とすれば、図-11 より k の値は固定式および 2 ヒンジ式補剛アーチに対して、それぞれ約 0.8 と 0.9 になる。

さて、図-10, 11 および表一10, 11 に示した値は 5. で説明したように特定の断面に生じる非線形性であるので、他の断面に生じる非線形性について調べてみる。



図一11 死・活荷重による曲げモーメント増加率

表一12 曲げモーメントの最大増加率 (%)

(0.1 ≤ n ≤ 0.3, 100 ≤ l ≤ 300)

Type			r=0.5								r=1.0							
			β=0.2				β=0.4				β=0.2				β=0.4			
			4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7
Fixed type	Rib	A	7.9	7.9	7.5	7.2	9.1	8.9	8.6	8.4	16.9	17.0	16.4	15.7	20.1	19.4	19.0	18.4
		B	—	10.3	7.6	6.8	—	10.6	8.7	8.0	—	22.6	16.5	14.7	—	23.6	19.2	17.5
		C	9.7	7.2	7.0	6.6	10.1	8.3	8.0	7.6	21.2	15.7	15.1	14.2	22.3	18.1	17.5	16.5
	Girder	A	8.1	8.1	7.7	7.4	9.3	9.2	8.9	8.6	17.6	17.5	16.8	16.1	20.4	20.1	19.5	18.9
		B	—	8.9	7.7	6.8	—	10.0	8.8	8.1	—	19.5	16.7	14.8	—	22.1	19.4	17.7
		C	7.5	7.3	7.0	6.6	8.6	8.4	8.1	7.7	16.2	15.8	15.2	14.3	18.8	18.3	17.7	16.7
2 Hinged type	Rib	A	6.9	6.6	6.4	6.0	7.7	7.6	7.3	7.0	14.7	14.3	13.8	13.0	16.7	16.4	16.0	15.3
		B	—	8.8	6.5	5.6	—	9.2	7.5	6.6	—	19.1	14.0	12.1	—	20.1	16.5	14.4
		C	7.7	6.8	6.2	5.7	8.7	7.9	7.3	6.6	16.7	14.7	13.4	12.2	19.0	17.3	15.8	14.3
	Girder	A'	6.6	6.5	6.3	5.9	7.5	7.5	7.3	7.0	14.1	13.9	13.4	12.7	16.3	16.2	15.9	15.2
		A	7.0	6.7	6.5	6.1	7.8	7.7	7.5	7.1	15.0	14.5	13.9	13.2	17.0	16.7	16.2	15.5
		B	—	8.2	6.5	5.7	—	8.9	7.6	6.7	—	17.8	14.1	12.1	—	19.4	16.6	14.5
		C	7.8	6.8	6.3	5.7	8.8	8.0	7.3	6.7	16.9	14.7	13.5	12.2	19.2	17.4	16.0	14.5

曲げモーメントが大きいスパンの 1/4 点付近の断面に生じる曲げモーメントの最大増加率を 表一12 に示す。3 行目の数字は節点番号を表す。B-type では、第 4 節点においてアーチリブと桁が剛結されており、活荷重を半載した場合には剛結点の曲げモーメントの値が小さくて線形値と非線形値の符号が逆になる場合もあるので、第 4 節点の増加率は省略した。

線形補間により、表一12 から $r=0.6$, $\beta=0.2$ のときの増加率を求めると、 $k=0.8$ に対して 2 ヒンジ式補剛アーチの増加率は 表一12 のすべての断面において 10% 以下になる注7)。固定式補剛アーチでは B-type の桁の一断面において 11% になるが、他の断面ではすべて 10% 以下である。したがって、活荷重による変形の影響を考慮する限界値として次式 (22) を用いれば、計算に用いたパラメーターの範囲内では桁の縁応力度の増加率はおおむね 10% を超えることはないといえる。

$$r + \beta = 0.8 \dots\dots\dots (22)$$

また 図一11 より、式 (22) の代わりに式 (23) で与えられる限界値を用いても、桁の縁応力度に同程度の非線形性が生じることがわかる。

$$1.3r + \beta = 1 \dots\dots\dots (23)$$

なお、固定式補剛アーチにおいてアーチリブの曲げ剛性が桁の剛性に比べて小さいときに、表一3 の固定リブアーチの座屈係数 α と式 (4-b) の I を用いると r の値を過少評価することになるので、この場合には式 (8) の α' または式 (15) の I' を用いて r を算出の方が安全である。

7. 結 語

本報告では、過去においてあまり発表されていなかった

補剛アーチの幾何学的非線形性を、座屈解析と有限変位解析により調べた。特に、非線形性の生じやすい桁に軸力の生じない上・中路式補剛アーチについては、その非線形挙動をパラメトリック解析により明らかにし、面内座屈係数を求めるための式と有限変位による影響を照査するための算定式を示すことができた。

補剛桁の一端をヒンジで固定して桁の水平移動を拘束した補剛アーチについては、座屈荷重がきわめて大きいことから有限変位による影響を調べなかった。この形式の力学的特性は、桁を固定したことによりアーチリブの変位が小さくなるので、曲げモーメントの線形値が大幅に減少し、かつ幾何学的非線形性が抑制されるので、力学的には長径間アーチ橋に適した構造形式である。この形式が実橋に用いられた例として、桁の両端を固定した構造が大三島橋に採用された。このアーチ橋にはかなりスレンダーなアーチリブが用いられたことと、死荷重強度とともに集中活荷重強度が大きいことから、活荷重によるアーチリブの縁応力度に 20% の非線形性が生じた^{10),11)}。したがって、桁に軸力が生じる補剛アーチについても、アーチリブの剛性や設計荷重強度の値によっては有限変位による影響を照査する必要がある。

最後に、当時大阪大学工学部の研究生であった酒井鉄工所勤務の神谷伸彦君に、座屈計算と資料整理に助力していただいた。記して謝意を表す。

【付 録】 ランガー桁の分岐座屈

座屈荷重に細長比 λ の影響が最も現れるライズ比 $n=0.1$ の下路式ランガー桁 (表一4 の D-type, $I_A/I_G=0/1$)

注 7) $r=0.7$, $\beta=0.2$, $k=0.9$ のときには、増加率が 12% になる断面がある。

について、有限変位解析により分岐座屈荷重と分岐モードを求める。

周知のように分岐点は数学上の特異点であり、有限変位理論により分岐点を求める問題は非線形固有値問題となる。種々の特異点問題に対する一般的な解法として、零固有値に対する荷重増分量と変位を求める厳密な解法があるが^{(12), (13)}、急激な荷重低下を伴う不安定分岐が起きない場合には、微小な変位増分を与えて解く簡便な解法を用いることができる。

ランガー桁のアーチリブと桁に全載等分布荷重 w を載荷し、荷重強度が $\beta=0.01$ の半載等分布荷重 p を初期不整として与えた^{注8)}。変位増分法を用いてアーチクラウンのたわみ δ_c を増分量に選び、 δ_c を支間長の $1/4000$ ずつ増大させて分岐点を求めた。

分岐直前の変形図と分岐座屈後の増分変位を図-Bに示す。一点鎖線のたわみの縮尺は $1:1$ であり、 $\lambda=300$ の場合のみわずかながら初期不整による逆対称成分が含まれていることが認められる。破線の分岐座屈モードは $\delta_c=L/4000$ の増分量によるたわみの増分を縮尺率を変えて示したもので、線形座屈解析とは異なり長さの次元を有するが、本来は分岐点における固有値解析⁽¹³⁾により求めるべき値である。上記の微小な増分量 δ_c に対して形状がまったく異なる2つの変形様式が存在することから、破線は分岐座屈モードを表している。図にみられるように、下路式ランガー桁の座屈モードは複雑な形状であるので、座屈モードを正弦波形で仮定した解法では正確な座屈荷重を求めることはできない。

表一A 下路式ランガー桁の座屈係数
($n=0.1, A_A/A_G=1/1$)

λ	α_{max}	α_{cr}	α_{max}/α_{cr}
100	64.28	64.59	0.995
200	246.5	248.4	0.992
300	520.6	528.4	0.985

計算例では分岐点で最高荷重に達し、分岐後はごくわずかながら徐々に荷重は低下した。分岐点に達したときの桁の限界軸力の水平成分から座屈係数 α_{max} を求めた値を表一Aに示す。 α_{cr} は表一4に示した座屈係数である。表一Aの値から、有限変位理論による座屈係数

注8) 分岐モードが逆対称形になる場合を考慮して p を与えたが、計算結果より p を用いる必要がないことがわかる。なお、上述の厳密な解法では初期不整を用いない。

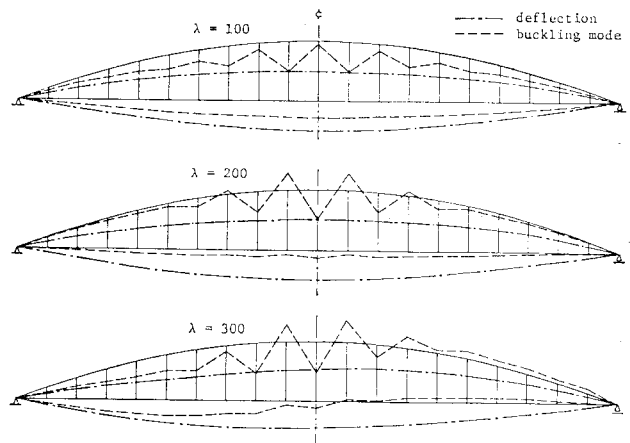


図-B 下路式ランガー桁の変形

も、細長比に関して線形座屈理論による値と同じ傾向を示している。

参考文献

- 1) 平井 敦：鋼橋 III，技報堂，pp. 77~87, 1967.
- 2) Column Research Committee of Japan : Hand Book of Structural Stability, Corona Pub. Co., pp. 2-72~2-79, 1971.
- 3) Austin, W.J. : In-Plane Bending and Buckling of Arches, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST 5, 1971.
- 4) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，丸善，pp. 278~280, 1973.
- 5) 安藤浩吉・成岡昌夫：アーチ系の橋に関する2, 3の考察，橋梁と基礎，Vol. 4, No. 4, 1970.
- 6) 荒井利男・大森邦雄：補剛ゲタに軸力の生じる上路式および中路式補剛アーチ橋，橋梁と基礎，Vol. 7, No. 1, 1973.
- 7) Przemieniecki, J.S.(山田嘉昭・川井忠彦 共訳)：マトリックス構造解析の基礎理論，培風館，pp. 349~357, 1971.
- 8) 前田幸雄・林 正・中村 守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No. 223, 1974.
- 9) 前田幸雄・林 正：リブアーチにおける変形の影響，土木学会論文報告集，No. 299, 1980.
- 10) 前田幸雄・林 正：側タイ付2ヒンジソリッドリブアーチ橋の非線形挙動，構造の非線形問題，第24回構造工学シンポジウム，1978.
- 11) Maeda, Y. and M. Hayashi : In-Plane and Out-of-Plane Instability of a 297 m Span Steel Arch Bridge, Proc. of Bridge Engineering Conference of TRB, Vol. 1, 1978.
- 12) 林 正：構造物の非線形解析における多元連立方程式の数値計算法，京都大学数理解析研究所講究録，No. 269, 1976.
- 13) 前田幸雄・林 正：構造解析における多元連立非線形方程式の数値計算法，JSSC 第11回大会研究集会，マトリックス解析法研究発表論文集，1977.

(1979.7.26・受付)