

不圧滞水層における非定常浸透流の非線形性に関する研究

A STUDY ON THE NON-LINEAR CHARACTERISTICS OF
UNSTEADY FLOW IN UNCONFINED AQUIFER

尾 島 勝*・足 立 一 美**

By Masaru OJIMA and Kazumi ADACHI

1. ま え が き

地下水および浸透流に関する研究は数多くなされているが、ここでは本研究に関係深いと思われる成果について概括しておく。不圧滞水層中における地下水流を記述する式は非線形方程式となる。多くの研究者は、すでにこの方程式の解を、ある前提のもとに線形化するとか、あるいは非線形の偏微分方程式を非線形の常微分方程式に帰する変換によって得ている。たとえば、Kochina¹⁾は外水位の水位低下と水位上昇の場合に対し、前述の両手法を用いている。Glover²⁾は、線形化の手法により水位低下の問題を研究し、Yeh³⁾は同じ問題に対して後者の手法を用いている。また、Bruch⁴⁾はこのような地下水流の問題を解くために有限要素法を用いており、よい結果を得ている。

わが国においても、近年、基礎式である非線形方程式を差分法あるいは有限要素法を用いて直接的に数値解を得ようとする研究が多くみられ、たとえば山上⁵⁾によるロックフィルダム内の非定常自由水面流（飽和流れ）の解析や赤井・大西・西垣⁶⁾による飽和-不飽和浸透流の解析などを挙げることができる。

一方、実験的に現象を解明しようとする研究も多く、砂層モデルや Hele-Shaw モデル、電磁モデルなどが用いられている。赤井・宇野⁷⁾は、砂層モデルによる非定常浸透実験を行い、生起水位応答を Laplace 変換を用いて解いた解析値と比較考察し、影響要因の分析評価を行っている。また、鉛直流速を考慮し、準1次元流の仮定を取り除いた解析が実験結果と対照して嶋⁸⁾によって示されているが、砂層モデル実験結果を十分に説明することができず、その後、非定常浸透流の内部機構に関するより詳細な解明に多くの研究者の志向が集まることに

なった。そして、砂層の飽和-不飽和度の相違あるいは透水係数および有効間隙率の場所的相違および時間的变化などが浸透現象に及ぼす影響の解明といった、滞水層水理条件と滞水層境界における外乱条件の両者による相乗効果による浸透現象の変化に関する研究がなされるようになってきた。

著者らは、一般に地形勾配が緩く、河川・水路および海などの水理条件の変化がかなり敏感にその隣接地下水帯の地下水の挙動に影響を及ぼすと考えられる沿岸平地部を低平地と称し、その低平地自由地下水の挙動を明らかにするために、種々の境界条件・初期条件のもとに自由地下水面の挙動を理論と実験の両面から考察して、その変動特性の定量評価を行うこと、およびその変動特性を説明し得る数理モデルを確立することをめざしてきた^{9)~11)}。本研究もこうした研究に引き続いたものである。

本研究ではできるだけ単純なモデルを想定して、流れを準1次元と仮定し、流れの場の特性すなわち透水係数および有効間隙率を場所と時間の関数として考慮し、基礎方程式を誘導する。さらに狭義の仮定を設けて基礎式の簡略化を行い、それらの式の適用性を外水位変動との関連において工学的に評価するとともに基礎式の非線形性の評価にも言及する。

2. 非定常浸透流の基礎方程式

(1) 基礎方程式の誘導

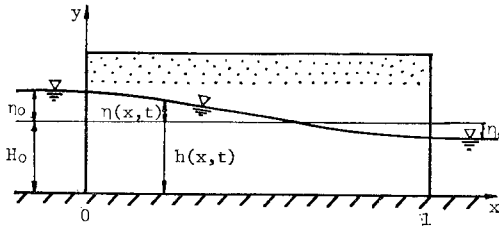
非定常浸透流の運動方程式は、一般に、

$$\frac{1}{\lambda g} \frac{\partial v}{\partial t} = -\text{grad}(h) - \frac{v}{k} \dots\dots\dots (1)$$

と表現される。ここに、 v : 平均流速、 h : ピエゾ水頭、 k : 透水係数、 λ : 有効間隙率、である。しかし、通常の地下水流動や堤体内浸透を考えると、流速が小さ

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 運輸省港湾局 運輸技官



図一1 砂層モデルと座標系

いからその時間的变化も小さいとされ、式(1)の左辺の慣性項は右辺の各項に比してかなり小さく、運動方程式として式(1)をとらず Darcy 則で十分であるとして取り扱われることも多い。

ところで、本研究では透水係数および有効間隙率を場所と時間の関数として非定常浸透現象を説明しようとする観点から、以下に示すような理論の展開を試みる。

すなわち、不圧滞水層領域として図一1に示すように、両端境界で外水条件が変わり得る長さ l の長方形砂層モデルを考えると、初期水位 H_0 に比して外水位変動量 η_0, η_1 が小さく、砂層長さ l が H_0 に比して十分大きいと仮定すれば、流れは準1次元流として取り扱われる。

したがって、運動方程式として Darcy 則をとり、 x 点における水深を $h(x, t)$ 、単位幅流量を $q(x, t)$ 、透水係数を $k(x, t)$ とすれば、

$$q(x, t) = -k(x, t)h \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

と運動方程式は表され、また、連続式は、

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = -\left(h \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} + \lambda(x, t) \frac{\partial h}{\partial t} \right) \dots\dots (3)$$

となる。式(2)と式(3)から、非定常浸透現象を記述する基礎式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\lambda(x, t)} h \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{k(x, t)}{\lambda(x, t)} \left\{ h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{1}{\lambda(x, t)} \\ & \cdot h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

すなわち、式(4)は、 k, λ を場所および時間の関数と考えた場合の基礎式である。

ところで λ の場所的、時間的变化は滞水層の応力変化すなわち水深変化に基づくものであるから、滞水層の圧縮応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) による微小六面体要素 ($\partial_x, \partial_y, \partial_z$) の圧縮は層の圧縮率 ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$) によって示され¹²⁾、

$$\frac{d(\partial_x)}{\partial_x} = \alpha_x d\sigma_x \text{ あるいは } \frac{\partial(\partial_x)}{\partial t} = \alpha_x \delta_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \text{ etc.} \dots\dots\dots (5)$$

となる。ところが、滞水層の砂粒子そのものの圧縮性 ($1/E, E$ は体積弾性係数) は、間隙水の圧縮性 (β) や層

構造骨格の圧縮性 (α_v) に比して無視できるから、

$$(1-\lambda) \delta_x \delta_y \delta_z = \text{const.}$$

$$\text{すなわち、 } d\{(1-\lambda) \delta_x \delta_y \delta_z\} = 0$$

であり、したがって、

$$\frac{d\lambda}{1-\lambda} = \frac{d(\delta_x)}{\delta_x} + \frac{d(\delta_y)}{\delta_y} + \frac{d(\delta_z)}{\delta_z} \dots\dots\dots (6)$$

である。式(5)と式(6)より、

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = (1-\lambda) \left\{ \alpha_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \alpha_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + \alpha_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \right\} \dots\dots (7)$$

となる。また、流体の運動における応力とひずみのつり合いから平衡状態では、

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (8)$$

であり、式(8)を式(7)に代入し、さらに砂層を完全弾性体として圧縮率を α_v とすれば、 $1/3 \cdot \alpha_v = \alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$ であることを考慮して、

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \alpha_v \rho g (1-\lambda) \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (9)$$

となる。これらの関係を用いて、基礎方程式(4)は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\alpha_v \rho g}{\lambda(x, t)} (1-\lambda) h \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \frac{k(x, t)}{\lambda(x, t)} \left\{ h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{1}{\lambda(x, t)} h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

さて、上式の $\alpha_v \rho g$ は、 $\alpha_v = 1.8 \sim 9.0 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ ($1.84 \sim 9.18 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{N}$) であるから、 $\alpha_v = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ と仮定すれば $\alpha_v \rho g = 5 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$ ($5 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$) 程度の値となる。したがって、左辺第2項は第1項に比べて非常に小さく実際上は無視してよいことになる。

したがって、準1次元非定常浸透流を表現する基礎方程式は次式のような非線形方程式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{k(x, t)}{\lambda(x, t)} \left\{ h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{1}{\lambda(x, t)} h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

すなわち、式(11)が解析すべき現象の基礎式である。しかし、この式を種々の境界条件のもとに直接的に解くことはきわめて困難であり、できるだけ簡略化した数理モデルによって現象の性質を大略的に把握し、生起現象との相違を工学的に評価し、その適用性を明確にしておくことが賢明であると考えられる。

そこで、まず第1に現象の生起場である砂層の物理的条件が理想的な均一等方性、飽和浸透であるとして、 k および λ を一定であるとすれば、式(11)の右辺第2項が無視されて、上式は、

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \left\{ h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (K = k/\lambda = \text{const.}) \dots\dots\dots (12)$$

の非線形方程式となる。初期水位からの水位変動量 $\eta(x, t) = h(x, t) - H_0$ を用いて上式を書き換えれば、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = K \left\{ H_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\} \dots (13)$$

と書け、特に $\eta \ll H_0$ としてよい場合は次式の線形方程式となる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = C \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \left(C = \frac{kH_0}{\lambda} = \text{const.} \right) \dots (14)$$

また、 $H_0 = 0$ のときは、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} \dots (15)$$

の方程式に帰着することになる。

(2) 基礎方程式の解析解

a) 外水位一般変動の解

図-1 に示した砂層モデルの両端で外水位が時間とともに変動する場合を考える。

初期水位 H_0 に比して変動外水位 $\eta(0, t), \eta(l, t)$ が十分に小さいと仮定し、初期水面形状を $\varphi(x)$ とすると、初期条件および境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta(x, 0) &= \varphi(x) \\ \eta(0, t) &= \psi_1(t), \quad \eta(l, t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

現象生起場の特性が理想的な均一平方性であり、飽和浸透と仮定すれば、基礎式 (14) を上記の条件のもとに解けばよいことになる。

Stokes の方法を用いて、解を次の級数の形に求めよう¹⁰⁾。

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (17)$$

ここに、 $T_n(t)$ は、

$$T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \eta(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \dots (18)$$

であり、 $\eta(x, t)$ が式 (16) の条件を満たす式 (14) の解でなければならないことから、 $T_n(t)$ は次式のように決定される。

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{2}{l} e^{-n^2\pi^2 T_0} \left[\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{n\pi k H_0}{\lambda l} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^t e^{\frac{n^2\pi^2 k H_0}{\lambda^2} \tau} \{ \psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau) \} d\tau \right] \dots (19) \end{aligned}$$

ここに、 T_0 は $T_0 = (kH_0/\lambda l^2)t$ である。

したがって、次式が求める解である。

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 T_0} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &\quad \cdot \left[\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{n\pi C}{l} \int_0^t e^{\frac{n^2\pi^2 C}{l^2} \tau} \right. \\ &\quad \cdot \left. \{ \psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau) \} d\tau \right] \dots (20) \end{aligned}$$

最も簡単な初期水面形状が水平 ($\varphi(x) = 0$) な場合で

あれば、

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{2\pi C}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2\pi^2 T_0} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &\quad \cdot \int_0^t e^{\frac{n^2\pi^2 C}{l^2} \tau} \{ \psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau) \} d\tau \dots (21) \end{aligned}$$

となる。ここに C は前記と同じく $C = kH_0/\lambda = \text{const.}$ である。なお、これらの解は無限小の $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ に対して $x = 0 + \varepsilon, x = l - \varepsilon$ でそれぞれ $\psi_1(t), \psi_2(t)$ に一致するので、与えられた境界条件を満足することになる。

b) 外水位ステップ変動の解

特別な場合として $\psi_1(t) = H_1 = \text{const.}, \psi_2(t) = H_2 = \text{const.} (t > 0)$ を考え a) で述べた解法に従って解を求めれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= H_1 + (H_2 - H_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \\ &\quad \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_2 - H_1}{n} e^{-n^2\pi^2 T_0} \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (22) \end{aligned}$$

c) 外水位周期変動 (単一波) の解

境界条件を次のように与え、初期条件は先と同様に $\eta(x, 0) = \varphi(x) = 0$ とする。

$$\left. \begin{aligned} \eta(0, t) &= \psi_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t \quad (0 \leq t \leq T_1) \\ &= 0 \quad (T_1 < t) \\ \eta(l, t) &= \psi_2(t) = A_2 \sin \omega_2 t \quad (0 \leq t \leq T_2) \\ &= 0 \quad (T_2 < t) \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

ここに、 A_1, A_2 は $x = 0, l$ における周期変動の振幅であり、 $\omega_1 = 2\pi/T_1, \omega_2 = 2\pi/T_2, T_1, T_2$ はそれぞれの振動周期である。

この場合は、上の条件を式 (21) に代入して積分が可能であり、容易に解が得られる。たとえば得られる解の 1 つを示せば次のようである。

i) $0 \leq t \leq T_1, T_2$ のとき

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{2\pi C}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-C n t} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[\frac{A_1}{C n^2 + \omega_1^2} \right. \\ &\quad \cdot \{ (C n \sin \omega_1 t - \omega_1 \cos \omega_1 t) + \omega_1 e^{-C n t} \} \\ &\quad - \frac{(-1)^n A_2}{C n^2 + \omega_2^2} \{ (C n \sin \omega_2 t - \omega_2 \cos \omega_2 t) \\ &\quad \left. + \omega_2 e^{-C n t} \} \right] \dots (24) \end{aligned}$$

ただし、 $C = kH_0/\lambda, C_n = (n^2\pi^2 kH_0)/\lambda l^2 = (n^2\pi^2 C)/l^2$ である。

(3) 基礎方程式の差分近似解

前節において、外水位変動量が初期水位に比して十分小さい場合の基礎方程式 (14) の解析解を示し、簡単な境界条件の場合について解の積分を行った。しかし、複雑な変動条件に対しては積分できないし、さらに $\eta \ll$

H_0 の仮定が取り除かれる場合には、非線形偏微分方程式 (13) を解く必要がある。しかし実際にこの解析解を得ることは困難であり、現実起こる複雑な外水位変動を対象とする場合や非線形方程式を取り扱う場合には、差分近似解を求めることが多用され、また有用である。

いま、取り扱いの便宜上、式 (13) を無次元表示するために、

$$Y = \eta/H_0, X = x/l, T = (kH_0/\lambda P)t \dots\dots\dots (25)$$

と置くと、式 (13) は次式のように書ける。

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + Y \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2, \quad (0 \leq X \leq 1) \dots\dots\dots (26)$$

T について前進差分をとり、 X について中央差分をとって式 (26) を陽差分表示すれば、

$$\frac{Y_i^{j+1} - Y_i^j}{\Delta T} = (1 + Y_i^j) \frac{Y_{i+1}^j - 2Y_i^j + Y_{i-1}^j}{(\Delta X)^2} + \left(\frac{Y_{i+1}^j - Y_{i-1}^j}{2\Delta X}\right)^2 \dots\dots\dots (27)$$

陰差分表示すれば、

$$\frac{Y_i^{j+1} - Y_i^j}{\Delta T} = (1 + Y_i^{j+1}) \frac{Y_{i+1}^{j+1} - 2Y_i^{j+1} + Y_{i-1}^{j+1}}{(\Delta X)^2} + \left(\frac{Y_{i+1}^{j+1} - Y_{i-1}^{j+1}}{2\Delta X}\right)^2 \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 ΔX : X の差分間隔、 ΔT : T の差分間隔となる。式 (27) および式 (28) から Crank-Nicholson 型陰差分表示をすれば¹⁴⁾、

$$(Y_i^{j+1})^2 - B_i Y_i^{j+1} - (C_i + F_i) = 0 \dots\dots\dots (29)$$

ここに、

$$B_i = \frac{1}{2}(Y_{i+1}^j + Y_{i-1}^j) - \frac{1}{r} - 1$$

$$C_i = \frac{1}{r} Y_i^j + \frac{1}{2}(1 + Y_i^j)(Y_{i+1}^j - 2Y_i^j + Y_{i-1}^j) + \frac{1}{8}(Y_{i+1}^j - Y_{i-1}^j)^2$$

$$F_i = \frac{1}{2}(Y_{i+1}^j + Y_{i-1}^j) + \frac{1}{8}(Y_{i+1}^j - Y_{i-1}^j)^2$$

ただし、 $r = \Delta T / (\Delta X)^2$

となり、式 (29) を Gauss-Seidel 反復法¹⁵⁾ で解くことにすれば、次式ようになる。

$$Y_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} \{B_i + \sqrt{B_i^2 + 4(C_i + F_i)}\} \dots\dots\dots (30)$$

ここに、

$$B_i = \frac{1}{2}(Y_{i+1}^{(n)} + Y_{i-1}^{(n)}) - \frac{1}{r} - 1$$

$$C_i = \frac{1}{r} Y_i^{(n)} + \frac{1}{2}(1 + Y_i^{(n)})(Y_{i+1}^{(n)} - 2Y_i^{(n)} + Y_{i-1}^{(n)})$$

$$+ \frac{1}{8}(Y_{i+1}^{(n)} - Y_{i-1}^{(n)})^2$$

$$F_i = \frac{1}{2}(Y_{i+1}^{(n)} + Y_{i-1}^{(n)})$$

$$+ \frac{1}{8}(Y_{i+1}^{(n)} - Y_{i-1}^{(n)})^2$$

すなわち、Gauss-Seidel 反復法は、第 $(n+1)$ 近似 $Y^{(n+1)}$ が計算されたら、ただちに第 n 近似 $Y^{(n)}$ を第 $(n+1)$ 近似 $Y^{(n+1)}$ で置き換える方法である。

線形方程式 (14) も同様に無次元表示して同手法により解くことにすれば、

$$Y_{i,j+1}^{(n+1)} = \frac{r}{2(1+r)} \{Y_{i-1,j+1}^{(n)} + Y_{i+1,j+1}^{(n)}\} + \frac{1}{1+r} G_i \dots\dots\dots (31)$$

ここに、

$$G_i = (1-r) Y_{i,j}^{(n)} + \frac{1}{2} r (Y_{i-1,j}^{(n)} + Y_{i+1,j}^{(n)})$$

となる。

式 (30) あるいは式 (31) に初期条件および境界条件を与えることによって、逐次水位変動を算出できる。

(4) 差分近似解の安定性と収束性

非線形放物型偏微分方程式の差分近似解の安定性と収束性については、半線形とよばれる特別な方程式について検討がなされているが、一般的な理論は不完全である¹⁶⁾。そこで厳密解が既知の場合について、この厳密解と差分近似解との比較によって差分の妥当性を検証することが試みられている¹⁷⁾。一方線形方程式については Crank-Nicholson 型陰差分式の安定性ならびに Gauss-Seidel 反復法の収束性は厳密に論じられており¹⁸⁾、ここで結論のみを述べれば、前節に示した式 (14) の解、式 (31) は r のすべての正の値に対して無条件に安定であり、また、すべての正の値に対して収束する。

前述したように、非線形方程式 (13) の解、式 (30) の安定性と収束性を理論的に論じることができないので、定常状態における厳密解と差分近似解との比較を行って差分の妥当性を推察することにした。

いま、最も単純な外水位変動、すなわち $x=0$ において外水位が H だけステップ上昇した場合を考える。これを式 (30) を用いて解き、定常状態の水面形を求めると表-1 のとおりである。ただし、 $H/H_0=1.0$ 、 $\Delta X=0.1$ 、 $\Delta T=0.01$ として計算を行っている。

一方、定常状態を考えているから非線形な基礎式 (12) で左辺=0 であるから、 $d^2h^2/dx^2=0$ を解けば、

表-1 定常状態における差分と厳密解

x/l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
eq. (30)	0.9235	0.8438	0.7606	0.6732	0.5810	0.4831	0.3783	0.2648	0.1401
eq. (32)	0.9235	0.8439	0.7606	0.6733	0.5810	0.4831	0.3783	0.2648	0.1401

$$h = \sqrt{(H_0 + H)^2 - \frac{H(2H_0 + H)}{l} x}$$

となり、 $\eta = h - H_0$ で表現すれば、

$$Y \equiv \frac{\eta}{H_0} = \sqrt{1 + 2 \frac{H}{H_0} (1-X) + \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 (1-X)^2} - 1$$

となる。ここに $X = x/l$ であり、いま、 $H/H_0 = 1.0$ であるから、定常水面形は次式のようになる。

$$Y = \sqrt{4 - 3X} - 1 \dots\dots\dots(32)$$

式 (32) より得られる結果も表-1 に示してある。

表より明らかなように、両者の一致度は非常によい。

この場合、差分近似解は初期状態から $4T$ 時間後の未知の水位を逐次計算して、定常状態の水位に到達したものである。したがって、すべての外水位変動条件に対して式 (30) の妥当性を検証したことにはならないが、一応その妥当性を認めることにする。

3. 基礎方程式の非線形性の評価

(1) 概 説

前章で示したように、非定常浸透流を記述する基礎式は非線形である。ところが、水位変動量 η が初期水位 H_0 に比べて十分小さい場合には、熱伝導型の線形方程式で近似できるとして通常の浸透現象に適用されてきた。しかし、 η/H_0 の値が 10^{-2} 程度より小さい場合には線形近似で十分であるとしても、 η/H_0 の値が $10^{-1} \sim 1$ と比較的大きい場合については、その適用性が明らかではない。もちろん、本質的には近似精度とその工学的重要性の問題であるが、一般に近似式の適用に際して、あらかじめその相対誤差を知っておくことは必要である。このような目的のためには、基礎式を個々の条件に対して解くよりも無次元化してより汎用性を広めた表現を用いて非線形性を評価しておくのが好都合である。

そこで、ここでは前章で示した基礎式を無次元化して差分法により数値計算を行い、非線形性を定量的に評価する。ついで、砂層モデルを用いた実験結果からも基礎方程式の非線形項の大きさを算定し、実験的検証を行う。

(2) 差分近似解による非線形性の評価

ここに再び式 (13) および式 (14) の無次元化式を示せば、それぞれ次のとおりである。

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + Y \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2 \dots\dots\dots(33)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \dots\dots\dots(34)$$

いま、非線形方程式 (33) の差分解を Y_N 、線形方程式 (34) の差分解を Y_L とし、外水位の最大変動振幅

$\text{Max}[\eta_0, \eta_l]$ を初期水位 H_0 で除した無次元振幅を A_η として、

$$\frac{Y_N - Y_L}{A_\eta} \dots\dots\dots(35)$$

なる量で非線形性を表現することにする。

a) 一端ステップ上昇の場合

図-2 は、次の初期条件および境界条件の場合について、式 (35) の計算結果を示したものである。

$$\left. \begin{aligned} Y(X, 0) &= 0 \\ Y(0, T) &= Y_b (= A_\eta = \eta_0/H_0), Y(1, T) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ここに、 $Y = \eta/H_0$ 、 $X = x/l$ 、 $T = (kH_0/\lambda l^2)t$ である。

図は縦軸に非線形性の評価値 $((Y_N - Y_L)/A_\eta)$ を、横軸に無次元時間 T をとり、外水位ステップ変動量 η_0 と初期水位 H_0 との比 (η_0/H_0) をパラメーターとして、滞水層の4地点 ($X=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) における非線形性の変化の様相を示したものである。

図より明らかなように、 T が小さい浸透の初期に非

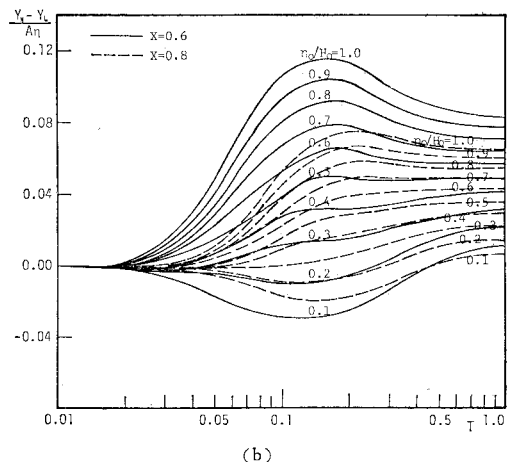
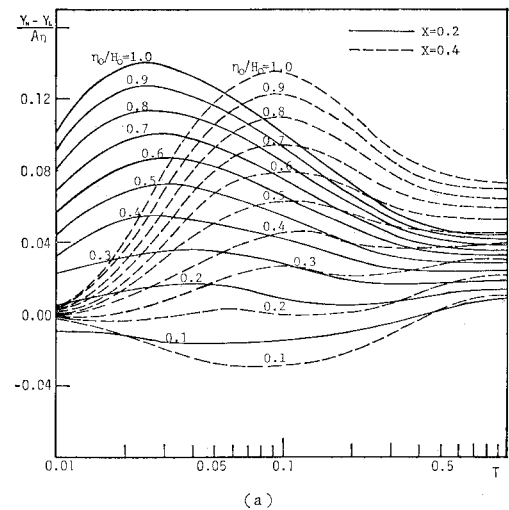


図-2 一端ステップ上昇の非線形性の評価図

線形性が大きく、ある時刻において最大値を示した後、定常状態に至るまで非線形性の評価値は遅減する。この場合、 $T=0.7$ 以後はどの地点においても評価値にほとんど変化がみられず、また、計算された Y_N, Y_L の値もそれぞれほぼ一定値に収束していることから、浸透現象は定常状態に達していると考えられる。すなわち、重要なことは、非定常な浸透過程、特に浸透の初期に大きな非線形性を示し、定常状態のそれはかなり小さいということである。しかし、現象が定常に達しても評価値は図にみられるとおりに零ではない。

また、パラメーター η_0/H_0 の相違による非線形性の変化特性をみれば、 η_0/H_0 が 0.3 以上になれば非線形性の評価値は時間のいかんにかかわらず常に正となる。すなわち式 (33) で計算される非線形解 Y_N の方が式 (34) より計算される線形解 Y_L よりも常に大きいということである。また、このパラメーター η_0/H_0 ($\equiv A_7$) の値が大きくなるほど非線形性の評価値も大きくなっていることから、 η_0/H_0 の相違が ($Y_N - Y_L$) に及ぼす影響度がそれぞれ異なるものであることがわかる。

初期水位 H_0 と等しい外水位変動が生じるとする $\eta_0/H_0=1.0$ の場合には、ここで定義した非線形性はかなり大きく、最大 A_7 の 14% にも達するが、 η_0/H_0 が 0.2 以下の場合には $\pm 3\%$ 程度以下とかなり小さい。

さらに、非線形性は外水位変動端 ($X=0$) から離れた地点ほど小さくなり、その最大値生起時刻も順次遅れることがわかる。

以上のように明らかにした非線形性の相違をどの程度まで許容するかによって、非定常浸透現象への線形方程式 (14) の適用性が工学的に判断されることになる。

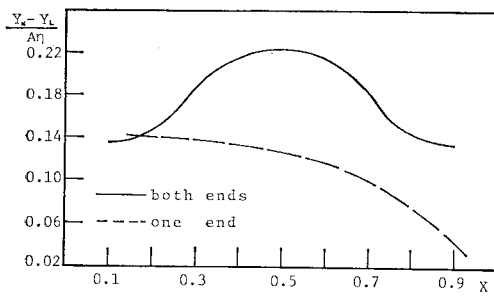


図-3 非線形性の最大値

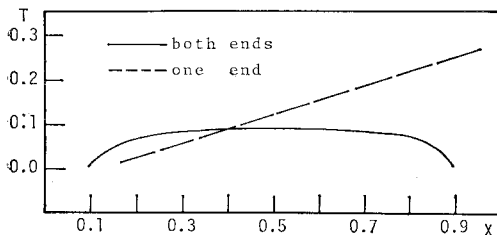


図-4 最大値の生起時刻

図-3 および 図-4 は、 $\eta_0/H_0=1.0$ の場合について、式 (35) で計算された最大値とその生起時刻を外水位変動端からの距離に対して描いたものである。図中の破線は図-2 に示した一端ステップ上昇の場合であり、実線は次に述べる両端ステップ上昇の場合である。

破線で示された一端ステップ上昇の場合、図-3 からわかるように、最大値は外水位変動端から遠ざかるにつれて急激に減少しているが、その減少の割合を示す曲線は簡単に関数表示することはできない。一方、非線形性の最大値生起時刻については、外水位変動端から遠ざかるにつれて遅れるが、その割合は直線の変化である。この直線の傾きの逆数が非線形性の伝播速度であって、図よりこの値は約 3.16 であり、長さ 1 の滞水層の他端まで非線形性が到達するのに $T=0.316$ を要することになる。したがって、長さや時間の単位をそれぞれ cm, s とすれば、実現象では、非線形性の伝播速度は $3.16 \times (kH_0/\lambda)$ (cm/s) となる。ちなみに、本研究に用いた砂層モデルでは、 $k=0.43$ cm/s, $\lambda=0.3$, $H_0=40$ cm, $l=300$ cm であるから、伝播速度は 0.60 cm/s となり、非線形性が砂層の他端に到達するのに約 8 分 20 秒を要することになる。

b) 両端ステップ上昇の場合

図-5 は、次の初期条件および境界条件を与えたときの計算結果である。

$$\left. \begin{aligned} Y(X, 0) &= 0 \\ Y(0, T) &= Y_b (\equiv A_7 = \eta_0/H_0), \quad Y(1, T) = Y_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

すなわち、滞水層の両端で外水位の急激な上昇が生じ

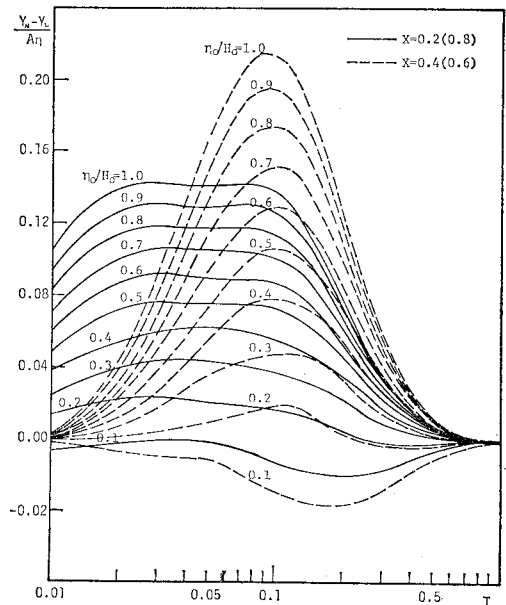


図-5 両端ステップ上昇の非線形性の評価図

た場合である。この場合は、両端における水位変動がまったく等しいステップ上昇であるから、定常状態では $Y(X, \infty) = Y_b$ となり Y_N と Y_L の2つの解は一致し、また生起現象は滞水層の中央線に対して対称になる。

このような両端ステップ上昇の場合も一端ステップ上昇の場合と同様、浸透の初期に非線形性が大きく、滞水層のどの地点においてもパラメーター η_0/H_0 の値にかかわらず、無次元時間 $T=0.1$ 程度より早い時刻で最大値を示し、 $T=0.4$ 以後は非線形性の評価値は急速に小さくなり、 $T=0.7$ 以後は実際上定常であるといえよう。

両端ステップ上昇の非線形性について特徴的なことは、一端ステップ上昇の場合と異なり、外水位変動端近傍よりも滞水層中央部付近で非線形性の評価値が大きく、両端からの影響の相乗効果すなわち干渉効果が明確に現れていることである。さらに、一端ステップ上昇の場合と比較して、評価値が相対的に大きく、特に中央部付近でそれが顕著である。

図-3 および 図-4 に実線で示された曲線の特徴からわかるように、非線形性の伝播速度は場所的に一定値ではなく、 $X=0.1 \sim 0.2$ では約 1.53、 $X=0.2 \sim 0.5$ では約 20.0 であり、一端ステップ変動のそれに比べて非常に大きい。

線形方程式 (14) の適用性は、従来一端ステップ変動の場合についてのみ検証されている¹⁹⁾ ようであるが、ここに示したように滞水層の両端条件による相乗効果が加わる場合は、基礎式のもつ非線形性が予想以上に大きくなることに注意しなければならない。

e) 一端周期変動の場合

次に、より一般的な外水位変動として、次のような単一波周期変動が与えられた場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} Y(0, T) &= A_y \sin \omega T \quad (T \leq T_p) \\ &= 0 \quad (T > T_p) \\ Y(1, T) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (38)$$

ここに、 $\omega = 2\pi/T_p$ で T_p は単一波の周期である。ここでは本研究で用いた砂層モデルの実験結果と対比して考察する目的のために、 $k=0.43$ cm/s、 $\lambda=0.3$ 、 $H_0=40$ cm、 $l=300$ cm の砂層モデルに $t_p=24$ 分の単一波を与えた場合の無次元周期 $T_p=0.88$ をとって計算を行った。

図-6 に計算結果を示す。

図-2 と 図-6 を比較すれば、非線形性の生起特性の相違が明らかである。

この場合、 $T=0.22$ と $T=0.66$ で外水位変動はそれぞれ山と谷になるが、非線形性の評価値もこれに対応して2つの極値を示している。この2つの時刻で $|\eta_0/H_0|$ は等しいが、 $T=0.22$ 付近に比して $T=0.66$ 付近で非

線形性の評価値が大きくなっていることは、 η が負となり相対的に水深の浅い流れになるためであろう。この図には描いていないが $\eta_0/H_0=1.0$ では非線形性の評価値の最大値は 26% にもなる。また、 $\eta_0/H_0=0.1$ でも $X=0.2$ 地点で最大 6% と非線形性がかなり大きくなることは注意する必要がある。

すなわち、非線形性が η_0/H_0 の値によって左右されることはすでに説明したとおりであるが、図-2 と 図-6 の比較により外水位の変動パターンによっても異なってくるのが明らかになった。

d) 両端周期変動の場合

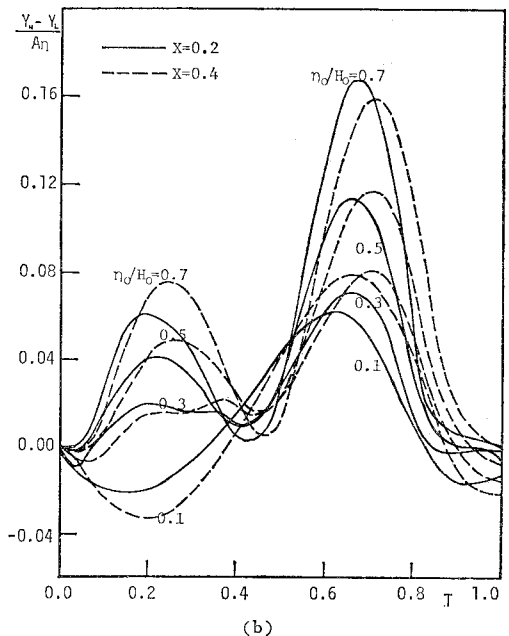
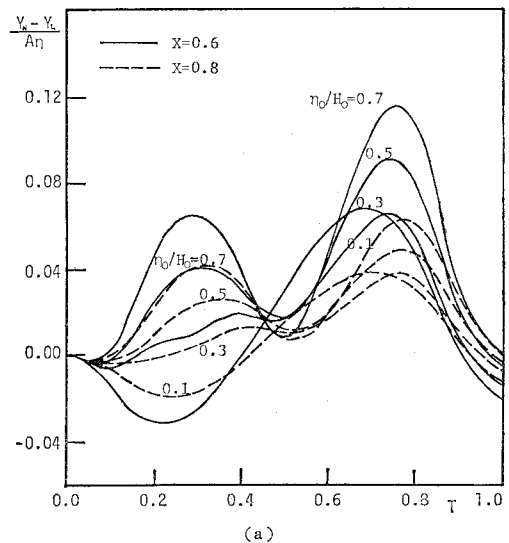
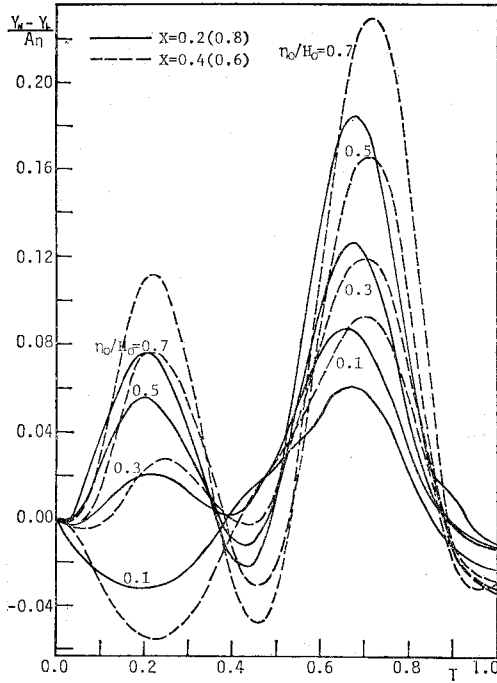


図-6 一端周期変動の非線形性の評価図



図一七 両端周期変動の非線形性の評価図

最後に、両端外水位に次のような周期変動が与えられた場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} Y(0, T) &= A_y \sin \omega T \quad (T \leq T_p) \\ &= 0 \quad (T > T_p) \\ Y(1, T) &= A_y \sin \omega T \quad (T \leq T_p) \\ &= 0 \quad (T > T_p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 ω , T_p は一端周期変動の場合と同じである。

図一七 に計算結果を示した。

非線形性の時間的な変化特性は、一端周期変動の場合とよく似た傾向にある。しかし、一端変動の場合に比較して非線形性の生起特性は、b) で述べたと同様に干渉効果によりいっそう助長され、同じ η_0/H_0 の値に対してもそのピーク値は大きく、特に滞水層の中央部付近でその傾向が顕著になる。また両端外水位が山を越えて初期の水位にもどる $T=0.44$ の近傍において、干渉効果により非線形性の評価値が負となることも注目される。

(3) 砂層モデル実験による非線形項の評価

基礎方程式の非線形項の大きさを砂層モデルによる浸透実験から評価してみる。式 (13) の右辺の微分項を次のように差分近似する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \frac{\eta_{x+\Delta x} - 2\eta_x + \eta_{x-\Delta x}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\eta_{x+\Delta x} - \eta_{x-\Delta x}}{2\Delta x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

上式の $\eta_{x+\Delta x}$, η_x , $\eta_{x-\Delta x}$ を実験結果から読み取り、式 (13) の右辺の各項、すなわち $H_0 \partial^2 \eta / \partial x^2$, $\eta \partial^2 \eta / \partial x^2$,

$(\partial \eta / \partial x)^2$ を算出する。実験値を用いて非線形性を評価しようとする場合、実験から得られる各測点の水位は非線形性を含まないのであって、式 (14) の線形現象としての水位は実際には求め得ない。したがって、前節で示したような水位による非線形性の評価法を用いることができないので、上の 3 つの項を代数的に加えた量を $H_0 \partial^2 \eta / \partial x^2$ で除した値をもって、非線形性を評価してみることとする。

ここで、実験モデルおよび実験方法ならびに実験の分類について簡単に説明しておく。

実験水槽本体は長さ 400 cm, 幅 60 cm, 高さ 90 cm であり、両端は水頭可変装置に連結されており、これによって砂層両端の外水位条件を任意に与えることができる。砂層モデルは、この水槽の長さ 300 cm, 幅 60 cm, 高さ 70 cm の部分に定常透水係数 $k=0.43$ cm/s, 有効径 0.58 mm, 均等係数 2.16 のふるい砂を用いて造られた。初期水位 $H_0=40$ cm として、水頭可変装置により所定の外水位変動条件を与え、20 cm 間隔に設定された滞水層(砂層)内の測点の水位をマンメーターと水圧計によって検出した。

外水位変動条件は、その変動パターンと外水位変動量 (η_0, η_l) によって分類し、外水位のステップ降下を SD, 外水位周期変動のパターンを PV, 三角波の変動パターンを TV と記号化し、外水位変動量の大きさをたとえば SD 20 のように数値化して表現した。

ここでは、数多くの実験ケースのうちから、SD 20 と SD 22 の実験に基づく上述の非線形性の計算結果を表一 2 に、また、PV 20 と PV 22 のそれを表一 3 に示している。

ここに示した実験ケースの外水位変動量は、SD 20 が $\eta_0=7.5$ cm, $\eta_l=0$ の一端ステップ降下であり、SD 22

表一 2 非線形項の評価 (ステップ降下)

t	SD 20				SD 22	
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2, 0.8	0.4, 0.6
10°	0.97	0.99	1.00	0.99	0.97	0.99
20°	0.91	0.99	—	0.99	0.91	—
30°	0.84	1.01	0.98	1.00	0.87	0.94
40°	0.84	0.97	0.93	0.99	0.82	0.91
50°	0.85	0.94	0.93	0.97	0.85	0.91
1'00°	0.84	0.94	—	0.97	0.84	0.90
20°	0.84	0.94	0.92	0.96	0.80	—
40°	—	0.93	0.91	—	0.83	0.87
2'00°	0.84	0.94	0.94	0.95	0.81	0.87
20°	0.82	0.94	—	0.95	0.82	—
40°	0.75	0.92	—	0.94	0.83	0.85
3'00°	0.78	0.93	0.89	—	0.82	0.85
30°	—	0.93	0.89	0.93	0.83	0.85
4'00°	—	0.92	—	—	0.82	—
30°	0.78	0.91	—	0.93	0.81	0.84
6'00°	0.82	0.91	—	—	0.82	0.83
10'00°	0.82	0.90	0.89	0.94	1.00	0.82

表-3 非線形項の評価 (周期変動)

t	PV 20				PV 22	
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2, 0.8	0.4, 0.6
1	—	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01
2	1.04	—	—	—	—	1.03
3	1.07	1.03	1.02	1.01	1.06	1.05
4	1.08	1.05	1.03	1.02	1.08	1.07
5	1.11	1.09	1.05	1.01	1.11	1.10
6	1.12	1.13	1.05	1.00	1.14	1.11
7	1.15	—	1.06	1.02	1.14	1.13
8	1.09	1.05	1.06	1.00	1.13	—
9	1.08	1.07	1.05	1.01	1.10	1.10
10	1.06	—	—	—	1.08	1.04
11	1.03	1.03	1.03	—	1.05	1.01
12	1.01	1.02	1.01	1.01	1.03	0.97
13	0.98	0.99	1.00	1.00	1.01	0.91
14	0.95	0.98	—	0.99	0.99	0.98
15	0.89	0.98	0.98	0.99	0.97	0.83
16	0.88	0.89	—	—	—	0.80
17	0.97	—	0.95	—	0.91	0.88
18	0.86	—	0.96	0.96	0.89	—
19	0.91	0.95	—	0.98	0.89	0.91
20	0.93	0.93	0.97	—	1.00	0.90
21	0.97	0.96	0.98	0.98	—	0.92
22	—	0.98	1.00	0.99	0.96	0.95
23	0.99	0.99	0.99	—	0.97	0.97
24	1.00	1.00	1.00	1.00	—	0.98

は $\eta_0 = \eta_L = 7.5 \text{ cm}$ の両端ステップ降下であるということを示している。したがって、 $H_0 = 40 \text{ cm}$ であるから η_0/H_0 は 0.188 である。

表-2 には、SD 20 と SD 22 の実験における 16 測点 ($4x = 20 \text{ cm}$) のうちの 4 測点 ($x/l = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) の浸透実験開始から実時間 10 分までの各時刻における非線形性を表す無次元値を示してある。表中の一はそのところにおける値がなんらかの原因で得られなかったことを意味している。

この値が 1.00 であればまったく非線形項の影響がないということになり、1.00 から偏差値が小さいほどその時刻における変動水位 $\eta(x, t)$ は非線形性が小さいということになり、前節で考察した非線形性も小さくなるであろうと推論できよう。

表に示された結果より、SD 20, SD 22 の両ケースとも外水位変動端に近い測点ほど非線形項が大きい傾向にあることがわかる。また、ここに示した 2 つの実験ケースを比較すれば両端変動である SD 22 の方が非線形項は砂層の中央部近傍 ($x/l = 0.4, 0.6$) でやや大きいようであるが、それほど大きな差は認められない。

さて、表中 SD 20 の $x/l = 0.2, t = 2'40''$ のときの非線形項の評価値は 0.75 であるから、1.00 からの偏差値は 0.25 とかなり大きい。しかし、前節に示した非線形性の評価値、式 (35) に準じる値として、実験から得られる $t = 2'40''$ の水位から Y_N を計算し、式 (14) から計算された水位を Y_L として $((Y_N - Y_L)/A_\eta)$ を求めれば 0.049 程度にしかならず、予想に反してかなり小さ

な値にしかならない。

次に、表-3 に示した外水位周期変動の実験結果をみれば、PV 22 の方が、非線形項は中央部近傍でやや大きい。表の値は 0.80~1.14 の範囲にあるが、一端変動の場合と同様に $(Y_N - Y_L)/A_\eta$ を計算するとかなり小さな値にしかならない。すなわち、前節の最後で述べたような非線形性の生起特性は現実には起こり得ないといえるかもしれない。

以上のことから、式 (13) の非線形項の占める割合は 20% 以上に達することもあるが、実現象の水位としては式 (14) から計算される水位とはあまり差がなく数% 以下である。したがって、砂層モデルにおける実現象と前節で考察した理想的な飽和浸透の解析結果との相違が何に基づくものであるかを解明することが次の問題となる。

このことについてはすでに若干言及している^{20), 21)}が、結論的に述べれば、式 (11) で解析すべき現象を、式 (13) あるいは式 (14) で表現しようとしたことに起因するといえる。すなわち、非定常浸透現象の把握をさらに一歩発展させるためには、透水係数 k および有効間隙率 λ の変化特性の解明とその関数表示に基づく数値モデルの確立が必要となる。

4. 結 論

準 1 次元の長方形滞水層モデルを設定して非定常浸透流を表現する基礎方程式を誘導し、式 (13) の非線形性を一般的に論じるため、これを無次元化した Crank-Nicholson 型差分方程式を Gauss-Seidel 反復法で解き、外水位変動パターンおよび外水位変動量と初期水位との相対的な大きさ η_0/H_0 を考慮して、式 (14) の線形解との相対差、すなわち $(Y_N - Y_L)/A_\eta$ でその非線形性を評価し、場所的・時間的な変化特性を明らかにするとともに、その適用性について論じた。

以下にこれまで述べてきた成果を要約するとともに、今後の研究の方向を示して結論とする。

(1) 非線形性を定量的に評価し得るように、 $(Y_N - Y_L)/A_\eta, \eta_0/H_0, X, T$ なる無次元量を用いて現象を解析し、その評価図の一例として図-2, 5~7 を示した。

(2) 非線形性の評価値 $(Y_N - Y_L)/A_\eta$ は、 $A_\eta = \eta_0/H_0$ の値に強く支配されるとともに、外水位の変動パターンによっても非常に異なることを明らかにした。すなわち、

(i) 一端ステップ上昇では、外水位変動端近傍で浸透の初期に非線形性が強く現れる。また、その非線形性は時間の経過とともに急速に減滅するが、非線形性の評価値の最大値は $3.16 \times (kH_0/\lambda l)$ の一定速度で滞水層内

を伝播する。

(ii) 両端ステップ上昇では、両端変動条件による相乗効果により、滞水層の中央部で非線形性が非常に大きくなる。

(iii) 周期変動の場合には、外水位変動の山と谷に対応して非線形性が極値をとり、その値は η_0/H_0 の値に強く影響される。

(iv) 両端周期変動の場合には、(ii) で述べたと同様に相乗効果のため非線形性はさらに助長され、特に滞水層中央部でその傾向が顕著である。

(3) η_0/H_0 が大きくなるほど非線形性も増大するが、 $A_y = \eta_0/H_0 = 0.2$ 程度以下であれば非線形性は小さく、 Y_N と Y_L の相対差の A_y に対する割合は数%以下である。したがって、線形方程式 (14) の適用性もかなり広いといえよう。

(4) さらに、基礎式の非線形項の大きさを砂層モデル実験の結果から考察した。その結果、 η_0/H_0 が 0.2 程度であっても式 (13) の非線形項の占める割合はかなり大きくなるが、応答水位は式 (14) に基づいて計算された水位と大差なく、式 (35) で評価した非線形性はそれほど大きくはならないであろう。

以上が本研究でまとめた成果であるが、今後さらに、両端変動特性の相違に基づく相乗効果（干渉効果）を定量的に評価すること、および現象の非線形性をより詳細に検討するために式 (11) に立ち返って滞水層特性の変化の解明とその関数表示、定式化の研究を進めていく必要がある。

干渉効果は、滞水層の初期含水率あるいは浸透現象の貯留過程-排水過程によって変わるものと考えられるため、実験的再現性が悪く、定量的な評価を詳細に行うことは非常に難しいと予想される。また、同様の理由から k , λ の変化特性を一般的に関数表示すること²²⁾ もかなり困難であろう。したがって、単純な水平あるいは鉛直透水管等による実験的研究や乱数モデルによるシミュレーションなどの基本的な研究も有効であると考えられ、今後の研究課題の 1 つである。

最後に、本研究を遂行するにあたり有益なご助言をいただいた徳島大学教授 杉尾捨三郎先生に深甚の謝意を表します。また、実験および解析に助力された本学助手

西内剛三君および立石秀樹君（現 公成建設）に感謝いたします。

参考文献

- 1) Polubarinova-Kochina, P.Y. : Theory of Ground Water Movement, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1962.
- 2) Glover, R.E. : Ground-Water Movement, Engr. Monograph, No. 31, Denver, Colo., 1964.
- 3) Yeh, W.W.G. : Nonsteady Flow to Surface Reservoir, Proc. ASCE, Vol. 96, No. HY 3, pp. 609~618, 1970.
- 4) Bruch, J.C.Jr. : Nonlinear Equation of Unsteady Ground-Water Flow, Proc. ASCE, Vol. 99, No. HY 3, pp. 395~403, 1973.
- 5) 山上拓男 : 有限要素法による非定常浸透流解析に関する一考察, 土木学会論文報告集, No. 263, pp. 85~96, 1977.
- 6) 赤井浩一・大西有三・西垣 誠 : 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析, 土木学会論文報告集, No. 264, pp. 87~96, 1977.
- 7) 赤井浩一・宇野尚雄 : 土中の準一次元非定常浸透流に関する研究, 土木学会論文集, No. 127, pp. 14~22, 1966.
- 8) 嶋 祐之 : 鉛直流速の影響を考慮した堤体浸透流の非定常現象, 土木学会第 23 回年次学術講演会講演概要集, II-150, pp. 419~422, 1968.
- 9) 尾島 勝・足立一美 : 自由地下水の変動に及ぼす干渉効果の数値解析的検討, 土木学会第 32 回年次学術講演会講演概要集, II-250, pp. 483~484, 1977.
- 10) Ojima, M. : Basic Investigations on Fluctuation of Free-Surface Ground-Water Level Influenced by Varying Outer Water Level, Bull. of Fac. of Engr., Tokushima Univ., Vol. 14, pp. 1~14, 1977.
- 11) 尾島 勝・足立一美・西内剛三 : 外水位変動による自由地下水の非定常応答に関する研究, 土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集, II-314, pp. 604~605, 1978.
- 12) 岩佐義朗 : 水理学, 朝倉土木工学講座 3, pp. 234~235, 1967.
- 13) 大井鉄郎 : 応用偏微分方程式論, 岩波書店, pp. 64~70.
- 14) Smith, G.D. (藤川洋一郎訳) : 電算機による偏微分方程式の解法, サイエンス社, pp. 17~18.
- 15) 14) に同じ, pp. 31~33.
- 16) Forsythe, G.E. and W.R. Wasow (藤野精一訳) : 偏微分方程式の差分法による近似解法 (上), 吉岡書店, pp. 159~161.
- 17) 東野 一・川谷 健 : 非線形微分方程式の数値解析と誤差についての一考察, 土木学会第 32 回年次学術講演会講演概要集, II-130, pp. 249~250, 1977.
- 18) 14) に同じ, pp. 63~78.
- 19) 7) に同じ.
- 20) 9) に同じ.
- 21) 10) に同じ.
- 22) 6) に同じ.

(1978.9.12・受付)