

アンボンドPC構造物の組み立て工程を考慮した応力解析

UNBONDED PRECAST ELEMENTS AND ITS SKELETAL ASSEMBLAGE

田 辺 忠 顕*・P.W. HONG**

By Tada-aki TANABE and P.W. HONG

て求められることを例題によって示した。

1. 序

プレストレストコンクリート構造物（以下、PC構造物とよぶ）の挙動は、プレストレス用のテンドンがグラウト剤によってコンクリートに十分付着しているか否かによって本質的に異なり、付着が存在すればはりとして一般に取り扱える部材も、付着が存在しない場合にはタイドアーチ的取り扱いが必要になる。従来、PC構造物の設計においては、この種の取り扱いが厳密にはなされていないが、原子力発電所用構造物のような重要構造物にアンボンドテンドンが使用され得る可能性もでてきており、精密な応力解析が望まれている。過去におけるPC構造物の応力解析は、プレストレッシングによる不静定構造の2次モーメントに関するものが大半で、Parma・Paris¹⁾、Fiesenheiser²⁾、Bailey・Ferguson³⁾らによって各種の簡易計算法が発表されて以来、Moorman⁴⁾の等価荷重法、Lin⁵⁾のLoad balancing 法等に発展してきている。

フレームの2次モーメントを取り扱った報告として、Morice・Lewis⁶⁾、Folderberg・Brandson⁷⁾らがある。上記の文献はいずれも2次モーメントの計算方法に関するもので部材がはりとして取り扱えるものに限られており、タイドアーチとしての扱いは不可能である。

本研究ははり・柱の集合あるいはタイドアーチの集合あるいはそれらの中間部材の集合等、いずれの集合としてのPC構造物にも適用し得る一般的プレストレスト骨組応力解析手法を有限要素法によって示したものであって、実際上興味ある問題で過去に厳密な解析がなされていない諸問題について数値計算結果を示したほか、プレキャスト部材を、プレストレッシングによって順次組み立てて作製した骨組構造物の初期応力も、同様の取り扱い

2. 仮定ならびにアンボンドテンドンのひずみエネルギー式

定式化にあたって、次の仮定を設けた。

- (i) 断面の、コンクリート部分におけるひずみ分布は線形とする。
- (ii) PCテンドンの応力・ひずみ関係およびコンクリートの応力・ひずみ関係は線形とする。
- (iii) せん断変形は無視する。
- (iv) 微小変形としての取り扱いが可能である。

上記の仮定のもとで、付着の有無を考慮した増分形のポテンシャルエネルギー式が次のように成り立つ。

$$\Delta \Pi \pi_p = \Delta U_c + \Delta U_s + \Delta V + \Delta U_f \dots \dots \dots (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta U_c &= \sum_{i=1}^{NELT} \frac{1}{2} E_c \int_{VOL} \Delta \epsilon_{ci}^2 dVOL \\ &= \sum_{i=1}^{NELT} \frac{1}{2} E_c \int_{VOL} (\epsilon_{c2i} - \epsilon_{c1i})^2 dVOL \dots \dots (2) \end{aligned}$$

: コンクリート部分のひずみエネルギー増分

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \sum_{i=1}^{NJNT} [(\Delta P_i(u_{2i} - u_{1i}) + \Delta F_i(v_{2i} - v_{1i}) \\ &\quad + \Delta M_i(\theta_{2i} - \theta_{1i})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{NELT} \int_0^{l_i} \Delta q_i(v_{2i} - v_{1i}) dx \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

: 外力によるエネルギー増分

ΔU_s : PCテンドンに蓄えられるひずみエネルギー増分

ΔU_f : PCテンドンとコンクリート間のすべり摩擦によるエネルギー損失増分

E_c : コンクリートのヤング率

ϵ_{cji} : i 節点の j 段階におけるコンクリートひずみ

u_{ji} : i 節点の j 段階の x 方向変位

v_{ji} : i 節点の j 段階の y 方向変位

* 正会員 工博 (財)電力中央研究所土木技術研究所

** Graduate Student of Asian Institute of Technology

- ΔP_i : i 節点に作用する軸方向外力増分
- ΔF_i : i 節点に作用する軸直角方向外力増分
- ΔM_i : i 節点に作用するモーメント増分
- Δq_i : i エレメントの分布外力増分

- E_s : テンダンのヤング率
- $A_{s,jk}$: k 部材の j テンダンの断面積
- L_{jk} : k 部材の j テンダンの長さ

各エネルギー項はシステムの各段階ごとに变化する。たとえば、プレストレス導入時の応力計算のためには、プレストレスを外力と考えるので、そのPCテンダンのひずみエネルギー ΔU_s およびそのPCテンダンのすべり摩擦によるエネルギー損失分 ΔU_f を考慮する必要がない。しかし、部材と部材を接合するためにプレストレスが使用される場合には、すでにプレストレスが導入されている部材に対して ΔU_s および ΔU_f が考慮されなければならない。

(2) 摩擦によるエネルギー損失

テンダンのすべり、コンクリートとの間に相対変位が発生するときには摩擦によるエネルギー損失が生じる。考えている位置でのコンクリートの変位およびテンダンの変位は、次のように与えられる。

$$\text{コンクリートの変位} = \int_0^x \Delta \epsilon_{cs} dx$$

$$\text{テンダンの変位} = \int_0^x \Delta \epsilon_s dx$$

したがって、摩擦を生じる相対変位 Δx は、

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_0^x (\Delta \epsilon_s - \Delta \epsilon_{cs}) dx \\ &= \int_0^x \left[K_s \left(\frac{1}{L} \int_0^L \Delta \epsilon_{cs} dx - \Delta \epsilon_{cs} \right) \right] dx \dots (7) \end{aligned}$$

$x=x$ で作用している摩擦力を $F_f(x)$ とすると摩擦エネルギー U_f は、次式で与えられる。

$$U_f = \int_0^L \Delta x F_f(x) dx \dots (8)$$

したがって、システム全体の摩擦エネルギーは、

$$\Delta U_f = \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \int_0^{L_{jk}} \Delta x_{jk} F_f(x) dx \dots (9)$$

(1) PCテンダンのひずみエネルギー増分

付着力が完全でテンダンとコンクリートとの間にすべりが存在しない場合には、テンダンのひずみ増分はテンダン位置のコンクリートのひずみ増分 $\Delta \epsilon_{cs}$ と一致しなければならない。逆に付着力がまったく存在しない場合には、テンダン内のひずみ増分 $\Delta \epsilon_{av}$ は一方の端から他端まで同一で次式で表される (Fig. 1 参照)。

$$\Delta \epsilon_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L \Delta \epsilon_{cs} dx \dots (4)$$

L : テンダンの長さ

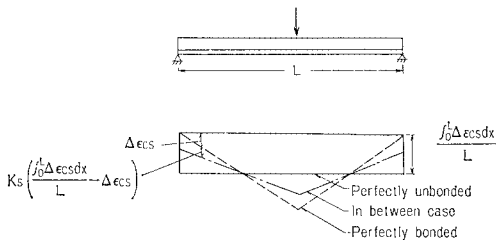


Fig. 1 The Distribution of Change of Steel Strain when Loading Added.

多くの実構造物は上記2ケースの中間に存在すると考えられその場合のテンダン各位置のひずみは次式で与えられる。ただし K_s はすべり係数で一定と仮定する。

$$\Delta \epsilon_s = K_s \left(\frac{1}{L} \int_0^L \Delta \epsilon_{cs} dx - \Delta \epsilon_{cs} \right) + \Delta \epsilon_{cs} \dots (5)$$

式(5)を用いてテンダンのひずみエネルギー増分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta U_s &= \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{1}{2} E_s A_{s,jk} \int_0^{L_{jk}} \Delta \epsilon_s^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{1}{2} E_s A_{s,jk} \int_0^{L_{jk}} \left[K_s \left(\frac{1}{L_{jk}} \int_0^{L_{jk}} \Delta \epsilon_{cs} dx - \Delta \epsilon_{cs} \right) + \Delta \epsilon_{cs} \right]^2 dx \dots (6) \end{aligned}$$

ここで、

(3) 導入プレストレスによる初期ひずみ

導入プレストレスの効果を等価な外力で置き換えるために、次の初期ひずみ ϵ_{cp} を与える。はり要素を対象としているので、

$$\epsilon_{cp} = \frac{P(x)}{E_c} \left(\frac{1}{A_c} + \frac{y_0 y}{I_c} \right) \dots (10)$$

導入時の摩擦を考慮するならば、

$$P(x) = P_0 e^{-(\mu \alpha(x) + ks)} \dots (11)$$

で与えられると仮定する。厳密には、式(11)で与えられる P の分布と現実の分布は異なると考えられるが、その差は無視できるものとした。

ここで、

- α : 緊張定着端から考慮している点までのテンダンの総変化角
- μ : テンダンの曲率のために生じる摩擦の摩擦係数
- k : テンダン孔あるいはシースの波打ちによって生じる摩擦の摩擦係数
- s : 緊張定着端から考慮している点までの距離
- A_c : コンクリート部分の断面積
- y_0 : テンダンの偏心距離

(4) フレームにおける接合点の取り扱い

すでに打設が完了したフレームにプレストレスを導入する際の解析には、部材のすべての接合部が剛で2部材の接合端は同じ変位・回転を行うと仮定した。しかし部材をプレストレスングによって次々に組み立ててゆく場合には、接合点の両端の接合面が一致するまで回転変形はおおの独立とし、水平鉛直両変位は最初から同一とした。

(5) ひびわれの進展

断面の引張ひずみが引張ひずみ限界を上回った場合には、その位置にひびわれが発生する。この現象はエレメントの形を以下のように修正することにより考慮した。すなわち、Fig. 2 に示すようにもと長方形エレメントであったものをテーパエレメントに修正し、新エレメント内のすべてのひずみがひびわれひずみの限界内になるまでテーパの一边を縮小することにした。計算のフロー図を Fig. 3 に示した。

3. 剛性マトリックスの誘導

要素および要素内の変位関数としては種々考えられるが、ここでは最も簡単な6自由度を有する矩形はり要素を使用した。したがって、変位関数は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} u &= [N_u] \{d_u\} \\ v &= [N_v] \{d_v\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 u, v ははり軸方向および軸直角方向の変位で

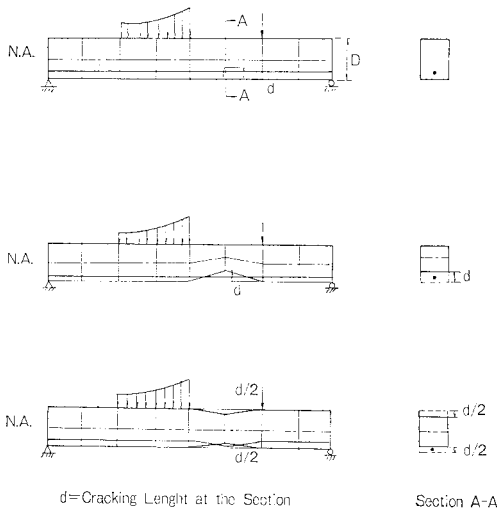


Fig. 2 The Modification of the Prismatic Element into Taper Element at the Cracked Section.

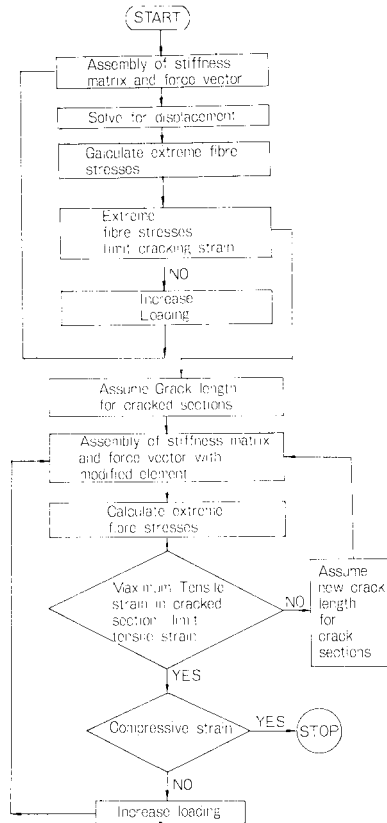


Fig. 3 Flow Chart for Iterative Processes.

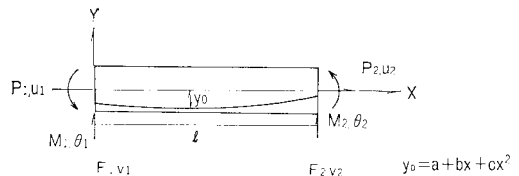


Fig. 4 Sign Convention for the Beam Element.

d_u, d_v はそれぞれ対応する節点変位である (Fig. 4 参照)。

$$N_u = \left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l} \right]$$

$$N_v = \left[\left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right), \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \right]$$

要素内の軸方向ひずみは次のように表される。

$$\epsilon_x = u' - yv'' = [N_u', -yN_v''] \left\{ \begin{aligned} d_u \\ d_v \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

式 (13) を式 (2) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Delta U_c &= \sum_{i=1}^{NELT} \frac{E_c}{2} \int_{VOL} (\epsilon_{czi} - \epsilon_{ci})^2 dVOL \\ &= \sum_{i=1}^{NELT} \frac{E_c}{2} \int_{VOL} [(u_2' - yv_2'')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(u_1' - yv_1'')^2 dVOL \\
 = & \sum_{i=1}^{NELT} \frac{E_c}{2} \int_{VOL} [d_{2i}^T T_i^T G_i^T G_i T_i d_{2i} \\
 & - 2 d_{2i}^T T_i^T G_i^T G_i T_i d_{1i} \\
 & + d_{1i}^T T_i^T G_i^T G_i T_i d_{1i}] dVOL \dots \dots (14)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$G_i = [N_{u'} - yN_{v''}]$$

T_i : エレメント i についての座標変換マトリックス

式 (13) を式 (6) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \Delta U_s = & \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{2} \int_0^{L_{jk}} [\Delta \epsilon_{cs} \\
 & + K_s \left(\frac{1}{L_{jk}} \int_0^{L_{jk}} \Delta \epsilon_{cs} dx - \Delta \epsilon_{cs} \right)]^2 dx \\
 = & \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{2} (1-K_s)^2 \sum_{i=1}^{NNELT} \int_0^{l_{ijk}} \Delta \epsilon_{cs}^2 dx \\
 & + \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{2} \frac{K_s(2-K_s)}{L_{jk}} \\
 & \cdot \left[\sum_{i=1}^{NNELT} \int_0^{l_{ijk}} \Delta \epsilon_{cs} dx \right]^2 \\
 = & \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{2} (1-K_s)^2 \sum_{i=1}^{NNELT} \int_0^{l_{ijk}} [(u_2' \\
 & - y_{0,ijk} v_2'') - (u_1' - y_{0,ijk} v_1'')]^2 dx \\
 & + \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{2} \frac{K_s(2-K_s)}{L_{jk}} \\
 & \cdot \left[\sum_{i=1}^{NNELT} \int_0^{l_{ijk}} [(u_2' - y_{0,ijk} v_2'') \right. \\
 & \left. - (u_1' - y_{0,ijk} v_1'')] dx \right]^2 \\
 = & \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{2} (1-K_s)^2 \sum_{i=1}^{NNELT} \\
 & \cdot \int_0^{l_{ijk}} (d_{2i}^T T_i^T H_i^T H_i T_i d_{2i} \\
 & - 2 d_{2i}^T T_i^T H_i^T H_i T_i d_{1i} \\
 & + d_{1i}^T T_i^T H_i^T H_i T_i d_{1i}) dx \\
 & + \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{2} \frac{K_s(2-K_s)}{L_{jk}} \\
 & \cdot (d_{2i}^T S_j^T S_j d_{2i} - 2 d_{2i}^T S_j^T S_j d_{1i} \\
 & + d_{1i}^T S_j^T S_j d_{1i}) \dots \dots (15)
 \end{aligned}$$

ここで、

$y_{0,ijk}$: k 部材の j 相のケーブルの i 要素内の y 座標

$$H_i = [N_{u'}, y_{0,ijk} N_{v''}]$$

T_i : i 要素の座標変換マトリックス

$$S_j = \sum_{i=1}^{NNELT} \int_0^{l_{ijk}} H_i T_i dx$$

外部エネルギーの項は、

$$\begin{aligned}
 \Delta V = & - \sum_{i=1}^{NELT} \left[\Delta F_i T_i (d_{2i} - d_{1i}) \right. \\
 & \left. + \int_0^{l_i} \Delta q_i N_i T_i (d_{2i} - d_{1i}) dx \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & - \sum_{i=1}^{NJNT} \left[d_{2i}^T T_i^T \Delta F_i^T \right. \\
 & \left. - \sum_{i=1}^{NELT} \int_0^{l_i} \Delta q_i d_{2i}^T T_i^T N_i^T dx + \text{constant} \right] \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

ここで、

ΔF_i : 節点 i における節点力増分のベクトル

Δq_i : 要素 i における分布荷重増分のベクトル

$$N_i = [N_u, N_v]$$

$$\text{constant} = \left[\sum_{i=1}^{NJNT} \Delta F_i T_i d_{1i} + \sum_{i=1}^{NELT} \int_0^{l_i} \Delta q_i N_i T_i d_{1i} dx \right]$$

すべりによる摩擦エネルギー損失は、たとえば $f_r(x) = \alpha dx$ とおいて、 ΔU_s と同様に扱うことも可能であるが、 α の値が実際の構造物の種類、ケーブルの配置等によって異なると考えられること、また Δx そのものにも依存すると考えられたので、一応ここでは無視して最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いることにする。したがって、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta \Pi_p}{\partial d_{2i}} = & \frac{\partial \Delta U_c}{\partial d_{2i}} + \frac{\partial \Delta U_s}{\partial d_{2i}} + \frac{\partial \Delta V}{\partial d_{2i}} \\
 = & \sum_{i=1}^{NELT} E_c \int_{VOL} (T_i^T G_i^T G_i T_i d_{2i} \\
 & - T_i^T G_i^T G_i T_i d_{1i}) dVOL \\
 & + \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} E_s A_{s,jk} (1-K_s)^2 \sum_{i=1}^{NNELT} \\
 & \cdot \int_0^{l_{ijk}} (T_i^T H_i^T H_i T_i d_{2i} \\
 & - T_i^T H_i^T H_i T_i d_{1i}) dx \\
 & + \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} E_s A_{s,jk} \frac{K_s(2-K_s)}{L_{jk}} \\
 & \cdot (S_j^T S_j d_{2i} - S_j^T S_j d_{1i}) \\
 & - \sum_{i=1}^{NJNT} T_i^T \Delta F_i^T - \sum_{i=1}^{NELT} \int_0^{l_i} \Delta q_i T_i^T N_i^T dx = 0 \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

よって最終的に、

$$\begin{aligned}
 \{[K_c] + [K_{s1}] + [K_{s2}]\} \{d_{2i}\} \\
 = [F^0] + [F] + [F_{s1}] + [F_{s2}] \dots \dots (18)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$[K_c] = \sum_{i=1}^{NELT} E_c \int_{VOL} (T_i^T G_i^T G_i T_i) dx \dots (19-1)$$

$$\begin{aligned}
 [K_{s1}] = & \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} E_s A_{s,jk} (1-K_s)^2 \sum_{i=1}^{NNELT} \\
 & \cdot \int_0^{l_{ijk}} (T_i^T H_i^T H_i T_i) dx \dots \dots (19-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{s2}] = & \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{L_{jk}} K_s(2-K_s) (S_j^T S_j) \\
 & \dots \dots (19-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F_0] = & \sum_{i=1}^{NELT} E_c \int_{VOL} T_i^T G_i^T G_i T_i d_{1i} dVOL \\
 & \dots \dots (19-4)
 \end{aligned}$$

$$[F_{s1}] = \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} E_s A_{s,jk} (1-K_s)^2 \sum_{i=1}^{NNELT} \int_0^{l_{ijk}} (T_i^T H_i^T H_i T_i d_{i,i}) dx \dots \dots (19-5)$$

$$[F_{s2}] = \sum_{k=1}^{MEMB} \sum_{j=1}^{NCA} \frac{E_s A_{s,jk}}{L_{jk}} K_s (2-K_s) S_j^T S_j d_{i,i} \dots \dots \dots (19-6)$$

$$[F] = \sum_{i=1}^{NNJT} T_i^T \Delta F_i^T + \sum_{i=1}^{NNLT} \int_0^{l_i} \Delta q_i T_i^T N_i^T dx \dots \dots \dots (19-7)$$

テーパのついたはりの場合にも厳密な変位関数を用い、同様の手法により剛性マトリックスを誘導することができる。

4. 数値計算および考察

上記の解析法に基づき、従来明らかにされていなかった実際上興味のある問題について、以下の数値解析を行った。しかし以下の計算例ではすべて自重の影響を考慮せず、主として提案した手法の応用例の意味を示すことに重点をおいている。

(1) はりのひびわれ荷重に対する付着の有無の影響

プレストレストコンクリートはりのひびわれ荷重の解析では、 tendon 内のプレストレスの変化を無視し、コンクリート全断面の断面2次モーメントを使用するケースが多い。この場合にははりのひびわれ荷重は低めに計算されることになる。 Fig. 5 および Fig. 6 に数値計算を行ったPCはりの断面を示した。1つはI形はり、もう1つは矩形はりである。いずれの場合にも完全に付着が存在する場合 (K_s=0)、付着がまったく存在しない場合 (K_s=1.0)、簡易計算 (設計計算に使われるように

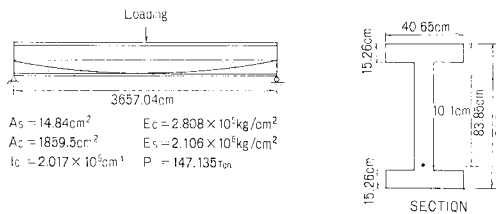


Fig. 5 Section Properties of the I-Beam.

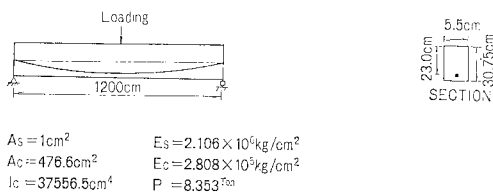


Fig. 6 The Frame Dimension and the way of Discretisation.

Table 1 Results for I-Section.

	Loading (t)	M _{crack} (t/m)	Comparison	Ratio
Straight Unbonded Tendon	12.69	M ₁	116.14	M ₁ /M ₂ 1.01
Parabolic Unbonded Tendon	12.63	M ₂	115.5	M ₂ /M ₂ 1.00
Bonded Tendon	13.52	M ₃	123.78	M ₃ /M ₂ 1.07
Neglected the Tendon Effect	11.97	M ₄	109.58	M ₄ /M ₂ 0.95

Table 2 Results for Rectangular Section.

	Loading (t)	M _{crack} (t/cm)	Comparison	Ratio
Straight Unbonded Tendon	0.704	M ₁	211.28	M ₁ /M ₂ 1.00
Parabolic Unbonded Tendon	0.704	M ₂	211.28	M ₂ /M ₂ 1.00
Bonded Tendon	0.711	M ₃	213.25	M ₃ /M ₂ 1.01
Neglected the Tendon Effect	0.696	M ₄	209.00	M ₄ /M ₂ 0.989

プレストレス一定としての計算) の場合の3ケースを検討した。ただし、ここでこの計算においては自重の影響を入れていないと同時にコンクリートの引張強度も40 kg/cm²としているので、結果そのものの数値は実構造に直接適用できないことを注意しておく。

Table 1 および Table 2 にその結果を示した。アンボンド tendon の場合には tendon が直線状か放物線状かでもひびわれ荷重が異なるのが Table 1 に示されているが、これは tendon 全体の伸び、したがって付加プレストレスの量が tendon 配置によって異なることを示している。Table 2 の矩形はりの場合にはその差異は有効桁の範囲ではないが、これは桁高が低くて直線状の tendon の場合も放物線状の tendon の場合もその配置にほとんど差異がないためと思われる。しかし、I 形はりの場合に、プレストレス一定とした場合と比較すれば、ボンドはりの場合に13%、アンボンドはりの場合に約6%大きなひびわれ荷重を与えている。矩形はりの場合にははりの高さが低いため付加プレストレス量の増加はそれほど大きくないが、I 形はりの場合には変形時の tendon の伸張がかなり大きく、ひびわれ荷重時の付加プレストレスはボンドはりの場合21.0t、アンボンドはりの場合10.7tで、初期有効プレストレス量のそれぞれ14.3%、7.3%の増加となっているからである。

(2) フレームのひびわれ荷重に対する付着の有無の影響

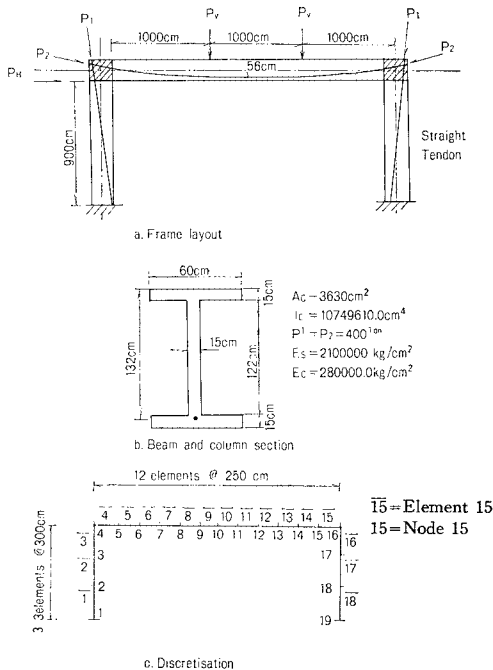
もう1つの例として Fig. 7 に示すポータルフレームについて2種類の荷重による応力を求め Table 3 に結果を示した。水平力が作用する場合には柱の tendon に発生する付加プレストレス量は左右の柱で異なり、アンボンドの場合、水平荷重作用側の tendon のプレストレス力はほとんど変化しないが、もう一方の柱の tendon

Table 3 Results for the Portal Frame shown in Fig. 7.The Loading Condition $v = P_H = 50.0 T$

Node		Bonded			Unbonded			Conventional Analysis		
		Top fibre Stresses (kg/cm ²)	Bot fibre Stresses (kg/cm ²)	Tendon force (t)	Top fibre Stresses (kg/cm ²)	Bot fibre Stresses (kg/cm ²)	Tendon force (t)	Top fibre Stresses (kg/cm ²)	Bot fibre Stresses (kg/cm ²)	Tendon force (t)
R. Column	1	-28.6	279.5	391.7	-28.9	284.5	400.7	-28.3	283.5	400
	4	175.2	82.4	420.6	166.6	86.3	400.7	165.2	87.9	400
Beam	4	174.4	85.0	419.6	171.2	88.3	407.1	165.7	90.1	400
	10	125.4	138.0	413.5	126.5	133.1	407.1	126.6	129.1	400
	15	80.6	184.8	440.1	68.9	190.6	407.1	63.5	192.2	400
L. Column	15	82.7	183.9	440.9	72.2	190.4	408.6	65.7	192.1	400
	19	184.8	80.7	427.0	189.2	76.0	408.6	190.3	70.2	400

The Loading Condition $P_V = 100.0 T$ and $P_H = 0.0 T$

Node		Bonded			Unbonded			Conventional Analysis		
		Top fibre Stresses (kg/cm ²)	Bot fibre Stresses (kg/cm ²)	Tendon force (t)	Top fibre Stresses (kg/cm ²)	Bot fibre Stresses (kg/cm ²)	Tendon force (t)	Top fibre Stresses (kg/cm ²)	Bot fibre Stresses (kg/cm ²)	Tendon force (t)
R. Column	1	172.8	113.5	419.7	176.9	113.7	409.5	179.2	106.2	400
	4	311.7	-12.4	461.7	322.7	-34.7	409.5	325.9	-43.2	400
Beam	4	-22.8	304.3	463.4	-39.8	313.5	417.8	-53.6	317.8	400
	10	220.7	59.7	430.6	223.3	50.4	417.8	223.6	40.7	400
Deflection at Node 10		4.97 cm			5.117 cm			5.247 cm		

**Fig. 7** Frame Dimension and way of Discretisation.

の付加プレストレス力は 8 t も発生している。また、はりの付加プレストレスも 7 t となる。ボンド tendon の場合には、さらに大きな付加モーメントが発生し、場所によっては 40 t と初期導入プレストレスの 10% にもなる。鉛直荷重のみの場合には、アンボンド tendon に対して柱で約 10 t、はりで 18 t の付加プレストレスが発生

し、ボンド tendon の場合場所によっては 63 t の付加プレストレスが発生する。これは初期導入プレストレスの 16% に相当する。付加プレストレスの量はただちにひびわれ荷重に影響を及ぼすものであって上記の割合に比例してひびわれ荷重も増加すると考えられる。

(3) 摩擦の程度がたわみおよび付加プレストレス量に及ぼす影響

当然のことながら、摩擦が無限度であれば附着が完全にコンクリートと tendon の相対変位はなく、剛性は最も高い。逆に、摩擦が零であればはりにはタイドアーチ的になり tendon の応力は平均化されて一様になり、剛性は最低になる。Fig. 5 に示した I 形はりを用いて、すべり係数を 0~1.0 に変化させて、ひびわれ荷重に近い 12.6 t の集中荷重によるたわみ、付加プレストレス量を求めたのが、Fig. 8, Fig. 9 である。これらより摩擦の程度により付加プレストレス量は直線的に変化し、たわみはほぼ放物線状に変化するのわかる。また、Fig. 10 には底面の引張ひずみの量を K_s の値とともに示したが、当然のことに K_s が 1.0 に近く、すなわちアンボンドの状態に近づくほど引張ひずみが大きくなるのが示されている。

(4) ひびわれ進展の解析

式 (12) に述べた変位関数を用いれば、最大ひずみは要素内の右端かあるいは左端で生じることになる。したがって、左端か右端がテーパの最小断面となり、かつそ

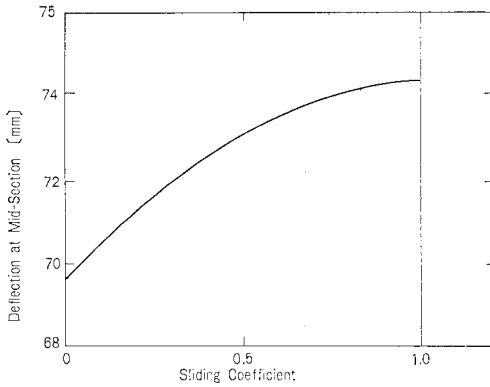


Fig. 8 Relation Between Displacement and Sliding Coefficient.

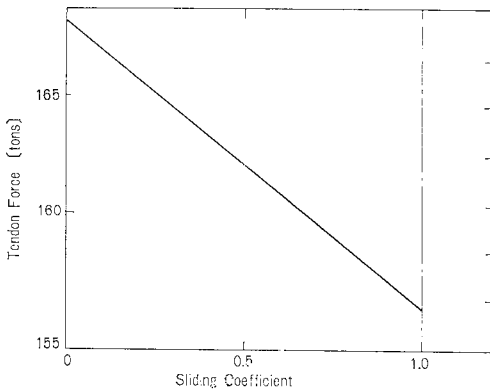


Fig. 9 Relation between Tendon Force and Sliding Coefficient.

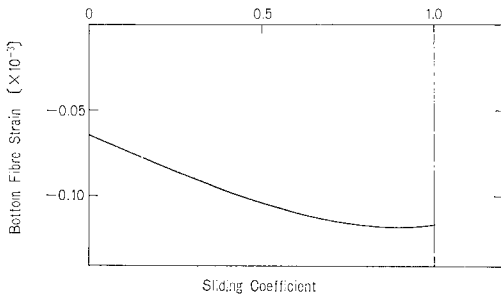


Fig. 10 Relation between Bottom Concrete Strain and Sliding Coefficient.

の断面の引張ひずみが限界引張ひずみとなるまで断面をイタレーションによって縮小し求めれば、ひびわれ進展解析になり、その手順を先に示した文献(8)の実験結果を解析値と比較したのが Fig. 11 である。弾性範囲のたわみならびにひびわれ発生荷重ひびわれ発生後のたわみもかなりよく一致していることが示されている。しかし、これはひびわれ進展もある程度まで解析し得るとい一例であって、要素の大きさ等による誤差の検討、

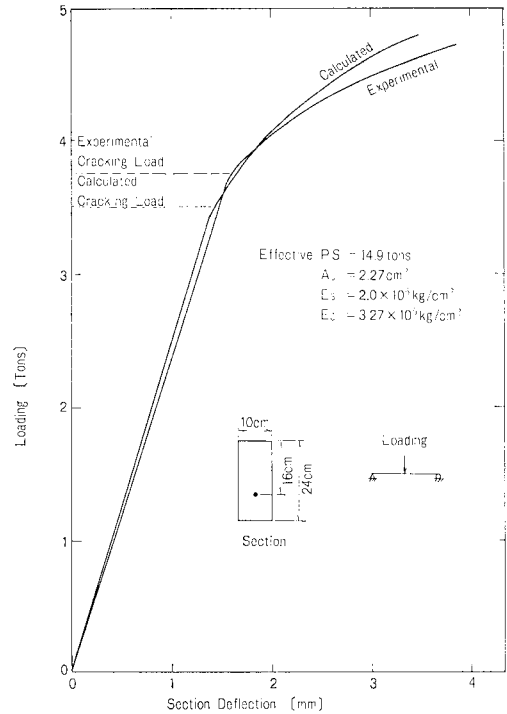


Fig. 11 Load-Deflection Curve for the Test Beam.

終局段階への適用は、現在の定式化の範囲内では不可能であること等の限界があり、これからの検討を要する点と考えられる。

(5) プレストレス導入順序による先行テンドンのプレストレス変化

部材断面が大きい場合には、多数のテンドンを同一部材に配置し、順次緊張してプレストレスを導入する機会が多い。この場合に、先に緊張されたテンドンは次に緊張されるテンドンにより影響され、有効プレストレスの減少をきたす。したがって、先に緊張されたテンドンほどプレストレス減少が大きくなる。現在、単純はりのような簡単な構造物については、全プレストレスによるはりの軸方向変形を計算し、次に、最初のテンドンのプレストレスの減少を計算し、その半分をすべてのテンドンに割りあてる等の方式がとられているが、フレームのように少々複雑な構造物になったりすべりの効果等を考慮する場合には、有効プレストレスの正確な推定等はほとんど不可能であった。しかし、上述の解析法はこの種の問題を容易に解決し得ると同時に、各テンドンのプレストレス導入過程の断面応力変化も容易に算出することができて、不容易なひびわれ発生を防ぐ一手段となる。例として、Fig. 12 の3本のテンドンが配置されており、1本ずつ順次緊張される単純はりの場合を示す。テンド

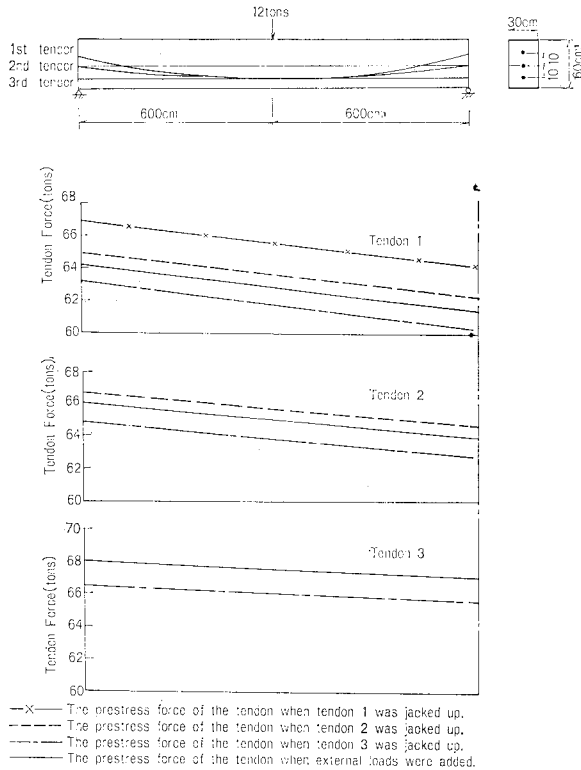


Fig. 12

Table 4 Effects of the Sequence of Jacking Up on the Stress Distribution at Mid-Span Section.

Sequence of Jacking Up	Stress at top fibre (kg/cm ²)	Stress at bot fibre (kg/cm ²)
1st Tendon Jacked Up	71.5	-0.20
2nd Tendon Jacked Up	141.4	-0.12
3rd Tendon Jacked Up	207.8	0.63
When loads added	0.64	200.4

ン No. 1, No. 2 および No. 3 のプレストレス導入順序による応力変化と、最終的に荷重作用による応力変化とを同図および Table 4 に示したが、テンドン全体の緊張が終了した時点での先行プレストレスの減少量は 5.4 t であり、従来の方法によれば 5.0 t であった。したがって約 7% の誤差が生じている。従来の方法では単純な本例の場合でも誤差がこの程度あり、テンドンの偏心距離が大きかったり曲げ変形の大きい場合にはさらにかんりの誤差になるものと思われる。

(6) アンカー部に作用する力

テンドンに付着がある場合にはアンカー部分に作用する力は、活荷重によって影響されない。したがって、アンカー部分に局部的に高応力が発生しているとしても疲労破壊の危険性はまず存在しない。しかし、付着が存在しない場合にはアンカー部分に作用する力は活荷重と

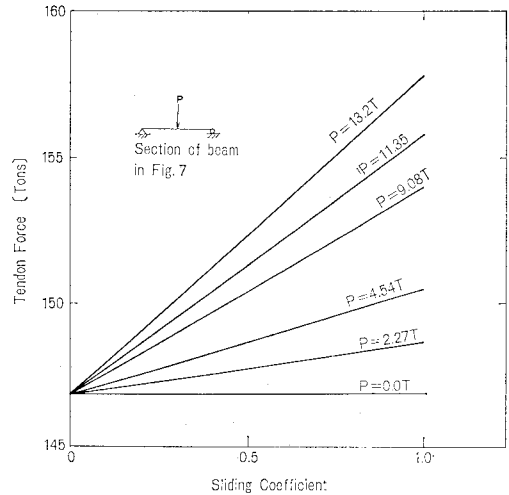


Fig. 13 The Relation between Anchorage Force and Sliding Coefficient.

もに変動することになる。大きな部材の場合に、アンカー部分に作用する力の変動はテンドンの有効プレストレスの 5~10% にもなりアンカー部分の疲労が問題となる。Fig. 5 に示した I 形はりについて、スパン中央に荷重が作用した場合のテンドン内のプレストレスの変動を、各種のすべり係数の場合について Fig. 13 に示した。プレストレスの変動はすべり係数に比例してほぼ直線的に大きくなるようであるが、すべり係数が 1 で完全アンボンドの場合、アンカー部に作用するプレストレスの変動幅は 12.1 t でテンドンの有効プレストレスの 5.2% に相当している。

(7) フレームにおける建設過程が応力分布に及ぼす影響

これまでの議論は、場所打ちのフレームにプレストレスをあとから導入する場合に適用できるが、プレキャストはりまたは柱をプレストレスによって、順次組み立ててゆく場合には次の修正を必要とする。たとえば Fig. 14 (a) のフレームを次のように組み立てる場合を考える。まず、はり地上でプレストレスを与えられ柱の上にクレーンで持ち上げられる。次に、柱とはりの接合が 2 本同時にプレストレスングによってなされるとする。このフレームは以下の 2 点で場所打ちのフレームと異なる。第 1 は、はりに導入されたプレストレスは柱に応力を発生させない。第 2 点ははりが柱に接合されるとき、柱とはりの接合面が一致していない場合には接合プレストレスの一部がこのギャップを埋めるために使用されることである。外力に対するフレームの応力を算定するためには接合プレストレスによる内部応力を正確に求めておく必要がある。前に述べたアンボンドの場合の剛

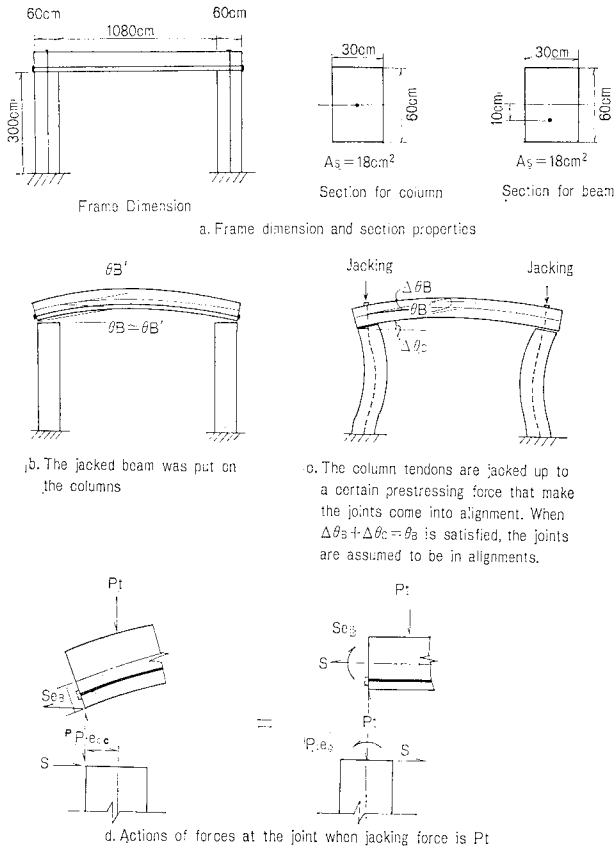


Fig. 14 Analysis of the Precast Frame.

性マトリックスを用いてこの場合の解析方法を示すと、

(1) 各部材単独の場合のプレストレスによる初期変形および初期応力を算出する（この例の場合には特に図に示してある θ_B に注目する）。

(2) 各組み立て段階における変位および応力を、導入プレストレスを節点力として加えつつ計算する。この例の場合には、Fig. 14 (d) に示すようにプレストレスに応じたモーメントとせん断力が、それぞれはりおよび柱の節点に与えられる。ただし、この場合のせん断力は未知である。この場合の変位・節点力の関係は、

$$[K_c]\{d_c\} = \{F_c\} \dots\dots\dots (20-1)$$

$$[K_b]\{d_b\} = \{F_b\} \dots\dots\dots (20-2)$$

ただし、接合点における柱とはりの水平方向変位が常に等しいとして式 (20-1), (20-2) を解く。

ここで、

- $[K_c]$: 柱のみの剛性マトリックス
- $[K_b]$: はりのみの剛性マトリックス
- $\{d_c\}$: 柱の節点変位ベクトル
- $\{d_b\}$: はりの節点変位ベクトル
- $\{F_c\}$: 柱の節点力ベクトル
- $\{F_b\}$: はりの節点力ベクトル

(3) (2) の計算により初期ひずみ θ_B がプレストレス導入によるひずみ $\Delta\theta_B + \Delta\theta_c$ に一致するときのプレストレスを求める。

(4) その後、各エレメントの変位は、全体座標系 $\{\bar{d}_c\}$ および $\{\bar{d}_b\}$ に変換されるが、その際同一節点の変位差（この場合には同一節点の柱とはりの変位差）をなくすために初期剛体変位 $\{d_{cI}\}$ あるいは $\{d_{bI}\}$ を与える。Fig. 14 の例では柱に水平方向の剛体変位を初期変位として与える。すなわち、

$$\{\bar{d}_c\} = T_c^T [\{d_c\} + \{d_{cI}\}] \dots\dots\dots (21-1)$$

$$\{\bar{d}_b\} = T_b^T [\{d_b\} + \{d_{bI}\}] \dots\dots\dots (21-2)$$

$$\{\bar{d}\} = \{\bar{d}_c\} + \{\bar{d}_b\}$$

ここで、

T_c : 柱の全体座標系への変換マトリックス

T_b : はりの全体座標系への変換マトリックス

ス

変位差を剛体変位として打ち消すことができない部分については後に応力の重ね合わせを行う。

(5) これから先フレームの接合点は剛と考えられ、残りのプレストレスに対して初期ひずみを計算しそれに対応する節点力 $\{F^*\}$ を求める。また、 $\{\bar{d}\}$ を初期変位とし対応する節点力 $[K_{con}] \cdot \{\bar{d}\}$ と $\{F_s\}$ を求める。この場合に注意すべきことは、初期ひずみはプレストレスング tendon の存在するエレメント内で任意の境界条件を与えて求めることができるが、初期ひずみに対応する等価外力もそれに応じたものでなければならないことである。

よって、

$$[K^*]\{\bar{d}_p\} = [K_{con}]\{\bar{d}\} + \{F^*\} + \{F_s\}$$

ただし、 $[K^*]$ は全体の剛性マトリックスであるが、プレストレス導入中の tendon の剛性は含まない。また、 $\{F_s\}$ についてもプレストレス導入中の tendon の剛性を含めてはならない。

(6) このようにして完成したフレームに外力 $\{F\}$ が加わる場合の変位 $\{d_f\}$ を求めるには、 $\{\bar{d}_p\}$ を初期変位として、

Table 5 Initial Stress of the Portal Frame Constructed by Skeletal Assemblage through Prestressing.

		Without consideration of change of tendon force		With consideration of change of tendon force	
		Bot fibre stresses (kg/cm ²)	Top fibre stresses (kg/cm ²)	Bot fibre stresses (kg/cm ²)	Top fibre stresses (kg/cm ²)
Column	Top	23.1	199.1	37.6	184.5
	Bot	154.1	68.1	145.7	75.8
Beam	End	121.8	96.0	134.4	80.6
	Mid-Section	121.8	96.0	134.4	80.6

$$[K]\{d_f\}=[K_{con}]\{\bar{d}_p\}+\{F_s\}+\{F\}$$

ここで、 $[K]$ および $\{F_s\}$ はすべてのテンドンの剛性を考慮に入れる。

Fig. 14 の例を、上記の手法によって解析した結果、柱とはりの接合プレストレスが 5.3 t のとき柱はりの接合面が一致し、すべてのプレストレスの導入が完了したときはりのテンドン内のプレストレスは 2.3% 変化し 20.5 t となった。また、**Table 5** にプレストレス導入終了時の断面内の応力分布を示したが、柱にはかなりの曲げモーメントが生じ逆にはりのプレストレスの効果がかなり相殺されていることが示されている。

5. 結 論

アンボンド部材が種々の理由から使用される状況にあるが、従来この種の構造物に対する厳密な解析手法は提案されていなかった。それははり柱等の単純一軸部材としての挙動のなかにタイドアーチ的挙動が混在するからで、本研究ではすべり係数を導入して最小ポテンシャルエネルギー則に基づくこの種構造物の一解析法を提案した。理論についての考察および数値実験の結果から次の結論が得られた。

(1) プレストレッシングによる接合により構造物を組み立てる場合には、多くの部材がアンボンドの状態であったり接合面相互に不整が存在したりしてこれらの影響を推定するのがはなはだ難しいが、本法を用いることによりかなりの程度その影響を明らかにすることができる。また、多数のテンドンの緊張順序の影響等も正確に解析することが可能である。

(2) アンボンド部材の断面強度は、ボンド部材と異

なって断面のみのパラメーターによって決定されるのではなく部材全体のパラメーター、たとえば部材の長さ、鋼材の偏心距離の積分値等によっても影響されるのである。断面の小さな P C 部材については、P C 鋼材の影響を無視しても解析上の誤差は比較的少ないが、鋼材の偏心距離の大きな部材や多数の鋼材を用いた部材では、鋼材の伸長による付加プレストレスが大きいく、たとえばひびわれ荷重はこの影響を考慮に入れると 5% から 15% も増大する場合がある。

参 考 文 献

- 1) Parma, A.L. and G.H. Paris : Analysis of Continuous Prestressed Concrete Structures, Pro. of the First U.S. Conference of Prestressed Concrete, M.I.T., Aug., 1951.
- 2) Fiesenheiser, E.I. : Rapid Design of Continuous Prestressed Members, Pro. of A.C.I., Vol. 50, April, 1954.
- 3) Bailey, D.M. and P.M. Ferguson : Fixed-End Moment Equations for Continuous Prestressed Concrete Beams, Proc. of A.C.I., Vol. 11, No. 1, Feb., 1966.
- 4) Moorman, R.B.B. : Continuous Prestressing, ASCE Transactions, Vol. 121, 1956.
- 5) Lin, T.Y. : Load Balancing Method for Design and Analysis of Prestressed Concrete Structures, Proc. of A.C.I., Vol. 60, No. 6, June, 1963.
- 6) Moris, P.B. and H.E. Lewis : Prestressed Continuous Beams and Frames, A.S.C.E., ST 5, Vol. 82, Sept., 1956.
- 7) Foderberg, L.D. and D.E. Branson : Secondary Moments in Single-Span Prestressed Concrete Beams and Frames Determined by Column Analogy, J. of P.C.I., Vol. 13, No. 1, Feb., 1968.
- 8) 六車 照・渡辺史夫・内藤行孝・新谷晃崇 : アンボンド P C 部材の力学的性質に関する基礎的研究, プレストレストコンクリート技術協会, 第 17 回講演概要, 1977 年 11 月.

(1979.10.12・受付)