

2次元貯水池密度流の潜り込み水深と界面形状

STUDY ON THE PLUNGE DEPTH AND INTERFACE FORM OF
DENSITY CURRENTS IN A TWO-DIMENSIONAL RESERVOIR

福岡 捷 二*・福嶋 祐 介**・中村 健 一***

By Shoji FUKUOKA, Yusuke FUKUSHIMA and Kenichi NAKAMURA

1. 序 論

洪水時に高濁度の河川水が貯水池に流入すると、貯水池の表層水より密度の大きな濁水は、やがてある地点で水面下に潜り込み、流路床に沿って進入する下層密度流となる^{1),2)}。このように貯水池の上流端において、流入濁水が表層から下層に潜り込む地点を潜り込み点(plunge point)とよぶ。流入濁水による貯水池内の密度流現象は流入濁水と貯水池水の相対的な密度分布によって決まる^{3)~5)}。したがって、潜り込み点付近の流入濁水の挙動を明らかにすることは、それ以降の流入濁水の運動を知るうえで基本的に重要である。

潜り込み点以降の密度流の問題は、流入濁水と貯水池水の力学的平衡によって決まる界面形状をいかに求めるかに帰着される。漸変する2層流の界面形状については塩水くさびを中心に数多くの成果があげられている⁶⁾。

しかし、潜り込み点付近の流れは急変流となり、流線の曲がり本質的に重要な役割を果たす。また、潜り込み点の近くでは下層水深に比べ上層水深が小さいため、かなりの界面混合が生じ、界面形状に重要な影響を与える。したがって、理論解析にあたってはこの両者を考慮した取り扱いが必要となる。密度差に起因する急変流の界面形状に関してはKármán⁷⁾、Benjamin⁸⁾の優れた研究がある。Kármán⁷⁾は非粘性の条件を用いて密度流先端の傾斜角が $\pi/3$ であることを理論的に示した。Benjamin⁸⁾は、同様な条件のもとで先端部前面でKármánの解を満たし、無限遠で一様流となるcavity flowの界面形状を理論的に求めている。しかし、非粘性理論に基づく解析は潜り込み直後の界面形状を説明するのに適し

ているが、それ以降の界面形状には粘性の役割が重要となってくるために不十分となる。特に勾配を有する流れでは、加速流となり実際現象を説明できなくなる。

一方、潜り込み水深についても多くの研究がある。板倉・岸¹⁰⁾は、潜り込み点付近の濁水の運動に注目して実験を行い、潜り込み水深が単位幅流量の2/3乗に比例することを示した。さらに、混合を無視した漸変2層流解析により潜り込み後の界面形状を求め、実測値と比較している¹¹⁾。岩崎ら¹²⁾は四十四田ダム貯水池の現地実測によって、潜り込み水深と単位幅流量の関係を調べ板倉・岸の実験の傾向と一致することを示した。江頭・青田¹³⁾は潜り込み点付近の濁水の運動に対する運動量式と等流水深の予測式とから、潜り込み水深を理論的に求めた。Hebbertら¹⁴⁾はWellington貯水池の断面形状を三角形で近似した潜り込み水深の算定式を提案し、実測値と比較している。

このように潜り込み点付近の流入濁水の挙動については多くの検討がなされ、潜り込み現象の理解が増してきた。しかし、潜り込み点付近の流れは曲率をもった急変流で、圧力分布はもはや静水圧分布とはならず、潜り込み水深、界面形状を知るためには局所的な圧力分布が必要となる。潜り込み点が静止するためには、流入水と平均的に静止している表層水の間に圧力のつり合い関係が満たされる必要がある。また、流入濁水による周囲水の混合・連行は、下層流の界面形状を支配する重要な要因である。しかし、従来の理論ではこれらは考慮されず、したがって解析は十分とはいえない。著者ら^{9)~11)}はこれまで、潜り込み点通過後の流入濁水の運動を実験的・理論的に明らかにし、成層化した2次元貯水池内密度流の予測モデルを提案してきた。しかし、潜り込み点付近の濁水の流動の問題は未解決のまま残されており、潜り込み点通過後の水理量を与える必要があった。

以上の問題を解明するため、本研究ではまず室内実験を行い潜り込み水深と潜り込み後の界面形状を測定し、

* 正会員 Ph.D., 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 東京工業大学 工学部土木工学科助手

*** 学生会員 東京工業大学大学院

これらと流入濁水量，流入水と貯水池水の密度差，流路床勾配等との関係について考察した。次に，潜り込み点近傍が急変流となることを考慮して，潜り込み水深と界面形状の理論式を導いた。これらを実測値と比較することにより理論の妥当性を検討している。

潜り込み点付近の流れは密度差に起因する急変流であり，管内を空洞が移動するときに生ずる流れ (cavity flow) と力学的に類似の現象である。したがって，cavity flow について得られた Benjamin⁸⁾ の理論は潜り込み点付近の流れを考察するために有効である。最初に，本文中で用いられる Benjamin⁸⁾ の理論を簡単に紹介する。

2. Benjamin の理論

図-1 は，平行平板間の cavity flow を cavity の移動速度 c_1 で移動する座標系からみたものを示す。液体は密度 ρ とし，cavity は真空か重量が無視できる気体で満たされている。粘性および表面張力は無視する。無限遠上流は水深 d ，流速 c_1 の一様流であり，無限遠下流は自由表面のもとに水深 h ，流速 c_2 の一様流となっている。力学的エネルギー保存の原理を用いて解析を行う。

点 O はよどみ点であり，自由表面に沿って圧力は零である。したがって，この表面に沿って Bernoulli の定理を適用すると，

$$c_2^2 = 2g(d-h) \dots\dots\dots(1)$$

を得る。同様にして，無限遠上流の上側の壁面での圧力 p_0 は，

$$p_0 = -\frac{1}{2}\rho c_1^2 \dots\dots\dots(2)$$

となる。よどみ点をはさむ上・下流の無限遠の断面では圧力はそれぞれ静水圧分布をなす。このとき，両断面間の運動量保存の関係は，

$$\frac{1}{2}\rho(c_1^2 d + gd^2) = \rho\left(c_2^2 h + \frac{1}{2}gh^2\right) \dots\dots\dots(3)$$

となる。連続の関係は，

$$c_1 d = c_2 h \dots\dots\dots(4)$$

である。式 (1)，(3)，(4) を解くと，

$$h = \frac{1}{2}d \dots\dots\dots(5)$$

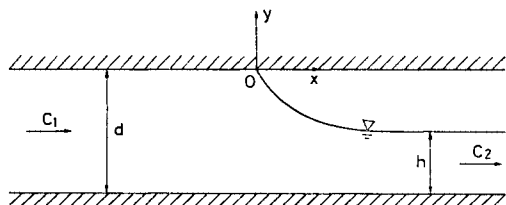


図-1 空洞をすぎる定常流れ (Benjamin⁸⁾)

$$F_1 = c_1 / (gd)^{1/2} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(6)$$

$$F_2 = c_2 / (gh)^{1/2} = \sqrt{2} \dots\dots\dots(7)$$

を得る。式 (5) が示すように十分下流では水深は全水深の 1/2 になる。

Benjamin はさらにホドグラフ法により界面形状を求めている。ここではその結果のみを記す。

$$x = \frac{1}{4\pi(a^2 - 2ab + 4b^2)} \left[3a(2-a) \cdot \ln \frac{a^2 + 2abR + 4b^2R^2}{a^2} + 3(2b^2 - ab + a) \cdot \ln(1-R+R^2) + 2(2a^2 - ab + 2b^2 - 3a) \cdot \ln(1-R^3) + 2\sqrt{3}(2b^2 + ab + a - 4b) \cdot \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-R+R^2}} \right) - \frac{\pi}{3} \right\} \right] \dots\dots\dots(8)$$

$$y = \frac{1}{4\pi(a^2 - 2ab + 4b^2)} \left[6a(2-a) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}bR}{a+bR} \right) + 6(2b^2 - ab + a) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}R}{R-2} \right) + \sqrt{3}(2b^2 + ab + a - 4b) \ln \left\{ \frac{(1+R)^2}{1-R+R^2} \right\} \right] \dots\dots\dots(9)$$

ここで， $a=1.49$ ， $b=0.85$ ， R は 0 から ∞ まで変化するパラメーターである。

以上の Benjamin の解析は水平床の cavity flow について次の項目の算定を可能にした。

- ① cavity の上下流の対応水深 式 (5)
- ② cavity 先端部の自由表面形状 式 (8)，(9)

Benjamin は g を有効重力 $\hat{g} \left(= \frac{d\rho}{\rho} g \right)$ で置き換えることにより水平床上のエネルギーロスが無視できる密度流に対して適用できると述べている⁸⁾。しかし，この理論は非粘性水平床の理論のために，流路床勾配が存在する場合には流れは平衡状態に達し得ない。また，本研究が対象とする，潜り込み水深および粘性が重要な領域の界面形状を求める問題には直接的に適用できない。

3. 実験

(1) 実験装置および実験方法

実験装置を図-2 に示す。水路は長さ 6.9 m，高さ 0.9 m，幅 0.2 m の片面ガラス張り開水路である。その中に長さ 1.5 m の水平部と底勾配 i_0 ，長さ 5.0 m の傾斜部からなる底板を取りつけ，この区間を測定部とした。実験は流速に比べ濁質の沈降速度が無視できる範囲を取り扱うこととし，濁水として塩水を用いた。一様密度 ρ_2 に調整した塩水を，バルブ A を通して密度 ρ_1 の淡水で満たした水路に静かに流入させる。塩水は整流部を通り傾斜部に入ると，ある地点で潜り込み斜面に沿っ

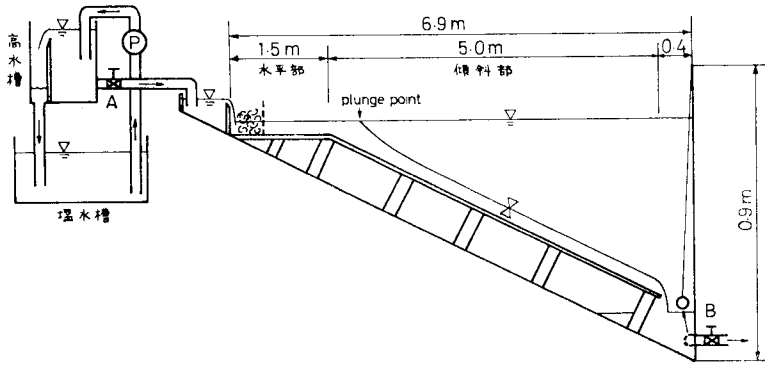


図-2 実験装置

表-1 実験条件

Run No.	流路床勾配 i_0	単位幅流量 q_0 (cm ² /s)	周囲水の密度 ρ_0 (g/cm ³)	密度差 $\Delta\rho_0$ (g/cm ³)	周囲水の温度 T (°C)	濁水の温度 T_d (°C)	流入水深 H_0 (cm)
1	0.1	5.0	0.9998	0.0021	8.3	8.6	1.2
2	0.1	15.0	0.9998	0.0021	8.5	8.5	1.6
3	0.1	27.0	0.9998	0.0021	8.2	8.3	2.0
4	0.1	15.0	0.9998	0.0030	8.2	8.3	1.8
5	0.1	27.5	0.9998	0.0030	8.2	8.3	1.8
6	0.1	25.0	0.9998	0.0049	8.1	8.1	2.6
7	0.1	27.5	0.9998	0.0097	8.1	8.2	1.7
8	0.0167	5.0	0.9997	0.0022	10.0	9.5	2.0
9	0.0167	15.0	0.9997	0.0020	10.0	9.9	3.9
10	0.0167	27.8	0.9998	0.0021	8.9	8.9	6.0
11	0.0167	15.0	0.9997	0.0047	9.2	9.2	3.9
12	0.0167	27.8	0.9997	0.0051	9.5	9.5	5.0
13	0.0167	15.1	0.9997	0.0726	9.4	8.8	0.7
14	0.0167	28.9	0.9997	0.0746	9.6	8.1	1.8

て流下する。塩水の流入による水位変化を最小限に留めるため、流入量と等しい量をバルブBより排水する。実験は単位幅当りの流量 q_0 、密度差 $\Delta\rho_0 (= \rho_2 - \rho_1)$ 、流路床勾配 i_0 を変化させて行った。実験条件は表-1 に示す。流速分布、密度分布、界面形状の測定は塩水が水面下に潜り、十分定常になった後行われた。測定方法を以下にまとめて示す。

i) 潜り込み水深と界面形状

塩水をフルオレイセンナトリウムで着色し界面形状を 35 mm カメラで撮影する。潜り込み点付近の流れは急縮流で界面に強いシアアが働くため染料が拡散する。このため、染料の濃度が急変する位置を目視によって定め、これを界面の位置とする。潜り込み水深、界面形状は何枚かのフィルムを読みこれらを平均した。

ii) 流速分布

勾配変化点より 2~3m 下流位

置に水素気泡発生装置を設置して 1~2 秒間隔で写真撮影し流速分布を測定した。この位置では流速の時間的変動はほとんどない。

iii) 密度分布

水深方向に 1 cm 間隔で 15 点同時に採水できる装置を流速測定位置より約 50 cm 下流に固定する。採水管は内径 1 mm、外径 2 mm の黄銅管である。流速分布測定とほぼ同時に約 200 cc 採水し、採水した試料の NaCl 重量濃度と水

温より密度を求めた。

(2) 実験結果および考察

a) 潜り込み水深と界面形状

写真-1 は急勾配流路床 ($i_0=1/10$) に対し行われた潜り込み点付近の流況の代表例 (Run 3) を示す。流入水は矢印で示した位置に達すると急激に潜り込み下層流となる。潜り込み点近傍の界面には渦が間欠的に発生し、界面での周囲水の混合・連行は比較的多い。写真-2 は緩勾配で行われた実験の代表例 (Run 11) を示す。潜り込み点以降の界面形状は Run 3 に比して非常に滑らかで周囲水の混入は少なく、濁水深の変化も緩やかである。

表-2 は、潜り込み水深 H_p 、等流水深 H_0 、限界水深 $H_c (= \sqrt[3]{q_0^2/\epsilon_0 g})$ 、等流部の内部フルード数 $F_{i0} (= q_0/\sqrt{\epsilon_0 g H_0^3})$ 、レイノルズ数 $Re (= q_0/\nu)$ 、等流部の単位幅流量 q_2 をまとめて示す。ただし、 $\epsilon_0 = \Delta\rho_0/\rho_2$ である。 q_2 は中心線上で測定した流速分布を流速が零となる高さまで積分して得たものである。

後述する理論によると潜り込み水深 H_p は限界水深 H_c にほぼ比例する。そこで、潜り込み水深を限界水深

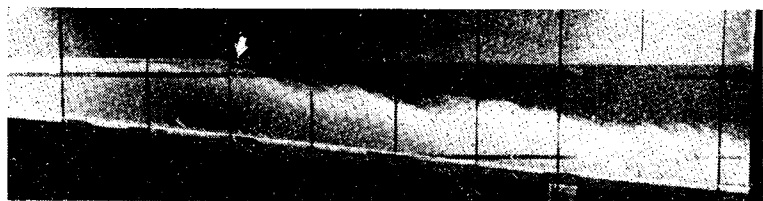


写真-1 潜り込み点付近の流況 (Run 3, $i_0=1/10$)

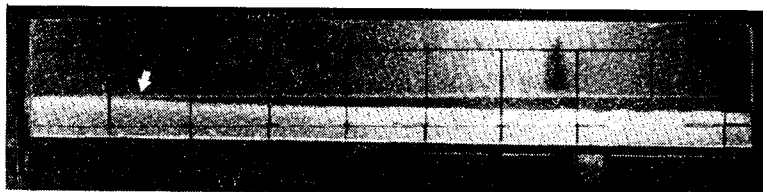


写真-2 潜り込み点付近の流況 (Run 11, $i_0=1/60$)

に対してプロットしたものを図-3に示す。図中には、石橋ら⁹⁾、岩崎ら¹²⁾が実際の貯水池で測定した値も示す。潜り込み水深 H_p は流路床勾配にほとんど関係なく、広い範囲にわたって $H_p \propto (q_0^2/\varepsilon_0 g)^{1/3}$ の関係が成立する。

図-4 は潜り込み後の界面形状を H_p で無次元化し

表-2 実験結果 (1)

Run No.	流入量 q_0 (cm ² /s)	潜り込み後の流量 q_2 (cm ² /s)	潜り込み点水深 H_p (cm)	等流部水深 H_0 (cm)	限界水深 H_c (cm)	内部フルード数 F_{i0}	レイノルズ数 $Re = \frac{q_0}{\nu}$ ($\times 10^9$)
1	5.0	7.5	4.1	1.7	2.30	1.57	0.365
2	15.0	17.6	6.8	3.6	4.78	1.53	1.09
3	27.0	33.9	9.1	5.1	7.08	1.63	1.97
4	15.0	18.5	6.3	3.0	4.24	1.68	1.09
5	27.5	32.1	8.6	4.6	6.36	1.63	2.01
6	25.0	35.9	6.2	3.3	5.07	1.90	1.82
7	27.5	35.4	6.3	2.8	4.30	1.90	2.01
8	5.0	9.3	4.3	2.9	2.26	0.690	0.377
9	15.0	15.3	6.5	4.9	4.86	0.988	1.14
10	27.8	28.7	10.7	7.3	7.21	0.980	2.06
11	15.0	16.8	5.2	3.8	3.66	0.944	1.12
12	27.8	30.5	7.6	5.5	5.37	0.964	2.09
13	15.1	27.5	2.3	1.6	1.47	0.884	1.10
14	28.9	38.0	3.2	2.3	2.25	0.969	2.11

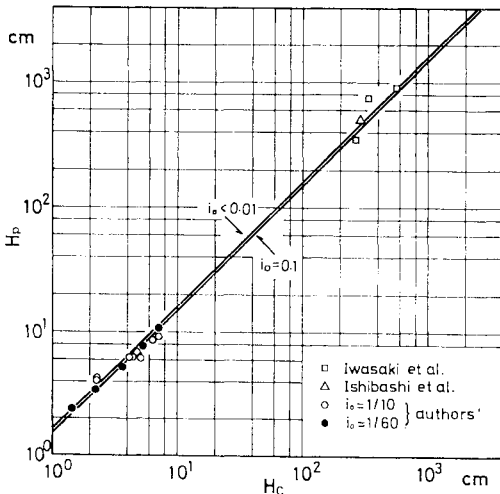


図-3 潜り込み水深

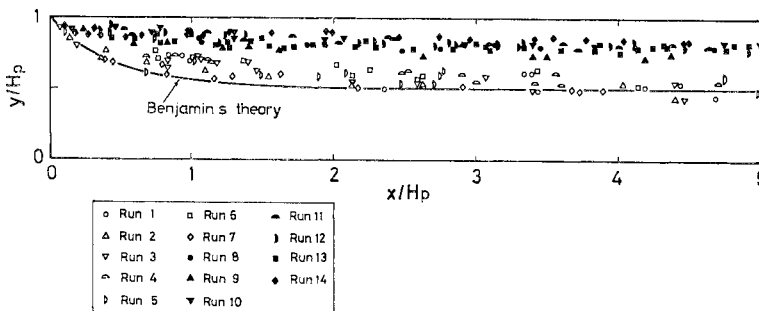


図-4 無次元化された界面形状

たものである。白抜き記号は $i_0=1/10$ 、黒く塗りつぶした記号は $i_0=1/60$ の条件に対して得られた結果を示す。実線は Benjamin⁹⁾ の水平床に対する理論値 (式 (8), (9)) である。これによると、界面形状は同じ勾配ならば他の実験条件によらず実験精度の範囲内ではほぼ相似である。 $i_0=1/10$ ではすべての条件に対して等流部は射流であり、潜り込み点から等流部に变化する過程で流れは常流から射流に遷移している。このため、界面形状は下流水深の影響を受けず、流下距離が小さい範囲では Benjamin⁹⁾ の理論で十分近似できる。一方、 $i_0=1/60$ では流れは全領域で常流であり、下流水深の影響を受ける。この結果、界面形状は潜り込み点近傍 ($x/H_p < 0.2$) を除いて非粘性の理論から求めたものと著しく異なっている。

b) 潜り込み後の混合量

潜り込み点通過後の混合・連行の程度を調べるため、流速分布測定位置 (等流部) での単位幅流量 q_2 と流入量 q_0 を用い、上層から下層への混入量 Δq を求めた。これをもとに、潜り込み点から流速測定断面までの区間 (この区間の距離を L とする) の平均的な連行係数 E を算出した。連行係数 E は次のように定義される。

$$E = \frac{V_e}{\bar{u}_2} = \frac{\Delta q}{L} \frac{\bar{H}_2}{q_2} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $V_e (= \Delta q/L)$ は区間 L での上層からの平均連行速度、 \bar{u}_2 は区間 L の下層での平均流速、 \bar{H}_2 は区間 L の平均濁水深である。潜り込み点から流速測定断面までを代表する下層厚平均リチャードソン数 (overall Richardson number) R_i を次のように定める。

$$R_i = \frac{\bar{\varepsilon} g \bar{H}_2}{\bar{u}_2^2} = \frac{\bar{\varepsilon} g \bar{H}_2^3}{q_2^2} \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}$ は貯水池水と濁水の測定区間の平均密度差 (流入前の密度 ρ と等流部で測定した密度から算定した) である。表-3 に実験結果をまとめて示す。Run 1 および Run 8 は流量が小さく流速測定の精度が悪いため、表から除外されている。

連行係数 E は、流れの状態、タイプによって変化する

可能性がある。そこで、従来、多くの研究者によって得られている実測結果のうち、本研究と同じ下層流の条件で得られた値を下層厚平均リチャードソン数 R_i に対して整理したのが図-5である。本実験の結果は流速測定に起因するばらつき範囲を細線で示し、平均値を記号で示している。Ellison・Turner¹⁵⁾、Lofquist¹⁶⁾ の実験は、本実験に比べかなり大きな

表-3 実験結果 (2)

Run No.	混入量 dq (cm ² /s)	区間長 L (cm)	平均水深 \bar{H}_0 (cm)	平均密度差 $\bar{\rho}$ ($\times 10^{-3}$)	連行係数 E ($\times 10^{-2}$)	層平均リチャードソン数 R_i^A
2	2.6	48	4.0	1.9	1.3	0.43
3	6.9	70	5.6	1.9	1.8	0.36
4	3.5	68	3.3	2.6	1.0	0.33
5	4.6	94	5.1	2.6	0.83	0.37
6	10.9	126	3.6	4.4	1.0	0.22
7	7.9	54	3.1	8.8	1.4	0.26
9	0.3	232	5.4	2.0	0.046	1.4
10	0.9	147	8.1	2.0	0.18	1.3
11	1.8	250	4.2	4.6	0.19	1.3
12	2.7	182	6.1	5.0	0.31	1.3
13	12.4	217	1.8	67.0	0.48	0.85
14	9.1	251	2.6	67.0	0.28	1.0

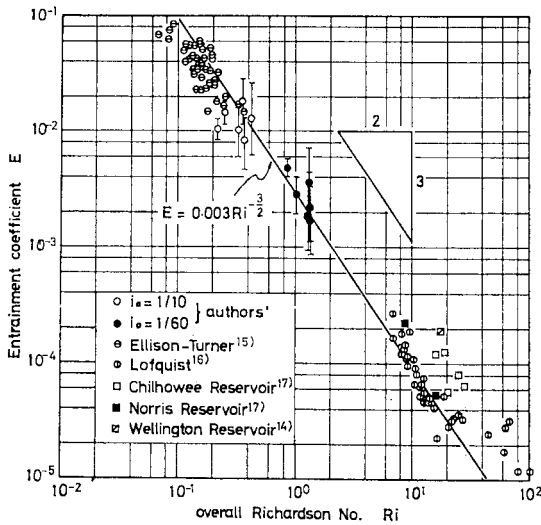


図-5 連行係数

上層水深をもつ下層流で行われている。Elder・Wunderlich¹⁷⁾ による Chilhowee 貯水池, Norris 貯水池, Hebbert ら¹⁴⁾による Wellington 貯水池での現地観測は、いずれも潜り込み点以降の下層流に対して行っている。

図-5 をみると著者ら, Ellison・Turner, Lofquist の下層流実験はそれぞれ異なった範囲の R_i 数, および上層水深で行われているにもかかわらず, 連行係数 E は平均リチャードソン数 R_i に対して同一の傾向を示す。すなわち, E は近似的に R_i の $-3/2$ 乗に比例し,

$$E \approx 0.003 R_i^{-3/2} \dots \dots \dots (12)$$

と表される。実際の貯水池での連行係数は式 (12) よりやや大きな値をとる。これは Elder・Wunderlich¹⁷⁾ が指摘しているように風の影響のほか, 2次元の室内実験に対し現実の貯水池は3次元的事であること, 貯水池への流入条件の相違, 現象の非定常性等の理由によると思われる。

4. 潜り込み水深

密度差のために沈み込む流れは急縮流であり, このような流れを引き起こす主因は圧力差である。したがって, 流れは非粘性流とみなすことができる。流線の曲がりを考慮した Benjamin⁸⁾ の解は 3. に示したように潜り込み点付近に限れば適用可能である。ここでは, Benjamin の理論から流速分布と圧力分布を求め, これらを用いた運動量保存式より潜り込み水深を導く。

図-6 は式 (8), (9) で与えられる界面 (自由表面) 形状を境界条件としてリラクゼーション法により計算して得た流線を示す。流線はよどみ点付近で上向きの曲率をもち, 下流 ($x > 0.2$) では下向きの曲率となる。このように, よどみ点付近では流線が大きな曲率をもつため, 圧力分布は静水圧分布と非常に異なる。図-7 は静水圧からの差圧 p' を p_c で無次元化した

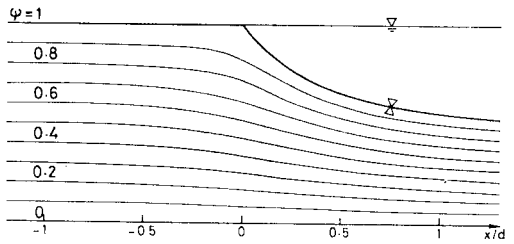


図-6 リラクゼーション法による流線

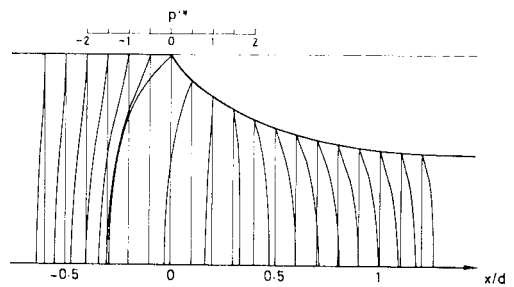


図-7 静水圧からの差圧分布

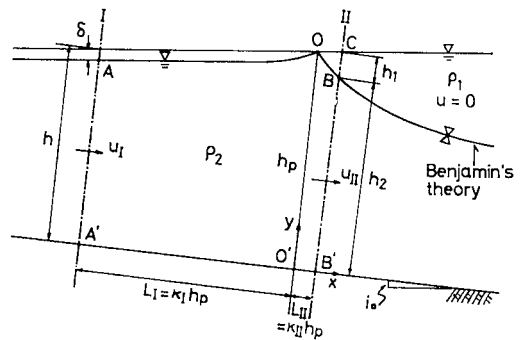


図-8 潜り込み点付近の流れ

$$p'^* \left(= p' / p_c = p' / \frac{1}{2} \rho c_1^2 \right)$$

の分布を示す。\$p'^*\$ はよどみ点近傍で大きく、この付近では流線の曲率の影響を無視できないことがわかる。

図-8 は潜り込み点付近の流れを模式的に示す。流れは2次元・定常である。密度 \$\rho_2\$ の流入水がこれよりも小さな密度をもつ静水中に進入し、O点で潜り始めると考える。座標原点 O' は潜り込み点Oを流路床上に投影した点とし、検査面を AA'B'C にとる。検査面 I, II は潜り込み点をはさむ上・下流位置で流路床に垂直にとる。検査面 I では流速は一樣であるが、検査面 II では流線の曲がりにより流速は一樣でなく圧力は著しく静水圧分布からはずれる。流路床に垂直にとった水深は小文字、鉛直方向にとった水深は大文字で表す。検査面内の周囲水の混合は無視し、Oはよどみ点であるとする。

潜り込み点Oの下流の水面は静止、これより上流では流速をもつことから、潜り込み点Oが静止するためには上流側の水面は速度水頭分だけ下がる必要がある。流線AO間にBernoulliの式を適用すると水面降下量 \$\delta\$ は、

$$\delta = u_1^2 / 2g \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここで、\$u_1\$ は検査面 I の流速である。式 (13) は式 (2) に対応する。

次に検査面 I と検査面 II の間で運動量の保存式をたてる。流下距離が十分短いと考え、底面と界面に働くせん断力を無視する。検査面 I の圧力、および検査面 II の上層の圧力は静水圧分布をなす。検査面 II の下層流は急変流であるため、運動量と圧力分布に補正が必要である。このとき、流下方向の運動量保存式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho_2 \beta \bar{u}_\Pi^2 h_2 - \rho_2 u_1^2 \left(h - \frac{\delta}{\cos \theta} \right) &= \frac{1}{2} \rho_2 g \left(h - \frac{\delta}{\cos \theta} \right)^2 \cos \theta \\ &- \frac{1}{2} \rho_1 g (h_1 + h_2)^2 \cos \theta - \lambda \frac{1}{2} \Delta \rho g h_2^2 \cos \theta \\ &+ \frac{1}{2} \rho_2 g (h + h_p) L_I \sin \theta + \frac{1}{2} \rho_1 g (h_p + h_1 + h_2) \\ &\times L_{II} \sin \theta + K \frac{1}{2} \Delta \rho g (h_p + h_2) L_{II} \sin \theta \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、\$h_p\$: 潜り込み水深、\$h\$: 検査面 I の水深 (= \$h_p - L_I \tan \theta\$), \$h_1, h_2\$: 検査面 II の上層と下層の水深 (\$h_1 + h_2 = h_p + L_{II} \tan \theta\$), \$L_I, L_{II}\$: 検査面 I と検査面 II の位置 (\$L_I = \kappa_1 h_p, L_{II} = \kappa_{II} h_p\$), \$\kappa_1, \kappa_{II}\$: 定数、\$K\$: 界面 OB を直線で近似したときの面積 OO'B'B に対する補正係数である。検査面 II での運動量補正係数 \$\beta\$, 圧力分布補正係数 \$\lambda\$ は次のように定義される。

$$\beta = \frac{\int_0^{h_2} \rho_2 u_\Pi^2 dy}{\rho_2 \bar{u}_\Pi^2 h_2} \dots\dots\dots (15)$$

$$\lambda = 1 + \frac{\int_0^{h_2} p' dy}{\frac{1}{2} \Delta \rho g h_2^2} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、\$u_\Pi\$ は検査面 II の流速、\$\bar{u}_\Pi\$ はその平均値、\$p'\$ は静水圧からの差圧である。

連続の式は次のようになる。

$$q_0 = u_1 \left(h - \frac{\delta}{\cos \theta} \right) = \bar{u}_\Pi h_2 = \bar{u}_p h_p \dots\dots\dots (17)$$

ここで、\$q_0\$: 単位幅流量、\$\bar{u}_p\$: 潜り込み点位置の断面平均流速である。

式 (14) に式 (13), (17) を代入して \$\delta\$ の高次項を省略する (\$\because \delta/h \ll 1\$) と、次式を得る。

$$\begin{aligned} \rho_2 q_0^2 \left\{ \frac{\beta}{h_2} - \frac{1}{2h} \right\} &= \frac{1}{2} \Delta \rho g \cos \theta (h_p^2 - \lambda h_2^2) \\ &+ K \frac{1}{2} \Delta \rho g (h_p + h_2) L_{II} \sin \theta \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

代表長を \$h_p\$, 代表流速を \$\bar{u}_p\$ として諸量を無次元化し、無次元量に * を付す。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{h_p}, y^* = \frac{y}{h_p}, h_2^* = \frac{h_2}{h_p}, u_\Pi^* = \frac{u_\Pi}{\bar{u}_p} \\ p'^* &= \frac{p'}{\frac{1}{2} \rho_2 \bar{u}_p^2}, F_p = \sqrt{\frac{q_0^2}{\varepsilon g h_p^3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、\$F_p\$ は潜り込み点の内部フルード数である。\$\beta, \lambda\$ は次のように表される。

$$\beta = \beta' h_2^*, \beta' = \int_0^{h_2^*} u_\Pi^{*2} dy^* \dots\dots\dots (20)$$

$$\lambda = 1 + \lambda' F_p^2 h_2^{*2}, \lambda' = \int_0^{h_2^*} p'^* dy^* \dots\dots\dots (21)$$

式 (20), (21) を式 (18) に代入し、\$F_p\$ について整理すると、

$$F_p^2 = \frac{(1 - h_2^{*2}) \cos \theta + K(1 + h_2^*) \kappa_{II} \sin \theta}{2 \beta' + \lambda' \cos \theta - 1 / (1 - \kappa_I \tan \theta)} \dots\dots\dots (22)$$

を得る。式 (22) で \$F_p\$ が求まれば、潜り込み水深 \$H_p\$ は次式により計算できる。

$$\left. \begin{aligned} H_p &= \frac{h_p}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt[3]{\frac{1}{F_p^2} \frac{q_0^2}{\varepsilon g}} \\ \text{または} \\ \frac{H_p}{H_c} &= \frac{F_p^{-2/3}}{\cos \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式 (22) 中の補正係数は次のように定めた。潜り込み点付近の流れは Benjamin⁸⁾ の理論で十分近似できる。そこで、\$h_2^*\$ は Benjamin の界面形状の理論式 (8), (9) により求め、\$\beta', \lambda'\$ は、先に述べたリラクゼーション法の解を用いて式 (20), (21) から計算した。この結果をまとめて表-4 に示す。式 (22) の式形をみると、\$F_p\$ は \$\kappa_{II}\$ の値によって変化する可能性がある。\$\kappa_I = 1, K\$

表-4 補正係数の値

κ_{II}	h_2^*	β'	λ'
0.1	0.882	1.142	-0.396
0.2	0.805	1.232	-0.056
0.3	0.748	1.345	0.090
0.4	0.697	1.432	0.192
0.5	0.657	1.519	0.231
0.6	0.628	1.595	0.233
0.7	0.603	1.668	0.209
0.8	0.585	1.723	0.185
0.9	0.568	1.765	0.181
1.0	0.553	1.811	0.154

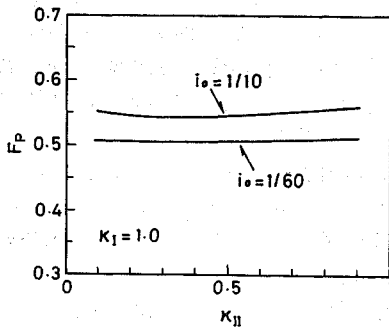


図-9 F_p と検査面 II の位置

=1 とし、表-4 の係数値を用い F_p の κ_{II} への依存性を 2 種類の流路床勾配 $i_0=1/10, 1/60$ で検討した結果を 図-9 に示す。 F_p は流路床勾配が異なると若干変化するが、同一の流路床勾配では κ_{II} に依存せず、ほぼ一定値となる。このことは、検査面 II の位置は潜り込み点の近傍ならばどこに選んでもよいことを示す。以下の計算では界面形状の実測結果を参考にして $\kappa_I=1, \kappa_{II}=0.1, K=1$ の値を用いた。

流路床勾配が潜り込み水深に与える影響を調べるため、流路床勾配 i_0 を変化させ、内部フルード数 F_p と潜り込み水深と限界水深の比 H_p/H_c を計算した。これを 図-10 に示す。 $F_p, H_p/H_c$ は流路床勾配によってほとんど変化せず $i_0 < 1/100$ の範囲では水平床の極限 ($i_0 \rightarrow 0$) の値で近似できる。水平床の極限での $F_p, H_p/H_c$ の値は式 (22), (23) から、

$$F_p = 1/2 \dots\dots\dots (24)$$

$$H_p/H_c = \sqrt[3]{4} \dots\dots\dots (25)$$

となる。

先に述べた 図-3 には式 (23) による潜り込み水深の理論値が実線で示されている。理論値は広い範囲の実測値をよく説明することがわかる。このことは、潜り込み水深の算定には摩擦の影響が無視でき、非粘性理論で十分近似できることを意味する。すなわち、潜り込み水深は主として局所的な圧力のつり合い条件によって決まり、流路床勾配、およびレイノルズ数にほぼ無関係となる。

潜り込み点での内部フルード数は 1 より小さく、下層流は常流である。一方、潜り込み点より十分下流の下層流は摩擦力と有効重力のつり合いによって、常流が射流かが決まる。したがって、潜り込み点以降の不等流部では常流から射流に遷移する場合と全域で常流の場合があることになる。

5. 界面形状

潜り込み点以降の界面形状について、菅原・岸・板倉¹¹⁾は、潜り込み点を限界水深とし、流れを漸変 2 層流とする計算法を提案している。しかし、3., 4. で示したように、潜り込み点以降の流れは常流から射流に遷移する場合と全域で常流の場合があり、特に潜り込み点近傍では急変流となる。さらに、図-10 に示すように潜り込み点での平均内部フルード数は $F_p \approx 0.5$ であり、潜り込み点は限界水深とはならない。また、潜り込み点の近くでは上層水深が比較的小さく、混合に伴う上層流れ等の影響が無視できない。もちろん、ある限定された条件のもとでは岸らの計算法は工学的に役立つが物理的には必ずしも十分とはいえず、より合理的な界面形状の評価法が必要である。本章では、(1) 前章で導かれた潜り込み水深の理論式を境界条件とし、(2) 潜り込み点近傍が急変流となること、(3) 界面での混合を考慮した解析を行う。

潜り込み点近傍の流れは圧力の効果の卓越した急変流であり、この領域は Benjamin⁸⁾ の理論式 (8), (9) より界面形状を求めることができる。しかし、これより下流では流れは漸変流とみなし得るようになる。この領域では界面と底面に働く摩擦、界面での混合が慣性効果と同程度に重要となり、流れはもはや非粘性流として取り扱うことはできない。

潜り込み点の近傍を除き、流れを漸変 2 層流として取り扱う。図-11 は用いた座標系および記号を示す。流れは 2 次元、定常な乱流とする。上層、下層の流体の密

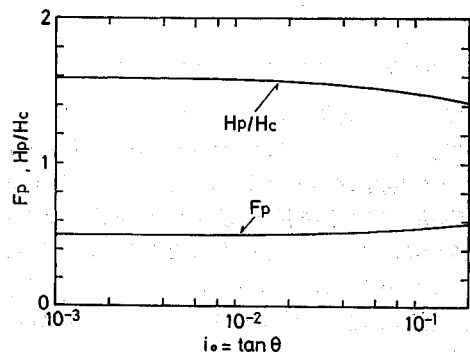


図-10 $F_p, H_p/H_c$ と流路床勾配の関係

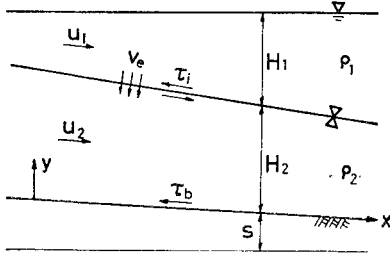


図-11 漸変する2層流

度および流速は断面内で一様とし、それぞれ、 ρ_1, ρ_2, u_1, u_2 で表す。上層、下層の水深を H_1, H_2 , 単位幅流量を q_1, q_2 とする。下層の流動に伴い、界面で混合が生じ上層水を連行する。連行速度は下向きを正にとり V_e で表す。圧力分布は静水圧分布を仮定する。このとき、流下方向の運動方程式、質量保存式、連続式を各層について積分することにより基礎方程式として次式を得る。

x 方向の運動方程式

上層 ($H_2 \leq y \leq H$)

$$\frac{d}{dx} q_1^2 / H_1 = g \sin \theta H_1 - H_1 g \cos \theta \frac{dH}{dx} - \frac{\tau_i}{\rho_1} - u_i V_e \dots (26)$$

下層 ($0 \leq y \leq H_2$)

$$\frac{d}{dx} q_2^2 / H_2 = g \sin \theta (1 + \epsilon) H_2 - H_2 g \cos \theta \frac{dH}{dx} - \frac{1}{2} g \cos \theta \frac{d}{dx} \epsilon H_2^2 + \frac{\tau_i - \tau_b}{\rho_1} + u_i V_e \dots (27)$$

質量保存式

$$\frac{d}{dx} \epsilon q_2 = 0 \dots (28)$$

連続式

上層 ($H_2 \leq y \leq H$)

$$\frac{d}{dx} q_1 = -V_e \dots (29)$$

下層 ($0 \leq y \leq H_2$)

$$\frac{d}{dx} q_2 = V_e \dots (30)$$

ここで、 H は全水深 ($=H_1+H_2$)、 $\epsilon (= \rho_2 - \rho_1 / \rho_1)$ は相対密度差、 τ_i, τ_b はそれぞれ界面と底面に働くせん断力、 u_i は界面での流速である。式 (26), (27) の右辺の最終項は混入に伴う付加応力であり、局所的な流速 u_i に依存する。ここでは界面の位置を流速が零となる高さで定義している。このため、式 (26), (27) において $u_i V_e$ の項は零となり混入の効果は式 (29), (30) で考慮されることになる。

界面および底面せん断力は摩擦係数を導入し、次のよ

うに表す。

$$\left. \begin{aligned} \tau_i / \rho_1 &= \frac{1}{2} f_i' (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \\ \tau_b / \rho_1 &= \frac{1}{2} f_b' u_2 |u_2| \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

さらに、界面摩擦係数 f_i' と底面摩擦係数 f_b' を次のようにおく^{18), 19)}。

$$f_i' = a (R_e F_{i_2}^2)^{-0.5} \dots (32 \cdot a)$$

$$f_b' = \alpha f_b' \dots (32 \cdot b)$$

ここで、 F_{i_2} は下層の内部フルード数であり、係数 a は実測値により定めるものとする。係数 α は等流部での流速分布の実測値より近似的に求めることができる。下層流のせん断力分布を直線分布、最大流速の現れる点でせん断力を零と仮定すれば、密度分布と流路床勾配より界面せん断力 τ_i , 底面せん断力 τ_b が求まる¹⁸⁾。さらに、上層の流速が十分小さいと考えると、式 (31), (32 \cdot b) から $\alpha = |\tau_i / \tau_b|$ と表される。このようにして α を求めると本実験の場合 $\alpha = 0.6 \sim 1.5$ となる。以下の計算では、この平均値をとり $\alpha = 1$ を用いた。

連行速度 V_e は連行係数 E を導入し、

$$V_e = E u_2 \dots (33)$$

とする。

次に、代表量を単位幅流量 q_0 , 潜り込み水深 H_p , 流入水と表層水の密度差 ϵ_0 に選び、方程式を無次元化する。無次元量に記号 * を施す。

$$\left. \begin{aligned} H_1^* &= \frac{H_1}{H_p}, H_2^* = \frac{H_2}{H_p}, q_1^* = \frac{q_1}{q_0}, q_2^* = \frac{q_2}{q_0} \\ \epsilon^* &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, F_p'^2 = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 g H_p^3 \cos \theta}, x^* = \frac{x}{H_p} \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

$$\frac{dH_1^*}{dx^*} = \frac{1}{\phi} \{-i_0 F_{i_2}^2 + i_{f_2} - (1 + \epsilon - \epsilon F_{i_2}^2) i_{f_1}\} \dots (35)$$

$$\frac{dH_2^*}{dx^*} = \frac{1}{\phi} \{i_0 (1 - (1 + \epsilon) F_{i_2}^2) + i_{f_1} - (1 - \epsilon F_{i_2}^2) i_{f_2}\} \dots (36)$$

$$\frac{d\epsilon^*}{dx^*} = -\frac{\epsilon^*}{q_2^*} \frac{dq_2^*}{dx^*} \dots (37)$$

$$\frac{dq_1^*}{dx^*} = -E \frac{q_2^*}{H_2^*} \dots (38)$$

$$\frac{dq_2^*}{dx^*} = E \frac{q_2^*}{H_2^*} \dots (39)$$

ここで、

$$\phi = 1 - (1 + \epsilon) F_{i_2}^2 - F_{i_2}^2 + \epsilon F_{i_2}^2 F_{i_2}^2 \dots (40 \cdot a)$$

$$F_{i_2}^2 = \frac{q_1^{*2}}{\epsilon^* H_1^{*3}} F_p'^2 \dots (40 \cdot b)$$

$$F_{i_2}^2 = \frac{q_2^{*2}}{\epsilon^* H_2^{*3}} F_p'^2 \dots (40 \cdot c)$$

$$i_{f_1} = \frac{1}{2} \frac{f_i' (u_1^* - u_2^*) |u_1^* - u_2^*|}{\epsilon^* H_1^*} F_p'^2$$

$$+2 \frac{q_1^*}{\epsilon^* H_1^{*2}} \frac{dq_1^*}{dx^*} F_p'^2 \dots\dots\dots (40 \cdot d)$$

$$i_{f_1} = \frac{1}{2} \frac{f_b' u_2^* |u_2^*| - f_i' (u_1^* - u_2^*) |u_1^* - u_2^*|}{\epsilon^*} \cdot F_p'^2$$

$$+2 \frac{q_2^*}{\epsilon^* H_2^{*2}} \frac{dq_2^*}{dx^*} F_p'^2 + \frac{1}{2} \frac{H_2^*}{\epsilon^*} \frac{d\epsilon^*}{dx^*} \dots\dots\dots (40 \cdot e)$$

である。

界面形状の計算は、以下のように行う。潜り込み点付近の急変流は Benjamin の理論式 (8), (9) で計算する。図-4 で示したように、Benjamin の急変流理論が適用できる範囲は下流等流部の流れが常流か射流かで異なる。したがって、流れが常流から射流に移移する場合と流れが全域で常流である場合について急変流として扱う範囲を次のように定める。

① 常流から射流に移移する場合

このとき、界面形状のどこかに支配断面が現れこれより上流が著しい急変流となる。そこで、潜り込み点から支配断面までを急変流として扱うこととする。

支配断面の位置 x_{cr}^* 、下層水深 H_{2cr}^* は Benjamin の理論、および前章の理論により求めることができる。 $x^* = x_{cr}^*$ で $F_{i_1} = 1$ となることを考慮すると式 (40・c) から、

$$H_{2cr}^* = F_p'^2 / 3 \dots\dots\dots (41)$$

となる。 F_p' は式 (22) より計算する。 H_{2cr}^* が求まれば対応する x_{cr}^* は式 (8), (9) により求まる。 $i_0 \rightarrow 0$ の極限ではこれらの値は $x_{cr}^* = 0.594\dots$, $H_{2cr}^* = 0.629\dots$ である。

② 全域で常流の場合

この場合、① に比し急変流となる範囲は極端に狭く潜り込み点のごく近傍の範囲 $0 \leq x^* \leq x_A^*$ に限られる。しかし、この範囲を定める明確な基準はない。ここでは、実験結果を参考にして $x_A^* = 0.05$ とした。これに対応する下層水深は式 (8), (9) より $H_{2A}^* = 0.933\dots$ となる。この領域より下流では漸変流として取り扱うことができ、界面形状は式 (35)~(39) で計算できる。境界条件は、次のように与えられる。

流れが常流から射流に移移する場合

$$\left. \begin{aligned} x^* = x_{cr}^* \text{ で } H_1^* = 1 + i_0 x_{cr}^* - H_{2cr}^* \\ H_2^* = H_{2cr}^*, q_1^* = 0, q_2^* = \epsilon^* = 1 \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

流れが常流の場合

$$\left. \begin{aligned} x^* = x_A^* \text{ で } H_1^* = 1 + i_0 x_A^* - H_{2A}^* \\ H_2^* = H_{2A}^*, q_1^* = 0, q_2^* = \epsilon^* = 1 \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

図-12, 13 はそれぞれの場合の界面形状の計算法を模式的に示す。

以上の方法により界面形状を計算するためには、界面摩擦係数 f_i' に関する定数 a [式 (32・a)] の値を与える必要がある。しかし、下層流の界面摩擦係数の知識

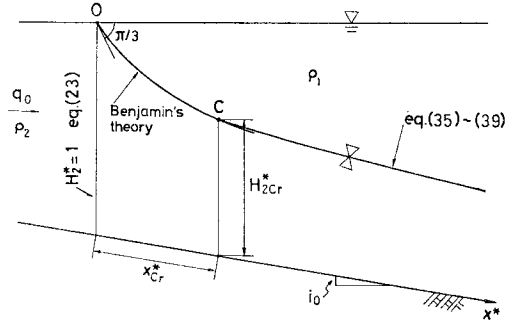


図-12 常流から射流に移移する場合の計算法

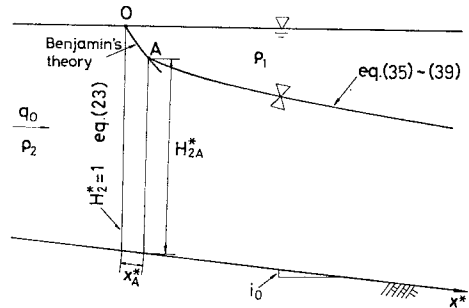


図-13 常流の場合の計算法

は十分ではない。ここでは計算値が界面形状の実測値に最もよく一致するように a の値を定める。その結果、流路床勾配、水理量によらず a の値がほぼ一定値をとれば、理論は無理なく実測値を説明すると考える。

図-14~16 は式 (42) または式 (43) の境界条件のもとに式 (35)~(39) を数値計算して求めた界面形状を実測値と比較して示す。計算に用いた a の値は各図中に記入している。図-14 は流れが常流から射流に移移する場合(急勾配流路床)の計算例 (Run 5) であり、混入量は比較的大きく $x^* = 10$ で $q_1^* = -0.18$ である。図-15, 16 は流れが全域で常流の場合(緩勾配流路床)の例 (Run 11, 12) であり、混入量は急勾配の流れに比べて非常に小さく $x^* = 10$ で $q_1^* = -0.011$ である。

図-14~16 が示すように、理論は実測値をよく説明する。このとき、いずれの場合にも $a = 0.35 \sim 0.45$ とほぼ一定値をとる。一方、混入量を零として解析を行うと、急勾配の場合 $a = 1.5 \sim 2.0$ 、緩勾配の場合 $a = 0.5 \sim 0.7$ と大きく変化する。したがって、摩擦係数を実験ごとに変化させる必要があり、かつ、その値をかなり大きくしなければ理論は実測値を説明できないことになる。これは混入量の大きな急勾配の場合に特に顕著である。このことは潜り込み後の流れを理論的に取り扱うためには界面での混入量の適切な評価が重要であることを意味する。以上のように混入を考慮した解析を行うと、界面摩擦係数を表す式 (32・a) の係数 a は、混入量、

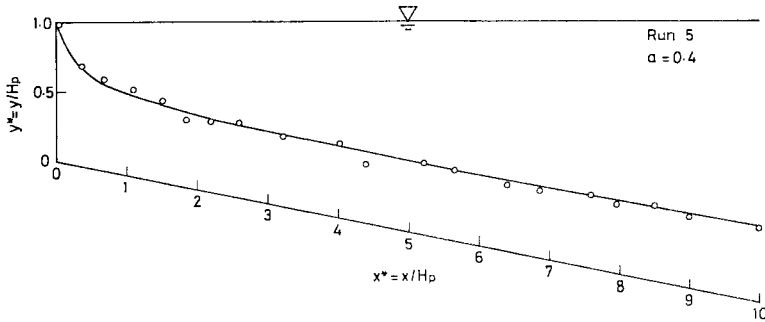


図-14 界面形状の計算値と実測値 (Run 5, 急勾配)

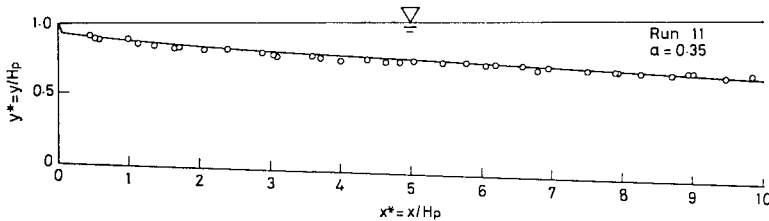


図-15 界面形状の計算値と実測値 (Run 11, 緩勾配)

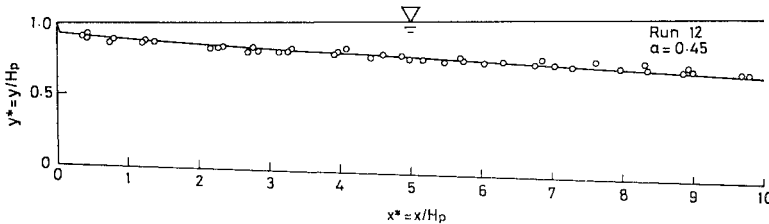


図-16 界面形状の計算値と実測値 (Run 12, 緩勾配)

流路床勾配に関係なくほぼ一定値をとり、従来広く受け入れられている値に近似する⁶⁾。したがって、本理論は潜り込み点から等流部までの界面形状を統一的に説明できる。

6. 結 論

貯水池密度流の境界条件となる潜り込み点付近の流れを理論的に取り扱い、潜り込み水深および潜り込み後の下層流の界面形状の定式化を行った。理論は2次元実験によって検討され、理論式の妥当性が確かめられた。最後に本研究で得られた主要な結論を以下にまとめる。

(1) 潜り込み点近傍の流れを非粘性流として取り扱い、局所的な圧力のつり合いと流線の曲率を考慮して運動量の保存式をたて、潜り込み水深の理論式を導いた。理論によると潜り込み水深は単位幅流量と相対密度差によって決まり、流路床勾配にはほとんど影響されない。理論値を実験値、および実際の貯水池での実測値と比較した結果、本理論が広い範囲の実測値をよく説明するこ

とを示した。

(2) 潜り込み点近傍の急変流を非粘性流、これより下流を粘性と界面の混合を考慮した漸変2層流として解析し、界面形状の予測式を導いた。理論は、潜り込み後の下層流が常流から射流に遷移する場合と全域で常流の場合の広い範囲にわたって実測値に適合する。

(3) 本理論によってこれまで不明確であった貯水池流入端の境界条件を与える潜り込み水深と潜り込み点から等流部までの界面形状を合理的に算定できる。

最後に、本研究を遂行するにあたり有益な助言をいただいた早稲田大学 吉川秀夫教授(当時、東京工業大学教授)に深甚な謝意を表します。また、本研究の一部は文部省科学研究費、自然災害特別研究(貯水池濁度の水理に関する災害科学的研究、代表者 足立昭平 名大教授)の補助を受けた。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 安芸周一：貯水池濁水現象，水工学に関する夏期研修会講義集 A，土木学会，A-1-1~26，1975。
- 2) Task Committee on Preparation of Sedimentation Manual Committee on Sedimentation Hydraulics Division：Sediment Transportation Mechanics：Density Currents，J. of Hydraul. Div., Proc. of ASCE, Vol. 89, HY 5, pp. 77~87, 1963.
- 3) 福岡捷二・水村和正・加納敏行：密度流先端部の流動機構に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第274号，pp. 41~55, 1978。
- 4) 福岡捷二・福岡祐介・村田和夫・荒井 健：成層化した2次元貯水池に流入する密度流の実験的研究，土木学会論文報告集，第293号，pp. 65~77, 1980。
- 5) 福岡捷二・福岡祐介：成層化した2次元貯水池中で分岐する密度流の解析的研究，土木学会論文報告集，第294号，pp. 73~84, 1980。
- 6) 水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象(2)，土木学会論文報告集，第243号，pp. 99~109, 1975。
- 7) Kármán, T. von：The Engineer Grapples with Non-linear Problems, Bull. Am. Math. Soc., Vol. 46, pp. 615~682, 1940.
- 8) Benjamin, T.B.：Gravity Currents and Related Phenomena, J. of Fluid Mech., Vol. 31, Part 2, pp. 209~248, 1968.

- 9) 石橋 毅・秋元 保・白砂孝夫・石川晴雄・齋藤 茂・宮永洋一：成層型貯水池内の流れと熱収支の現地観測，第21回水理講演会論文集，pp. 1~8, 1977.
- 10) 板倉忠興・岸 力：貯水池密度流に関する研究，第14回自然災害科学総合シンポジウム，pp. 89~92, 1977.
- 11) 菅原 晃・岸 力・板倉忠興：貯水池内における濁水の流動機構に関する研究，第33回年次学術講演会講演概要集，第II部，pp. 385~386, 1978.
- 12) 岩崎敏夫・三王英寿・阿部至雄・大杉 勉：貯水池における凝集性懸濁物質の挙動について，第22回水理講演会論文集，pp. 113~118, 1978.
- 13) 江頭進治・芦田和男：貯水池密度流の潜り込み水深の推定，第15回自然災害科学総合シンポジウム，pp. 481~482, 1978.
- 14) Hebbert, B., J. Imberger, I. Loh and J. Patterson : Collie River Underflow into the Wellington Reservoir, J. of Hydraulic Div., Proc. ASCE, Vol. 105, HY 5, pp. 533~545, 1979.
- 15) Ellison, T.H. and J.S. Turner : Turbulent Entrainment in Stratified Flows, J. of Fluid Mech., Vol. 6, pp. 423~448, 1959.
- 16) Lofquist, K. : Flow and Stress Near an Interface between Stratified Liquids, The Physics of Fluids, Vol. 3, No. 2, pp. 158~175, 1960.
- 17) Elder, R.A. and W.O. Wunderlich : Inflow Density Currents in TVA Reservoirs, International Symposium on Stratified Flows, Novosibirsk, pp. 221~236, 1972.
- 18) Ippen, A.T. and D.R.F. Harleman : Steady State Characteristic of Subsurface Flow, Nat. Bur. of Standards, Circulation Vol. 521, p. 79, 1952.
- 19) 金子安雄：2層流界面抵抗係数の一例，第13回海岸工学講演会講演集，pp. 263~267, 1966.

(1979.9.17・受付)