土木学会論文報告集
第302号・1980年10月
【討　　議】

草間孝志
三井康司 共著
吉田俊弥

"数値ラプラス逆変換法による線形粘弾性解析"への討議

(土木学会論文報告集 第292号・1979年12月掲載)

▶討議者 (*Discussion*) ————園田恵一郎・小林治俊 (大阪市立大学)・石尾年光 (東京建設コンサルタンツ)
By Keiichiro Sonoda, Harutoshi Kobayashi and Toshimitsu Ishio

線形粘弾性問題を対応原理を介して解く場合，数値ラプラス逆変換法に頼らねばならない場合が多く，その際，逆変換における変換パラメーターの選択が精度を左右するといわれている．この点につき正規直交関数系と分布関数の概念を導入する巧みな手法で従来の逆変換法に比べ変換パラメーターの選択に合理性をもたせ，しかも数値計算例を通じ種々な構造系と粘弾性材料とに対し精度の高い解を与えている著者らの論文は高く評価されるものと思われます．

ところで，著者らは数値計算例で線形粘弾性基礎上のはりに対し，著者らの数値ラプラス逆変換法は「討議者らが先に求めた固有関数による解と比較すると少ない項数で精度のよい解が得られ」，「固有関数による解は曲げモーメントに対し収束が悪いため，ここでは奇数項のみ7500項まで計算した」と述べておられます．討議者らはこの点に異論をもつとともに，固有関数展開法が一般の読者に不当に評価される危惧をもっておりますので，討議者らの論文[28)]の補足説明も兼ねて固有関数展開法の級数計算における収束性についてコメントを加えさせていただきたいと思います．

文献28) の 表—1，表—A.3 より中央集中荷重を受ける Kelvin 基礎上のはりの曲げモーメントの固有関数表示式は，時間依存しない項とする項とに分ければ次式となります．

$$M_x=(M_x)_s+Pl\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_m{}^2\phi_m(l/2)\phi_m''(x)}{\alpha_m{}^4+(l/K)^4}\cdot\exp\left\{-[1+(\alpha_m K/l)^4]\frac{t}{\tau}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

ここに，$(M_x)_s$ は弾性基礎上のはりの静的曲げ問題に対応する曲げモーメントであり，級数表示では，

$$(M_x)_s=-Pl\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_m{}^2\phi_m(l/2)\phi_m''(x)}{\alpha_m{}^4+(l/K)^4}\cdots\cdots(32)$$

式(31) 右辺第2項の級数は exp 関数の内容により，α_m および t/τ が増大すれば急速に収束することが一べつしてわかります．著者らが 表—3 で示された時間 t/τ に対するこの級数の収束状況は，表—4 のようであり，収束の最も遅い $t/\tau=0.0001$ の場合でも奇数項のみ13項で収束しており $t/\tau=0.1$ 以降についてはすべての時刻についてわずか1〜2項で収束しています．

そこで問題は式(32) の級数の収束性にあり，この級数を直接計算する場合実用解を得ようとすれば文献28) 表—4 の討議者らの計算結果のように50項（このとき誤差1.5%）程度でよいが，正確解を得ようとすれば著者らの計算結果のように7500項という膨大な計算量が必要となるでしょう．しかし式(32) の級数は，著者らがラプラス変換した像空間における解を求めるのに利用した弾性解[30)]そのものの固有関数展開された別表現にすぎないのであり両者は同一のものであるから，$x=l/2$ に対する弾性解

$$(M_x)_s=\frac{Pl}{4\beta}\,\frac{\cosh\beta-\cos\beta}{\sinh\beta+\sin\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

を直接用いても差しつかえなく，これより正解 $(M_x)_s$

表—4　式(31) 右辺第2項の級数の収束状況：$M/Pl\times10^2$

m^*	t/τ 0.0001	0.001	0.1	0.5	1.0	2.0	10.0
1	−2.878	−2.874	−2.477	−1.359	−0.642	−0.143	0.000
2	−4.424	−4.398	−2.802	−1.360	−0.642	−0.143	0.000
3	−5.080	−5.004	−2.802	−1.360	−0.642	−0.143	0.000
4	−5.429	−5.267	−2.802	−1.360	⋮	⋮	⋮
5	−5.636	−5.369	⋮	⋮			
6	−5.765	−5.397					
7	−5.845	−5.401					
8	−5.893	−5.401					
9	−5.920	−5.401					
10	−5.933	⋮					
11	−5.938						
12	−5.940						
13	−5.941						
14	−5.941						
15	−5.941						
粘弾性解 式(31)	0.693	1.233	3.832	5.274	5.993	6.491	6.634

* 問題の対称性により m は奇数項を採用しているので m^* は項数を表している．

$=0.06634\,Pl$ を得ます．

一方，式 (32) の級数解を用いる場合は，以下のようにすれば効率のよい計算が可能です．すなわち基礎反力係数を含まない項と含む項とに分ければ，

$$(M_x)_s=-Pl\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi_m(l/2)\,\phi_m''(x)}{\alpha_m^2}+Pl\cdot\left(\frac{l}{K}\right)^4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi_m(l/2)\,\phi_m''(x)}{\alpha_m^2\{\alpha_m^4+(l/K)^4\}}\quad\cdots\cdots(32)'$$

となり右辺第1の級数は基礎のない場合の曲げ問題に対応しているので，通常のはり公式により置き換えることができます．ただし両端自由なはりの場合この項は，はりが剛で同じ基礎上にあり，同じ荷重を受ける問題と考えられるので初等力学より曲げモーメントの算定は容易に行え，いまの場合は $Pl/8$ となります．第2の級数は α_m^{-6} で効くきわめて収束性のよいもので，その収束状況を示すと表―5のようであり，わずか7項で収束し，前述の剛体ばりに対する値 $Pl/8$ を加えた値は式 (33) より求められた正解に一致しています．

以上のように級数表示式の力学的性質を適宜考慮すればきわめて有効に数値計算が行えます．他の粘弾性基礎上のはりに対しても同様なことがいえ，分布荷重に対してはさらに収束性がよいので著者らの見解とは逆に，固有関数展開による方法は精度，収束性ともに優れているといえるものと思います．

表―5 式 (32)′ 右辺第2項の級数の収束状況：$M/Pl\times10^2$

m^*	式 (32)′ 右辺第2項	左欄の値 $+(1/8)\times10^{-2}$
1	−5.751	6.749
2	−5.857	6.643
3	−5.864	6.636
4	−5.865	6.635
5	−5.865	6.635
6	−5.865	6.635
7	−5.866	6.634
8	−5.866	6.634
9	−5.866	6.634
10	⋮	⋮
正　解	6.634	

▶回答者 (*Closure*)

草間孝志・三井康司・吉田俊弥（信州大学）
By Takashi Kusama, Yosushi Mitsui and Shun-ya Yoshida

著者らの論文に対しご討議をいただきありがとうございます．

ご討議は，著者らが取り扱った数値計算例のうち，線形粘弾性基礎上のはりについて，著者らの解との比較のため用いた討議者らが誘導した式の収束に関する部分ですが，以下のように回答いたします．

まず初めに，著者らは固有関数展開法を高く評価すればこそ，正解値として採用したことをおことわりします．しかしながら，著者らの記述により，もし読者が固有関数展開法を不当に評価したとするならば，それは著者らの筆の足らなかったことによるものであります．

さて，ご質問の項数ですが，今回の補足説明が示されていない時点では，討議者らの論文[28]の表―4に示されているように，集中荷重の場合 50 項とっても有効数字2桁目に誤差があります．著者らはこれを参考として，討議者らの論文[28]の表―1～3に記載されております式を忠実に計算した結果，正解値として有効数字4桁求めるためには，約 7 500 項計算しなくてはならないことになりました．

もともと，著者らの研究は線形粘弾性問題の対応原理による解法を対象として，従来用いられている選点法による数値ラプラス逆変換法の改良と，選点法における変換パラメーターの選択について論じたものであります．線形粘弾性基礎上のはりについては，正解値として討議者らの固有関数展開法による式をそのまま利用したにすぎません．

なお，討議者らの今回の補足説明につきましては，今後参考にしたいと思います．