

有限要素法による圧密現象の一解法

A METHOD FOR ANALYZING CONSOLIDATION
PHENOMENA BY FINITE ELEMENTS

山上拓男*・植田康宏**

By Takuo YAMAGAMI and Yasuhiro UETA

1. まえがき

粘土骨格のつり合い方程式と間隙水の連続条件を連立させた、いわゆる連成作用を直接取り扱った多次元圧密の数値解析法(有限要素法)が Christian¹⁾, Christian・Boehmer²⁾, Sandhu・Wilson³⁾ あるいは Yokoo・Yamagata・Nagaoka⁴⁾ らによって提案されて以来、同じ線上にある数多くの研究^{5)~7)} が報告されている。当初骨組の等方線形弾性および間隙水の非圧縮性を仮定していた研究も、異方線形弾性⁸⁾ や間隙水の圧縮性を含めた場⁹⁾ へ拡張され、さらには非線形弾性をも考慮し得る¹⁰⁾ に至っている。また、最近になって赤井・田村^{11), 12)} は Roscoeらによるケンブリッジ理論あるいはこれと等価な太田のダイレイタンス理論をもとに弾塑性解析を提出するなど、この分野の数値解析技法は現実の土の挙動を踏まえて着実に進歩しているといえる。このこと自体きわめて意義深いもので高く評価されるべきであるが、一方において理論が精緻化されればされるほど、それに付随して困難な問題が伴うのも常であろう。目下の圧密解析に関していえば、上記の方法はいずれも連成効果を直接取り扱っているがため一般に理論構成が複雑で必ずしも理解が容易でないことに加え、最終的に解くべき多元連立方程式の係数行列の中に剛性行列と浸透性行列が同時に現れ、方程式の次数を大きくしていることが指摘できる。このため時間に関する数値積分上困難な問題が派生し、このこと自体が1つの研究課題とさえなっている¹³⁾ のである。同時に実際面からいえば、大容量の大型計算機の利用が不可欠であってまだまだ実用化の段階にあるとはいいがたい。近い将来大型計算機の汎用化が期待されるとしても、多次元圧密が土木工事と関連してきわめて日常的なできごとであること、および有限要素法自体が実

際問題へ応用することを強く意識しつつ発展してきたことをあわせ考えるならば、多次元圧密の本質を損なわずかつ既往の手法に比べいくらかでも簡便な解析法を開発する意義は、特に実用面において、少なくないと考えられる。

このような見地のもとに、圧密現象を構成する2つの要素、すなわち間隙水圧の消散過程と粘土骨格の応力-変形状を独立に解析し、その間を浸透力が受渡しする点に最大の特徴を有する新しい解法を提案するものである。

2. 基本概念(浸透力の導入)

本文で提案する圧密現象の新しい解析法の立場を明確にするために、Fig. 1 に示す最も単純な片面排水の1次元場を例にとり、基本概念を説明しておく。

時刻 $t=0$ において粘土層上面に分布荷重 p が載荷されると、以後この荷重が一定であるにもかかわらず、沈下(変形)が逐次進行する。無論クリープ等は考えないとしてである。さて、この系に外部から直接作用している荷重は p のみであり、これが時間に無関係に一定であるにもかかわらず、変形が時間的に進行するとはいかなることであろうか。一般に、新たな変形が生じるためには必ず新たな外力変化の存在が要請されるはずである。このようにみえてみると、粘土層が時とともに変形す

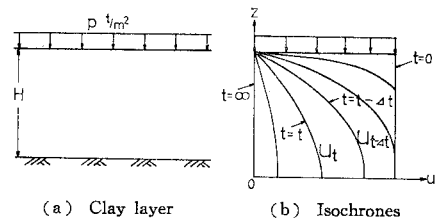


Fig. 1 Explanation of basic concept based on one dimensional consolidation

* 正会員 工修 徳島大学講師 工学部建設工学科

** 正会員 工修 阿南工業高等専門学校助手 土木工学科

るからには、内部で構造骨格に作用する外力が時間的に変動せねばならないことになる。したがって、もしこの外力変化を陽な形で評価できるならば、従来の手法とは異なった解析法へ進み得ることも期待できよう。

Fig. 1 (b) は等時曲線の模式図である。いま、任意時刻 t に注目し、粘土骨格に作用している有効外力 F_t を考えると、1つは分布荷重 p 、他の1つはこのときの動水勾配に比例した単位体積当りの物体力として定義される浸透力 X_t である。いま、分布荷重 p がその載荷面で粘土骨格に及ぼす影響をベクトル p で、また浸透力 X_t が粘土骨格に及ぼす影響を X_t で表しておく。同様に、時刻 $t-\Delta t$ に注目すれば、この系に作用している有効外力 $F_{t-\Delta t}$ は載荷面での分布荷重の影響 p と浸透力 $X_{t-\Delta t}$ の影響 $X_{t-\Delta t}$ である。すなわち、

$$F_t = p + X_t, F_{t-\Delta t} = p + X_{t-\Delta t} \dots\dots\dots(1)$$

ただし、いまの場合、

$$X_t = -\frac{\partial u_t}{\partial z}, X_{t-\Delta t} = -\frac{\partial u_{t-\Delta t}}{\partial z} \dots\dots\dots(2)$$

であり、 u は過剰間隙水圧である。

したがって、時刻 $t-\Delta t$ から時刻 t に至る間に、粘土骨格は、

$$\Delta F = F_t - F_{t-\Delta t} = X_t - X_{t-\Delta t} \dots\dots\dots(3)$$

だけの有効外力の変化を受けたことになる。この ΔF が先に述べた外力の時間的変化そのものであり、相隣る2つの時刻における浸透力の差として定義される。そして時刻 $t-\Delta t$ を出発点として、 ΔF なる外力のもとに有効応力の立場で応力-変形解析を行い、得られた結果を時刻 $t-\Delta t$ の値に重ね合わせると時刻 t の諸量が求められる。この間の状況を Fig. 2 に示した。図において、 $u_t, u_{t-\Delta t}$ はそれぞれ外力 $F_t, F_{t-\Delta t}$ に対応する変位ベクトルを意味し、

$$\left. \begin{aligned} K_E \cdot \Delta u &= \Delta F \\ u_t &= u_{t-\Delta t} + \Delta u \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

なる関係がある。ただし、 K_E は有効応力に基づく剛性行列、 Δu は Δt 間の変位増分である。

以上が本研究で提案する解法の骨子であって、 ΔF すなわち浸透力を定める非定常浸透流解析と、これに引き続く式(4)の変形解析を独立になし得る点で連成効果が避けられた。しかも、式(4)を解くことで骨組のつり合い条件が満たされ、

さらに応力-変形特性も導入されたことになる。無論、圧密現象が本来的に土粒子-水系の連成作用であることは否めない事実であり、これ

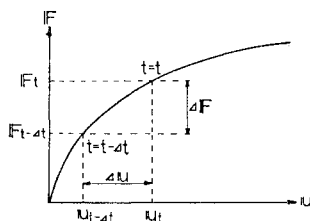


Fig. 2 Load-displacement curve

を避けて通る過程に厳密性を欠く点がないわけではない。これについては次節で詳述する。

ところで、上で導入した浸透力の概念が、従前の圧密解析法ではまったく考慮されていないというわけではない点、一言付記しておきたい。それはたとえば Biot 理論で現れる全応力のつり合い式を有効応力テンソルと過剰間隙水圧で表示した式、

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \dots\dots\dots(5)$$

において、左辺第2項がまさに浸透力を意味するのである。ただ、Biot 理論ではことさら浸透力なるものを意識しなくとも、式(5)のつり合い条件と間隙水の連続条件を連立させれば、手続の複雑さは別として、問題は解決された。そしてその結果は連成効果を直接取り扱うに至ったのである。

他方、本文の手法はたえず浸透力を意識し、前面に押し出すことで連成効果を回避する方策を検討したものである。

3. 有限要素法による定式化

前述の基本概念的説明で明らかにされたように、この解析法は非定常浸透過程と粘土骨格の応力-変形状を個別に解析し、その間を浸透力が結びつける点従来の解法と特徴的な差違が認められる。このうち式(4)に基づく粘土骨格の応力-変形解析は、荷重項 ΔF が与えられさえすれば重力場の応力-変形解析のためのごく普通のプログラムが利用できる。したがって、ここでは間隙水圧の時間的推移すなわち非定常浸透解析の定式化を中心に議論する。また、簡単のため2次元状態に限定して記述するけれども、3次元場や軸対称問題へ拡張することはならぬ困難な問題ではない。

まず、非定常浸透を支配する基礎式として Gibson・Lumb¹⁴⁾ および Davis・Poulos¹⁵⁾ らの考えに従う。ただし、載荷重による過剰間隙水圧場のみならず、一般的な土-水相互作用場へ適用することも念頭におき、全水頭に基づく理論構成をとる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = C \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \dots\dots\dots(6)$$

ここに、

$$C = \frac{2\tau_w(1+\nu')(1-2\nu')}{E'}$$

$\sigma_x + \sigma_y$ = 全応力第1不変量、 E' = 骨格の弾性係数、 ν' = 骨格の Poisson 比、 k_x, k_y = x, y 方向の透水係数、 τ_w = 間隙水の単位重量

吉国¹⁶⁾ が批判しているように、この式は間隙水の連続の条件のみを記述したもので、つり合い条件および応

力-ひずみ関係がまったく考慮されていない点で圧密方程式とはいえない。しかし先に述べた外力増分としての浸透力を定める機能は立派に有しているのである。

いま、

$$Q = C \frac{\partial \sigma}{\partial t} \dots\dots\dots(7)$$

とおくと、式 (6) は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + Q - C \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

となって見掛け上周知の準調和方程式となる。そして境界条件も通常の浸透場で遭遇する次の2つのタイプが課せられる。

(a) 境界上で H の値が指定される。

$$H = H_b \dots\dots\dots(9)$$

(b) 境界上で流量 q が指定される。

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial H}{\partial y} l_y + q = 0 \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 l_x, l_y は境界面上における外向き法線の方向余弦である。

式 (8) を式 (9), (10) なる境界条件のもとに解く方法には変分法や重み付き残差法があるがここでは前者を用いる。

すなわち、最小にすべき汎関数 χ は次式となる。

$$\chi = \iint \frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \iint Q H dx dy + \iint C \frac{\partial H}{\partial t} H dx dy + \int_s q H ds \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 s は境界条件 (b) が与えられる表面を表す。

上式を有限要素により離散化すれば、最終的に次式で表される多元連立方程式を得る。

$$[K]\{H\} + [P]\left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\} + \{F\} = 0 \dots\dots\dots(12)$$

そして、この式を時間に関して差分化し、Zienkiewicz・Parekh¹⁷⁾ の手法を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} & \left([K] + \frac{2}{\Delta t} [P] \right) \{H\}_{t+\Delta t/2} \\ & = \frac{2}{\Delta t} [P] \{H\}_{t-\Delta t/2} - \{F\}_{t+\Delta t/2} \\ & \{H\}_{t+\Delta t} = 2\{H\}_{t+\Delta t/2} - \{H\}_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

これより、時刻 t の全水頭 $\{H\}_t$ に基づいて時刻 $t + \Delta t$ の全水頭 $\{H\}_{t+\Delta t}$ が求められる。

圧密現象を粘土骨格の変形性状の推移と間隙水圧の消散過程に分離するとき、後者を解明すべき非定常浸透解析の結論は、要するに各 time step ごとに式 (13) の連立方程式を解くことである。ところが、式 (13) を解く

時点で既知量でなければならぬ右辺第2項の $\{F\}_{t+\Delta t/2}$ の決定には非常に困難な問題を伴う。ここではその詳細な誘導過程は省略したのであるが、この項は式 (7) で定義される全応力第1不変量の時間的变化の割合、 Q 、を含んでいる。

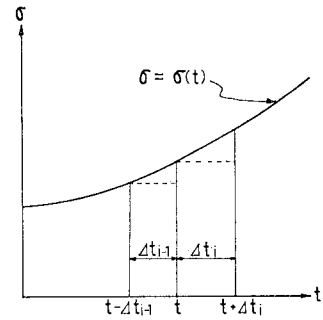


Fig. 3 Variation of total stress with time

周知のように、 Q はたとえ載荷重が一定であるとしても経時変化を示すのが普通である。したがって、時刻 t の状態をもとに式 (13) を解くとすれば、サフィックスが示すようにすでにそれから $\Delta t/2$ 時間経過後の $\{F\}_{t+\Delta t/2}$ 、つまり Q を既知としておかねばならない。しかし前もって Q を定めることは不可能というべきで、こうした障害が派生するのは本来的な土粒子・間隙水の連成作用を回避したことに起因する。そこでこの難点を解消するため Q に関しては、Fig. 3 の模式図にみられるように後退差分で近似することにした。すなわち、時刻 t の状態から式 (13) に基づいて時刻 $t + \Delta t_i$ の諸量を定めるものとして、式 (7) で Q を求める際 $\partial \sigma / \partial t$ の値は一步手前の time step Δt_{i-1} 間の全応力の変化より、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \approx \frac{\sigma(t) - \sigma(t - \Delta t_{i-1})}{\Delta t_{i-1}} \dots\dots\dots(14)$$

とするのである。そして精度を向上せしめる1つの方策として繰り返し計算することが考えられる。すなわち、まず第1回目は上式 (14) で求めた Q をもとに式 (13) を経て時刻 $t + \Delta t_i$ の全水頭を定める。これより Δt_i 間の浸透力の増分 ΔF が決定できるので式 (4) で述べた所論に従い応力-変形解析を行う。得られた結果の応力分布から第1次近似としての全応力不変量 $\bar{\sigma}(t + \Delta t_i)$ を定め、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \approx \frac{\bar{\sigma}(t + \Delta t_i) - \sigma(t)}{\Delta t_i} \dots\dots\dots(15)$$

として再度 Q を評価し、改めて計算し直すのである。基本的にはこの繰り返し計算を1つの time step で解が収束するまで継続すればよい。換言すると、相続く2つの繰り返し段階の解が許容範囲内で一致するまで繰り返し計算を続行するのである。しかし、いたずらに演算量のみを多とする恐れもあり十分吟味すべきであって、これについては後に解析例を通じて考察する。

なお、最初の time step だけは式 (14) で Q を評価すべき一步手前の状態が存在しない。このときは、やむなく第1回目は全応力の経時変化がないもの ($Q=0$) と

して解析し、その結果の応力から式 (15) に基づいて再度計算しなければならない。

また、 Q は要素内で一定値を有するものとし、1次アイソパラメトリック要素および CST 要素を用いている関係上、前者の場合は要素中心の値で代表させる。このとき1つの要素の式 (12) への寄与は簡単に次式で与えられることになる。

$$\left. \begin{aligned} & \text{1次アイソパラメトリック要素について,} \\ & \{F\}^e = -\frac{\Delta Q}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ & \text{CST 要素について,} \\ & \{F\}^e = -\frac{\Delta Q}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Δ : 要素の面積

以上で非定常浸透過程の定式化は完了である。そして式 (13) で定まる $\{H\}_{t+\Delta t}$ より各要素の浸透力を求め、 Δt 間の浸透力の増分を用いて通常の応力-変形解析を実行すれば、時刻 $t+\Delta t$ の変形性状が決定されることになる。このように一見複雑に見える圧密なるものが、非定常浸透解析にしろ、それに続く応力-変形解析にしろ、

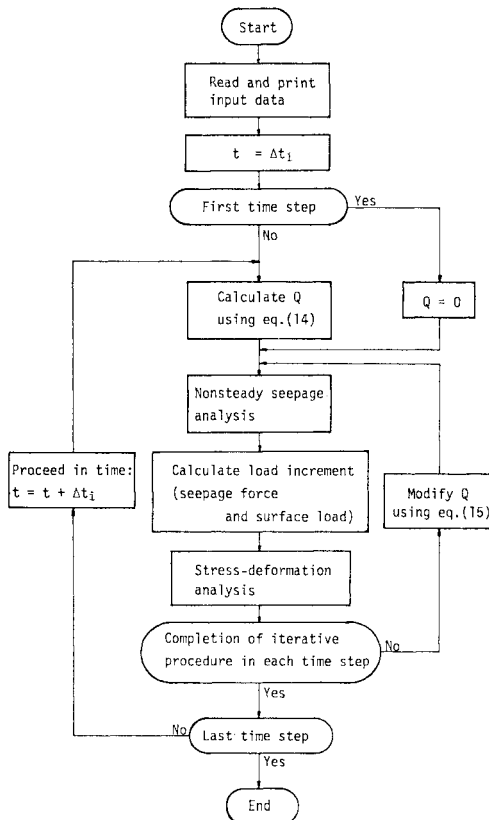


Fig. 4 Flow chart

なんら目新しい理論を持ち込むことなく処理できる点を、連成効果を避け得ることとともに、本解析法のほかにみられない特徴として強調しておきたい。

なお、本文の手法とはかなり異なっているけれども、連成効果を避ける試みの1つが、粘土コアの圧密解析と関係して Eisenstein ら^{18), 19)}によって提案されている。しかし彼らの解法の最大の難点は定荷重下の全応力変化を近似的にも考慮し得ないところにある。いいかえれば、Eisenstein らの手法は、ここで提案した解法において、無条件に全応力の変化項 Q を省略することに相当し、信頼性に乏しいといわざるを得ない。

最後に、この節で論じてきた事項を統括して、本解析法の流れを Fig. 4 に示した。

4. 精度の検証

すでに厳密解の明らかな問題、あるいは連成効果を直接取り扱った数値解と比較しつつ本解析法の位置づけを明確にし、あわせて精度の証左としたい。

(1) 全応力の変化

ここで提案した手法の成否はひとえに各 time step ごとの浸透力の増分をいかに精度よく推定し得るかに係っている。そしてこれはとりもなおさず全応力の変化項 Q の評価が適切であるか否かに集約される。そこで、この Q の影響が端的に評価できる場として1次元圧密を取りあげよう。

いま、Gibson, Davis らの圧密方程式 (実は連続の条件式) を摘記すれば、

2次元に対して、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \dots (17)$$

1次元において、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \dots (18)$$

ここに、

$$c_v = \frac{kE'}{2\bar{\tau}_w(1-2\nu')(1+\nu')};$$

$$c_v = \frac{kE'(1-\nu')}{\bar{\tau}_w(1-2\nu')(1+\nu')} \left(= \frac{k}{m_v \bar{\tau}_w} \right)$$

であった。ただし σ_z は鉛直方向全応力である。一般に、1次元圧密は載荷重が一定である限り全応力の変化項 $\partial \sigma_z / \partial t$ は消失し、いわゆる Terzaghi の式で支配されると了解されてきた。しかし、これはあくまでも1次元圧密を1次元の圧密支配式、式 (18)、の立場で眺めた場合であって、1次元圧密といえども2次元の圧密支配式、式 (17)、を用いる限り全応力の変化 $\partial \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) / \partial t$

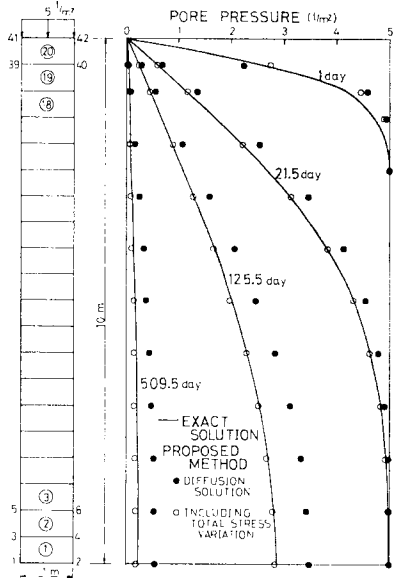


Fig. 5

Fig. 6

Fig. 5 Finite element discretization (one-dimensional consolidation)

Fig. 6 Dissipation of pore water pressure (upper surface drainage)

は存在するのである。無論この場合も鉛直方向全応力の変化は消失する。ゆえに厳密解が既知である1次元問題を式(17)つまりは前節に述べた手順に従って解けば、簡便かつ有効に本解析法の精度が検証できよう。

問題は Fig. 5 に示すように厚さ 10 m の均質な粘土層上面に $p = 5 \text{ t/m}^2$ なる等分布荷重が瞬時載荷された場合を想定した。排水条件は上面のみの片面排水および上下両面排水とする。用いた物性値は透水係数 $k = 1.0 \times 10^{-8} \text{ m/s}$ 、骨組の弾性係数 $E' = 200 \text{ t/m}^2$ 、Poisson 比 $\nu' = 1/3$ である。この粘土層を等大の 20 要素(1次アイソパラメトリック要素)に分割して解いた。

Fig. 6 は片面排水について深さ方向の間隙水圧の分布を等時曲線の形で示したもので、実線は式(18)の厳密解を、○印は式(17)で全応力の変化を考慮した本解析法による結果を表す。また、●印

は参考までに本解析法で式(17)の全応力の変化項を無条件に無視した場合の分布を示している。この図1つをみても明らかなように、全応力の経時変化を無視することはかなり大きい誤差を伴うことが察知される。なお、図中○印と●印の差違は結果的には圧密係数 c_v と $c_{v\sigma}$ の相違が反映されたことになる。

次に、地表面の時間-沈下曲線を Fig. 7 に示した。用いた記号はいずれも Fig. 6 と同じである。また、Fig. 8 には一例として要素番号 18 の要素中心における間隙水圧(4 節点の平均値)および水平方向全応力の経時変化を示している。ただし、全応力の厳密解の決定は以下のものである。まず鉛直方向有効応力 σ_z' を $\sigma_z' = p - u$ より求め、平面ひずみ状態とみて水平方向有効応力 σ_x' を $\sigma_x' = \nu' \sigma_z' / (1 - \nu')$ より定める。よって水平方向全応力 σ_x は $\sigma_x = \sigma_x' + u$ とすればよい。最後に Fig. 9, 10 に両面排水の結果を示した。

以上いずれの図をみても明らかなように、理論解と数値解の一致度はきわめて良好で、少なくとも1次元圧密の見地からは提案した解析法に指摘すべき問題点は見当たらない。なおこの場合、式(14)、(15)で述べた Q の取り扱いとしては、最初の time step のみ 2 度繰り返し計算をしたほかは、いずれも一歩手前の全応力の変

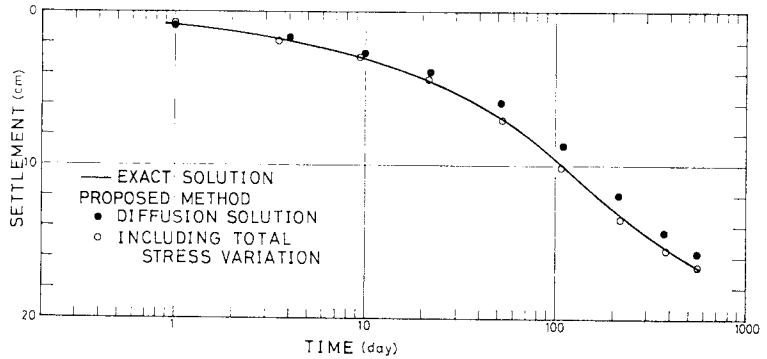


Fig. 7 Time vs. settlement curve (upper surface drainage)

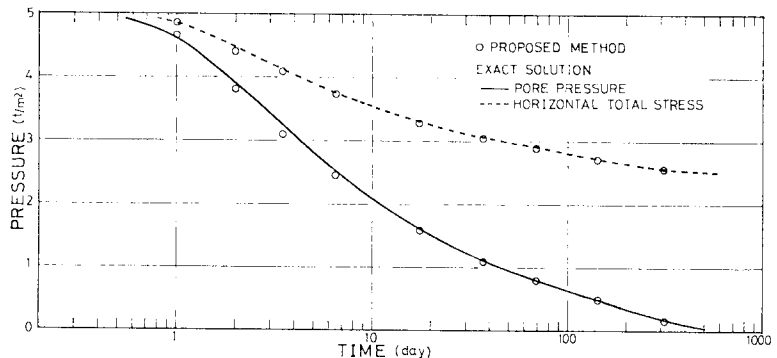


Fig. 8 Time vs. pore water pressure and horizontal total stress curves (upper surface drainage)

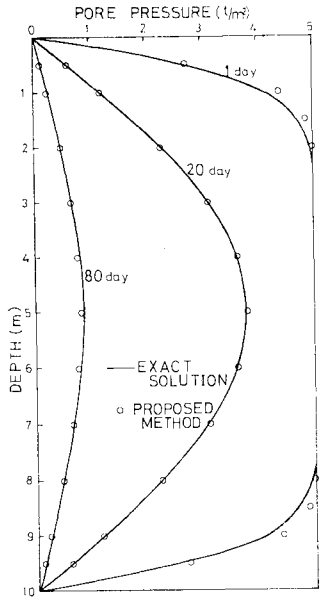


Fig. 9 Dissipation of pore water pressure (double drainage)

化を用いている。

(2) Mandel-Cryer 効果

Biot の方程式に基づいて球の圧密や円柱の軸方向変位を拘束した放射流れの問題を解くと、圧密初期において中心近傍の間隙水圧がいったん初期値を超過した後、減少過程へ移行するという特異な現象—Mandel-Cryer 効果—を呈することが認められている。そして Christian・Boehmer²⁾は彼らの数値解法の例解として後者の問題を採用している。理論解のみならず、Christian らの数値解とも比較し得る意味で同じ問題へ適用した結果を示そう。

3 軸圧縮試験用供試体で軸方向変位を拘束し、両端面からの排水を許さない場合に相当するので平面ひずみ状態とみなすことができる。ゆえに Fig. 11 に示すように 1/4 断面を対象領域として要素分割した。この断面の半径は 10 m、圧密荷重は 1 t/m^2 である。

Fig. 12, 13 はともに中心軸上の間隙水圧の経時変化を理論解²⁰⁾(実線)と対比させたものである。まず Fig. 12 は前節で述べた全応力の変化項 Q の処置と関連して、最初の time step のみ 2 度繰り返して計算し、それ以降の time step ではいずれも一歩手前の全応力の変化を用いた場合を示す。図より計算値は Poisson 比 $\nu = 0, 0.33$ 両ケースいずれも間隙水圧がいったん初期値を超える現象は表現し得ても、理論値とのずれは許容しがたいほどに大きい。これに対し Fig. 13 は、先の式 (14), (15) で説明したように各 time step でいずれも

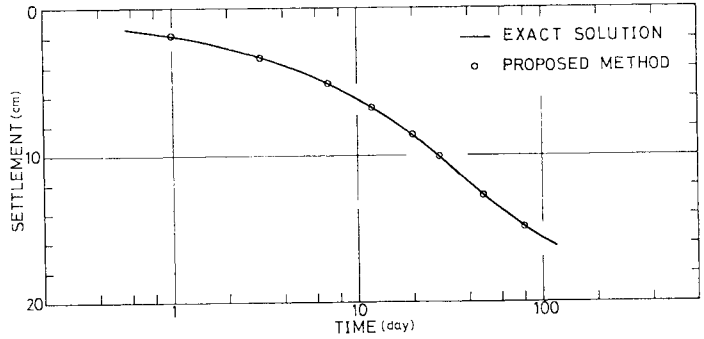


Fig. 10 Time vs. settlement curve (double drainage)

$E = 1000.0 \text{ t/m}^2$
 $\nu = 0.0, 0.33$
 $k_h = k_v = 0.001 \text{ m/day}$
 $\Delta q = 1.0 \text{ t/m}^2, R = 10.0 \text{ m}$

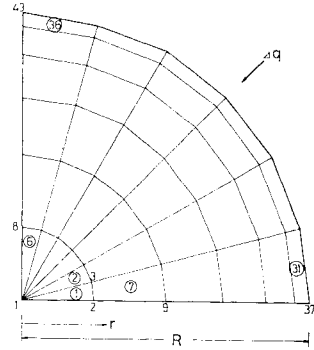


Fig. 11 Finite element idealization (triaxial sample)

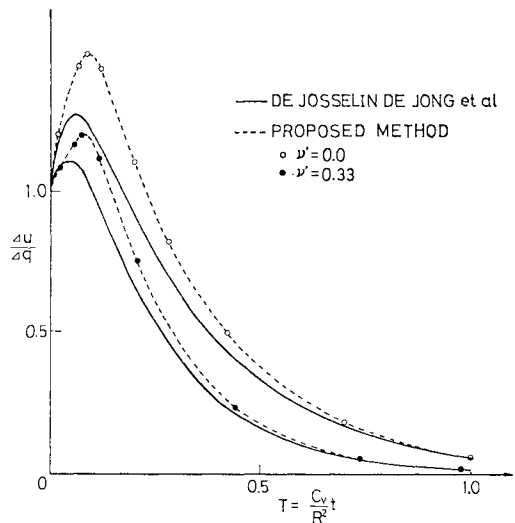


Fig. 12 Time factor vs. pore water pressure curves (two step iteration in the first time step only)

2度繰り返し計算を行ったもので、精度は驚くほどに改良されている。要素分割がかなり粗いにもかかわらず、誤差の最大値は約3%で許容し得るものである。以後

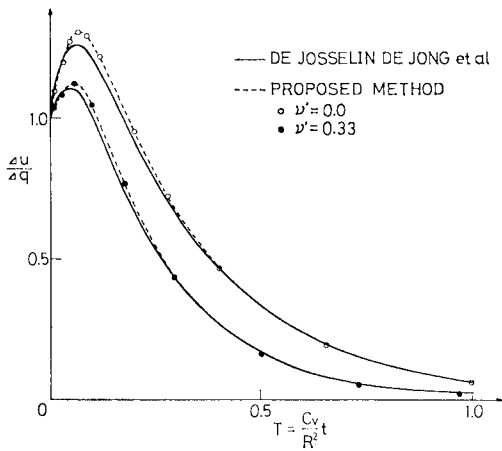


Fig. 13 Time factor vs. pore water pressure curves (two step iteration in each time step)

本文中で提示する資料はいずれも Fig. 13 と同様、1つの time step で2度反復計算した結果であることをあらかじめ断わっておく。

Fig. 14, 15 は理論解および Christian らの数値解と比較したもので、まず、Fig. 14 の上方にある曲線は先の Fig. 13 で与えられる中心点の間隙水圧を対数目盛上で時間係数に対して、また下方の曲線は表面の半径方向変位を最終変位量に対する割合(沈下度)で表したものである。ただし、図中 Christian らの間隙水圧は $r/R = 0.1$ の点で計算された値であることに注意。Fig. 15 は半径方向の間隙水圧の経時変化を示す。いずれも他の解法による結果と十分に一致するわけではないが、両者のずれの程度は小さく実用に耐えるものと考えている。ただ、Fig. 14 で圧密初期において沈下度が Christian らに比べ大きく出すぎている点、気にならないでもない。これに関する解釈は後に 5. で述べる。

(3) 帯荷重下の圧密

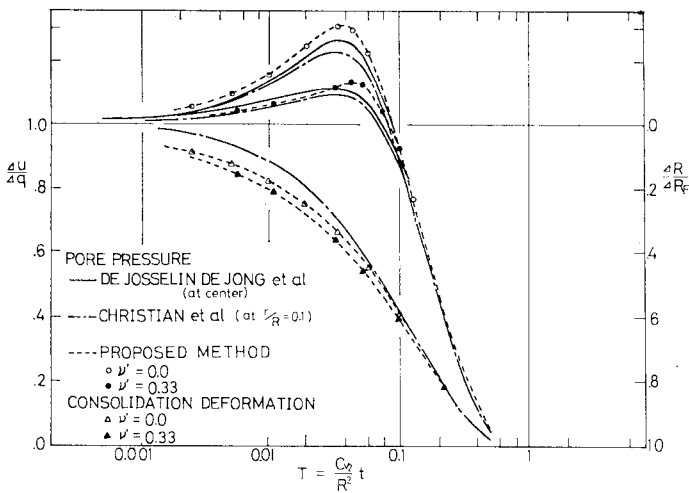


Fig. 14 Time factor vs. pore water pressure and deformation behavior

Christian らの解法とともに、圧密現象の代表的な数値解法である Sandhu らの手法に属する Hwang ら⁹⁾の結果と比較しよう。はじめにこれら例題と関連して、本解析法に付随する1つの問題点を指摘しておかねばならない。それは載荷直後の初期間隙水圧の評価である。Christian や Sandhu らの解法による限り、このような載荷直後の非排水状態の解析と、その後引き続き圧密状態のそれはならん区別することなく扱いた得た。しかるに式(13)から明らかなように、提案する方法は少なくとも時間の出発点における間隙水圧が既知でなければならない。これまでに述べた2つの解析例はいずれも初期間隙水圧が載荷重に等しく

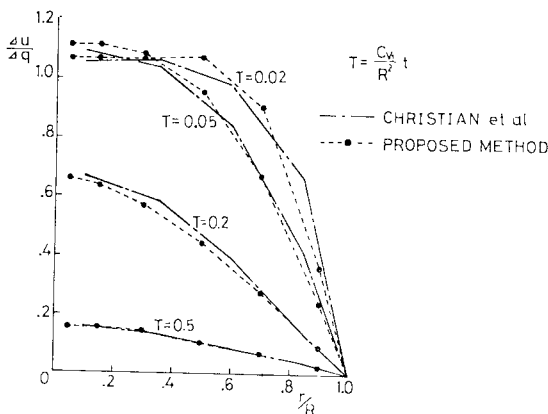


Fig. 15 Pore water pressure vs. radius for $\nu = 0.33$

一定の問題であった。しかし目下の対象である帯荷重下の圧密では、初期間隙水圧を精度よく推定することがきわめて重要となる。さて、このような非排水条件下の解析は前述の Christian や Sandhu らのほかに、Herrmann の方法²¹⁾なども提案されているが、これらはいずれも圧密解析同様骨組と間隙水の連成作用を取り扱ったものである。他方、Poisson 比を 0.5 に近づけることで全応力解析を行い、平均全応力をもって初期間隙水圧とすることも可能ではある。この方法はきわめて単純であり、本論文の主義・主張に最も適合する手法ではあるが、精度の面で難点があるとされてきた。しかし筆者らは、Naylor²²⁾ や Hinton・Campbell ら^{23), 24)}にヒントを得て、全応力解析でかつ高精度で初期間隙水圧を評価

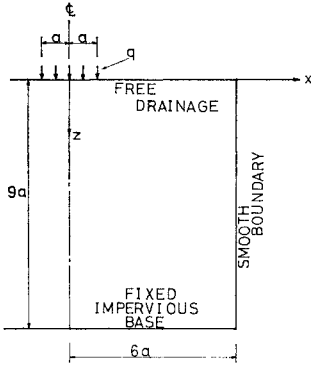


Fig. 16 Approximation of half-space foundation

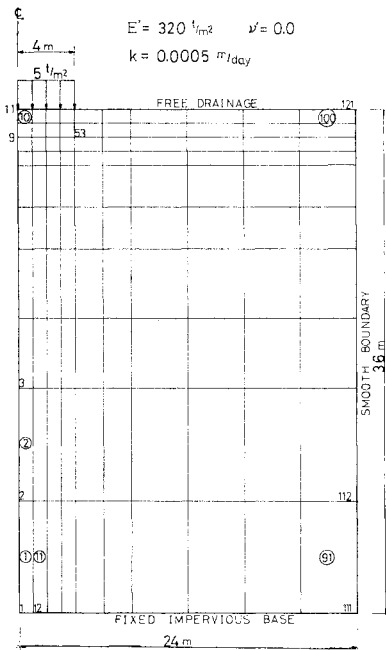


Fig. 17 Finite element idealization

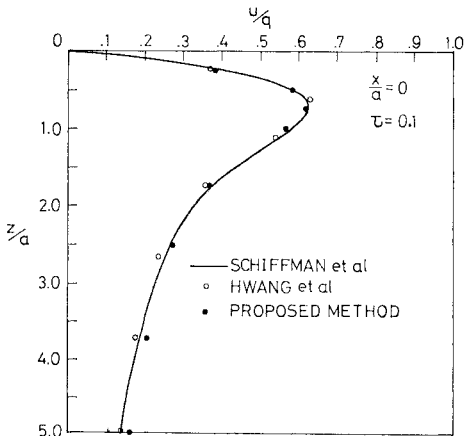


Fig. 18 Excess pore pressure profile

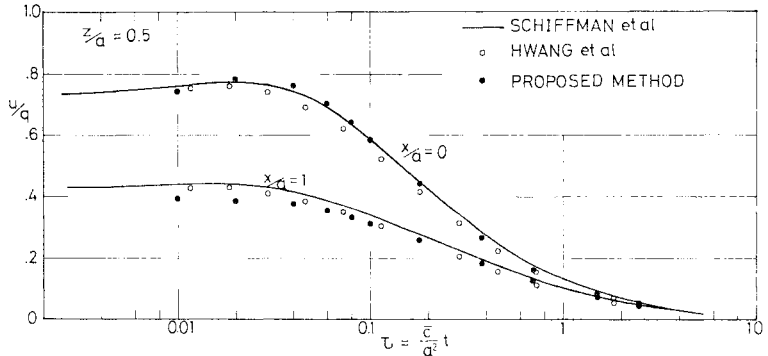


Fig. 19 Variation of excess pore pressure with time

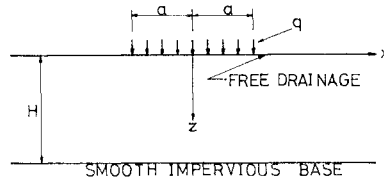


Fig. 20 Problem geometry

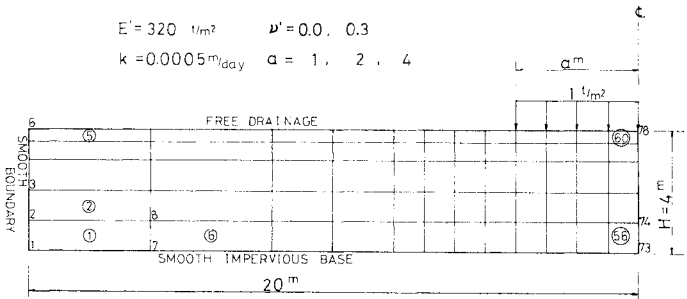


Fig. 21 Finite element idealization

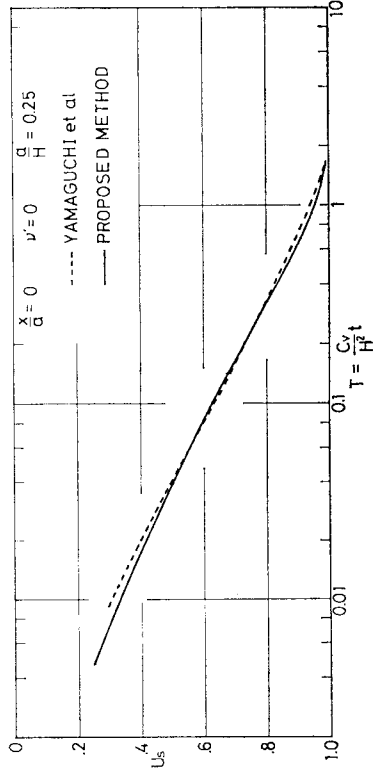
し得る方法を開發している。紙数の都合上その詳細は稿を改めて公表することにし、ここではこれ以上ふれないことにする。

さて、Hwang らは半無限地盤の圧密に関する Schiffman ら²⁹⁾の結果と比較すべく、Fig. 16 のような有限な領域および境界条件を用いて解析した。同じ問題を Fig. 17 に示す離散化のもとで解くことにする。物性値は図中に示した。

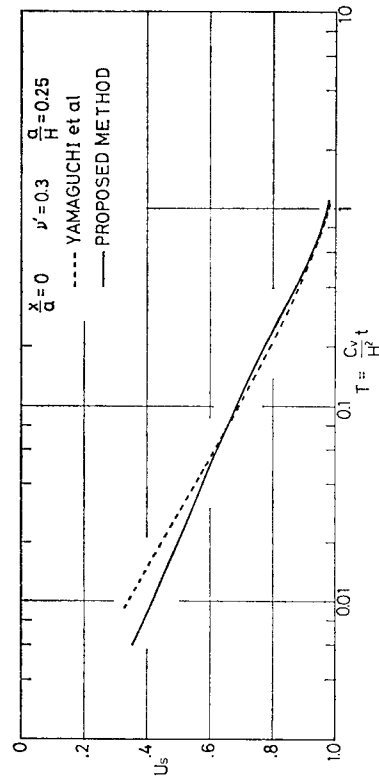
Fig. 18 は G をせん断弾性係数として $\bar{c} = 2Gk/\tau_w$ で定義される圧密係数 \bar{c} を用いて、 $\tau = \bar{c}t/a^2$ 、ここに t = 経過時間、 a = 載荷半幅で表される時間係数 τ が 0.1 のときの中心線上の間隙水圧分布を無次元化して示したものである。また、Fig. 19 には節点 9 および 53 の間隙水圧の経時変化を示した。この場合もかなり精度よい結果が得られている。

(4) 有限粘土層の理論解との比較

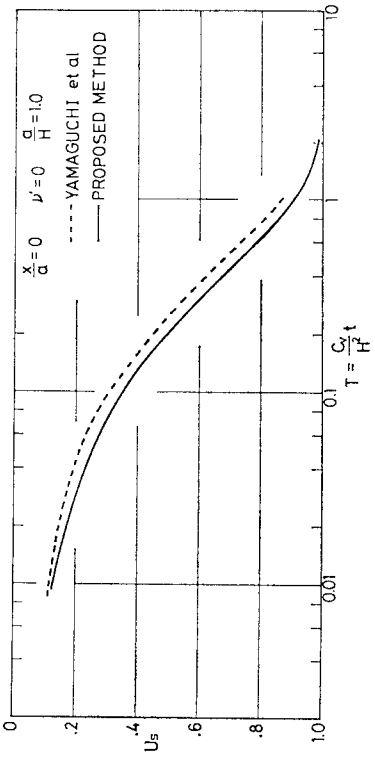
自然状態の粘土地盤は有限な深さで横方向に半無限に



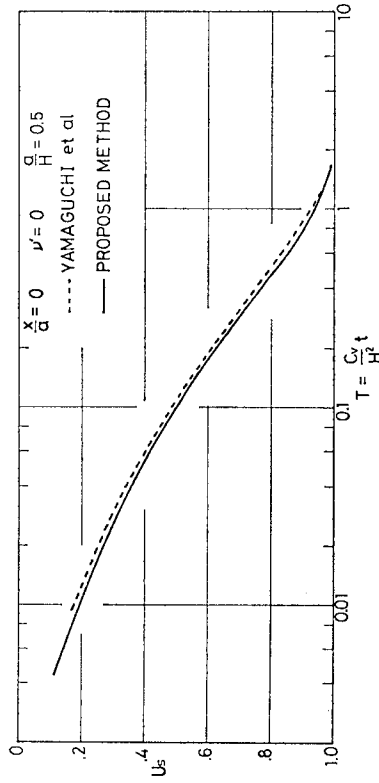
(c) $\nu' = 0.0, a/H = 0.25$



(d) $\nu' = 0.3, a/H = 0.25$



(a) $\nu' = 0.0, a/H = 1.0$



(b) $\nu' = 0.0, a/H = 0.5$

Fig. 22 Time factor vs. settlement curves

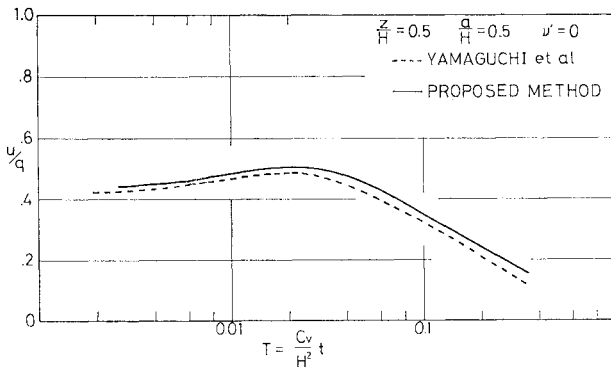


Fig. 23 Time history of excess pore water pressure

広がったものが普通である。ここではこのような地盤を対象とし、山口・村上の理論解^{26), 27)}と比較しよう。初めに Fig. 20 のような半無限領域を Fig. 21 に示す有限な領域に置き換える。そして載荷半幅 a および骨格の Poisson 比 ν を 2, 3 変化させた結果を呈示する。

まず Fig. 22 (a)~(d) は地表面の載荷重中心点における沈下度-時間係数曲線を、また Fig. 23 は $a=2.0$ m, $\nu=0.0$ で荷重中心直下深さ 2.0 m の間隙水圧の経時変化を表す。Fig. 22 から明らかなように、載荷幅が小さくなるにつれて数値解は理論解に漸近しており、いまの場合 $\nu=0$, $a/H \leq 0.5$ で両者はほぼ一致している。Christian ら²⁶⁾によれば、底面が粗で $a/H=1.0$ のとき側方境界を中心より $5H$ に設定すれば十分であるが、滑らかな場合はこの限りでない旨の指摘が見受けられる。Fig. 22 (a)~(c) はまさに Christian らの経験を裏づけるもので半無限地盤を離散化する際注意を要する点であろう。ただし、 $\nu=0.3$ では $a/H=0.25$ であるにもかかわらず圧密初期の沈下度がかなり大きくなっている。この原因は側方境界の位置に起因するものではなく、1次要素を用いたことによるものと考えている。これについても次節で少しふれる。また、Fig. 23 の間隙水圧の時間的推移もほぼ満足すべき結果とみてよからう。

5. 全般的な考察

以上理論解あるいは他の数値解と対比しつつつかの例解を示した。その結果、全体としては良好な精度が得られたわけであるが、必ずしも十分なものとはいえない。その典型を Fig. 14 に見出すことができよう。先にも述べたように、Fig. 14 の沈下度が圧密初期に Christian らに比してかなり大きい点が目立っている。このような誤差の原因が、無論本来的にこの解法に備わった欠陥や要素分割, time step のとり方等に起因する

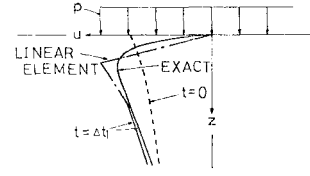


Fig. 24 Schematic pore water pressure distributions along vertical axis

面もあろうが注), 大部分は1次要素を用いたためと考えている。その定性的な理由を Fig. 24 を用いて説明しよう。

Fig. 24 は載荷面近傍の初期および最初の time step Δt_1 経過時の深さ方向の間隙水圧分布状況を示す模式図である。実線は Δt_1 時の厳密値、一点破線は本解析法による分布を意味する。1次要素による場合、間隙水圧は直線的な分布となる。さて、本解析法で Δt_1 時における変形を求める手順は、図の等時曲線で定まる動水勾配から浸透力を評価し、この物体力と有効載荷重による骨組の応力-変形解析を行うことであった。この間の状況を式 (1) にならって再記すれば以下のようなものである。

$$F_0 = p_0 + X_0, F_{\Delta t_1} = p_{\Delta t_1} + X_{\Delta t_1}, \dots \dots \dots (19)$$

ただし、 $p_0, p_{\Delta t_1}$ は初期 ($t=0$) および時刻 Δt_1 でこの系が受けている有効載荷重であり、載荷面が透水性であれば $p_{\Delta t_1}$ は載荷重に等しい。 $X_0, X_{\Delta t_1}$ は初期および時刻 Δt_1 の物体力、 $F_0, F_{\Delta t_1}$ は初期および時刻 Δt_1 で作用している全外荷重。したがって、 Δt_1 間にこの系が受けた外荷重増分 $\Delta F_{\Delta t_1}$ は次式となる。

$$\Delta F_{\Delta t_1} = F_{\Delta t_1} - F_0 = (p_{\Delta t_1} - p_0) + (X_{\Delta t_1} - X_0) \dots \dots \dots (20)$$

上式で p_0 は載荷面における荷重強度と初期間隙水圧の差で定められ一般に小さな値となる。たとえば、間隙水を非圧縮性とした1次元圧密ではこの値は零である。また、 $X_{\Delta t_1}$ は Fig. 24 の模式図の場合、厳密には実線への接線の傾きで与えられるべきものが、目下の1次要素では一点破線の勾配で計算される。そして載荷面が透水性であれば、そこでの境界条件として間隙水圧を零とするため、圧密初期にこの近傍の要素内で急激な間隙水圧の変化が生じる。しかるに1次要素では急激な変化に追随し得るほどの自由度をもたないことが $X_{\Delta t_1}$ に悪影響を及ぼし、変形を誤らせるものと解している。この事情は Fig. 22 (c) と (d) によっても裏づけされよう。すなわち他の条件が同じで Poisson 比が 0.0 から 0.3 に変わるのみで、後者の場合圧密初期の沈下度の精度が急激に悪化している。一般に Poisson 比が大きくなるに

注) Christian らの問題に対して、要素分割や time step のとり方を 2, 3 変化させて計算した結果は Fig. 14 と大差ないものであった。

従って載荷重の側方への影響が増大され、そのぶん載荷面近傍の要素内の変位や間隙水圧の性状も複雑となり、誤差の程度が大きくなると推察される。このような難点は間隙水圧や変位の表示に高次要素を用いることで解消できると考えられ、今後の課題としたい。同時に間隙水圧自身のずれも高次要素のもとでは回避できるものと期待している。

次に、この種の数値解の立場上精度とともにいま1つの関心事である演算時間 (CPU time) についてふれよう。前述したように本文中で提示した多次元圧密の解析例はいずれも1つの time step で2度繰り返し計算したものである。この time step 当り2度繰り返し計算するに要した CPU time は Fig. 11 の場合 FACOM M-190 (京大) で 0.49 sec, Fig. 17 の場合 FACOM M-190 で 1.51 sec, ACOS-800 (阪大) で 4.28 sec, Fig. 21 の場合 FACOM M-190 で 0.74 sec であった。ただし、連立方程式の解法はバンドマトリックス法を用い、Desai ら²⁹⁾によるプログラムを修正し利用した。さらにつけ加えるならば、骨組の線形弾性を仮定する限り、原理的には連立方程式の係数行列は一度計算しておくだけでよいのであるが、本文の例題はいずれも各 time step ごとに計算し直したものである。したがって、本解析法を非線形場へ拡張したとしても上記の CPU time はさほど増加するものでなく、実用上かなり有効な方法であるといえよう。

6. 結 言

多次元圧密の本質を損なわずかつ既往の数値解法に比べ相当に簡便な手法の開発を目的とした一定式化を示した。その骨子は圧密現象を構成する非定常浸透過程と骨組の変形性状を独立に解析し、その間を浸透力が受け渡しするものである。これにより、一見複雑な圧密なるものが、なんら目新しい理論を持ち込むことなく解析可能となった。元来、圧密現象は間隙水と骨組の連成作用であり、現在までに提案された数値解法はこの連成作用をいかに反映させるかに工夫が凝らされたものである。その結果、理論構成の複雑化、あるいは連立方程式の拡大化は不可避であった。このような困難は本手法による限りいずれも解消されたわけである。ただ、連成作用を避けて通る過程で、必然の帰結として、全応力の時間的変化項の取り扱い上問題点が指摘された。しかし、これも1つの time step で2度繰り返し計算するというきわめて単純な操作でほぼ回避できることが判明した。そしてすでに公表されている厳密解あるいは代表的な数値解法との比較により、いくぶん改良される余地は残るとしても、精度、演算時間の面ではほぼ満足すべき結果が得

られた。

本研究の目的は上述したように直接には従来の解法に比べより簡便な手法を開発することであった。このため構造骨格は線形弾性に限定して議論してきたのであるが、終極目的は無論非線形挙動を考慮する点にある。ことに築造過程にあるフィルタイプダムコアの圧密解析を念頭においている。今後この線に沿った研究へと進む予定である旨記して結びとしたい。

なお、本文中の数値計算は京都大学大型計算機センター FACOM M-190 および大阪大学大型計算機センター ACOS-800 を利用した。

謝 辞：著者の1人(山上)は、本論文のみならず研究の全般にわたって、京都大学教授 赤井浩一先生にご指導賜わっている。ここに記して厚く御礼申し上げます。また、本研究遂行中有意義な討議を通じて、多くの示唆を賜わった京都大学講師 田村 武博士、徳島大学堀田政國助手の各先生方に感謝の意を表します。なお、この研究は昭和52年度、53年度文部省科学研究費一般研究Cの補助を受けた研究の一環であることを付記し、関係各位に感謝します。

参 考 文 献

- 1) Christian, J.T. : Undrained Stress Distribution by Numerical Methods, Proc. ASCE., Vol. 94, SM 6, pp. 1333~1345, 1968.
- 2) Christian, J.T., and J.W. Boehmer : Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. ASCE., SM 4, pp. 1435~1457, 1970.
- 3) Sandhu, R.S. and E.L. Wilson : Finite-element Analysis of Seepage in Elastic Media, Proc. ASCE., EM 3, pp. 641~652, 1969.
- 4) 横尾義貫・山肩邦男・長岡弘明 : Finite Element Method Applied to Biot's Consolidation Theory, Soils and Foundations, Vol. 11, No. 1, pp. 29~46, 1971.
- 5) Hwang, C.T., N.R. Morgenstern and D.W. Murray : On Solutions of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Element Methods, Canadian Geotechnical Jour., Vol. 8, pp. 109~118, 1971.
- 6) 松本 喬 : Finite Element Analysis of Immediate and Consolidation Deformations based on Effective Stress Principle, Soils and Foundations, Vol. 16, No. 4, pp. 23~34, 1976.
- 7) Krause, G. : Finite Element Schemes for Porous Elastic Media, Proc. ASCE., EM 3, pp. 605~620, 1978.
- 8) Valliappan, S. and I.K. Lee : Consolidation of Non-Homogeneous Anisotropic Layered Soil Media, 2nd. Aust.-N.Z. Conf. Geome., pp. 67~71, 1975.
- 9) Ghaboussi, J. and E.L. Wilson : Flow of Compressible Fluid in Porous Elastic Media, Int. Jour. Nume. Meth. Eng., Vol. 5, pp. 419~442, 1973.
- 10) Lewis, R.W., G.K. Roberts and O.C. Zienkiewicz : A Non-Linear Flow and Deformation Analysis of Consolidated Problems, Proc. 2nd. Int. Conf. Nume. Meth. Geome., Vol. 2, pp. 1106~1118, 1976.
- 11) 赤井浩一・田村 武 : 多次元圧密問題に対する非線形応

- 力-ひずみ理論の適用, 京都大学防災研究所年報, 第 19 号 B-2, pp. 15~29, 1976.
- 12) 赤井浩一・田村 武：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 第 269 号, pp. 95~104, 1978.
- 13) Sandhu, R.S., H. Liu and K.J. Singh : Numerical Performance of Some Finite Element Schemes for Analysis of Seepage in Porous Elastic Media, Int. Jour. Num. Anal. Meth. Geome., Vol. 1, No. 2, pp. 177~194, 1977.
- 14) Gibson, R.E. and P. Lumb : Numerical Solution of Some Problems in the Consolidation of Clay, Proc. Instn. Civil Eng., 2, pp. 182~198, 1953.
- 15) Davis, E.H. and H.G. Poulos : Triaxial Testing and Three-Dimensional Settlement Analysis, Proc. 4th. Aust.-N.Z. Conf. Soil Mech., pp. 233~243, 1963.
- 16) 吉国 洋：間隙水圧を中心とした圧密論の再構成, 土木学会論文報告集, 第 212 号, pp. 41~50, 1973.
- 17) Zienkiewicz, O.C. and C.J. Parekh : Transient Field Problems : Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements, Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 2, pp. 61~71, 1970.
- 18) Eisenstein, Z., A.V.G. Krishnayya and S.T.C. Law : Analysis of Consolidation in Cores of Earth Dams, Proc. 2nd. Int. Conf. Num. Meth. Geome., Vol. 2, pp. 1089~1105, 1976.
- 19) Eisenstein, Z. and S.T.C. Law : Analysis of Consolidation Behavior of Mica Dam, Proc. ASCE., GT 8, pp. 879~895, 1977.
- 20) 前出 2) にみられる De Josselin de Jong らの解を意味する。
- 21) Herrmann, L.R. : Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem, A.I.A.A. Jour., Vol. 3, pp. 1896~1900, 1965.
- 22) Naylor, D.J. : Stresses in Nearly Incompressible Materials by Finite Elements with Application to the Calculation of Excess Pore Pressures, Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 443~460, 1974.
- 23) Hinton, E. and J.S. Campbell : Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method, Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 461~480, 1974.
- 24) Hinton, E., F.C. Scott and R.E. Ricketts : Local Least Squares Stress Smoothing for Parabolic Isoparametric Elements, Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 9, pp. 235~238, 1975.
- 25) Schiffman, R.L., A.T. Chen and J.C. Jordan : An Analysis of Consolidation Theories, Proc. ASCE., Vol. 95, SM 1, pp. 285~312, 1969.
- 26) 山口柏樹・村上幸利 : Plane Strain Consolidation of a Clay Layer with Finite Thickness, Soils and Foundations, Vol. 16, No. 3, pp. 67~79, 1976.
- 27) 山口柏樹・村上幸利 : Some Analytical Results of a Plane Strain Consolidation Problem of a Clay Layer with Finite Thickness, Soils and Foundations, Vol. 18, No. 1, pp. 98~104, 1978.
- 28) Christian, J.T., J.W. Boehmer and P.P. Martin : Consolidation of a Layer under a Strip Load, Proc. ASCE., SM 7, pp. 693~707, 1972.
- 29) C.S. デサイ・J.F. アーベル (山本善之訳) : マトリックス有限要素法, 科学技術出版社。

(1979. 2. 19・受付)