

## 安全性指標の信頼性解析への適用に関する2,3の考察

### SOME CONSIDERATIONS ON APPLICATION OF SAFETY INDEX TO RELIABILITY ANALYSIS

白石 成人\*・古田 均\*\*・中野 正則\*\*\*

By Naruhito SHIRAIKI, Hitoshi FURUTA and Masanori NAKANO

#### 1. まえがき

土木構造物の設計においては、経済性、安全性、使用性、美観等の諸項目を考慮すべきことは周知のとおりである。土木構造物における荷重条件の苛酷さ、構造形式の多様性、耐用年数の長さ等の特殊性およびその規模の大きさから生じる破壊時の社会的、経済的損失の大きさを考えると、安全性が特に重要視されなければならない。しかし、安全性の追求は経済性のそれと相対するものであり、また、安全性の評価そのものにも問題点が数多く指摘されるところである。たとえば、土木構造物では、材料強度および荷重のばらつき、あるいは設計計算における解析上の誤差、さらには施工上の誤差などの種々の不確定要因が存在し、それらの影響を定量的に把握して安全性の評価を行わねばならない<sup>1)</sup>。従来の許容応力度設計法では、これらの不確定要因の影響を安全率、設計荷重に含めることになる。また、最近の構造設計法では、許容応力度設計法から荷重係数設計法あるいはそれに等価な設計法への移行が行われ、荷重係数などにこの不確定要因の影響を反映させている。いずれにしても程度の差こそあれ、確率的な取り扱いを根底にしていると考えられる。しかし、より明確に構造物の安全性を把握するには、確定論的な安全性の尺度に代わる確率論的立場に立つ評価尺度が必要となる。

さてここで、安全性の評価尺度として具備すべき条件を考えると、定義が明解であり、計算が容易であり、しかも物理的な意味が明確であることなどがあげられる。こうした条件をある程度満たし、しかも確率論的な立場に立つ安全性の評価尺度としては、安全性指標(Safety Index)  $\beta$  があげられる。

この安全性指標は、C.A. Cornell<sup>2)</sup>により提唱され、確率変数の2次までのモーメントである平均値と分散により定義される。しかし、この Cornell の定義では、安全性指標のもつ物理的な意味が十分に明確とはい難く、また、破壊の定義の仕方により得られる安全性指標の値が異なるという、いわゆる invariance の問題が存在する。こうした欠点を補うために、A.M. Hasofer と N.C. Lind<sup>3)</sup> は C.A. Cornell の定義をもとに、安全性指標  $\beta$  を新たに定義し直した。彼らの定義を用いることにより、前述の問題点は完全ではないが、ほぼ解決されたといえる。

安全性指標はすでに述べたように評価尺度として必要な条件を満たすほかに、新しいデータの影響あるいは工学的判断をも導入することが容易であり、さらに設計への適用も比較的簡単であるという利点を有する反面、以下に示すような問題を未解決な面として残している。

- ① 安全性指標の統一的な定義が可能にならなくても、実際に計算に用いられるデータの個数の影響が十分に評価できていない。つまり、統計的不確定性の影響の導入の仕方に不明瞭なところがある。
- ② 破壊モード間の相関や、荷重の組合せなどの確率的な取り扱いを必要とする問題への適用が困難である。
- ③ 設計問題への適用方法あるいは設計方法との関連がまだ十分に確立されていない。

このうち、本論文では、統計的不確定性の影響と破壊モード間に相関が存在する場合の安全性指標の評価方法について検討を加える。まず、Cornell の定義に基づき、統計的不確定性の安全性指標への影響を、Fiducial 統計学を用いて数式のうえから検討を加え、1次近似の考え方を用いて安全性指標の平均値・分散を近似的に求めることを考える。次に、Hasofer, Lind による安全性指標を図式的に検討し、破壊点について考究する。さらに、彼らの考え方を拡張することにより、破壊モードが多く存

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科教室

\*\* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科教室

\*\*\* 正会員 工修 建設省(元・京都大学院生)

在する場合の取り扱い法を提案する。

## 2. 統計的不確定性の安全性指標への影響

構造物の安全性を評価する場合に考慮すべき確率変数としては、一般に抵抗  $R$ 、荷重  $S$  が考えられ、安全性を照査する式としては次式が用いられている。

$$Z = R - S \quad \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 $Z \geq 0$  は安全状態、 $Z < 0$  は破壊状態を表す。

C.A. Cornell<sup>2)</sup> は、式(1)を安全性の余裕 (Safety Margin) とよび、 $Z$  の平均値  $\mu_Z$ 、分散  $\sigma_Z^2$  を用いて、安全性の評価尺度として、安全性指標  $\beta$  を次のように定義した。

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $R$  と  $S$  が独立であると、

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad \dots \dots \dots (3)$$

式(2)、(3)で用いられる平均値  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  は、それぞれ母平均、母分散であり、これらは本来確率論的には数多くのデータより推定されるものであるが、土木構造物では、その特殊性から多くの情報を得ることはきわめて困難であり、数少ない情報からの母数推定が必要となる。このような状況下では、現場における試験や実験などから得られる少数の標本値が重要であるが、標本の数や性質などに関する統計的な不確定性を考慮に入れる必要があり、これに対処する有効な方法の 1つとして Fiducial 統計学の考え方がある。

Fiducial 統計学<sup>4),5)</sup> では、従来の古典的統計学とは異なり、標本統計量を固定値とみなし、母数を確率変数として取り扱っているため、データ数という統計的不確定性を考慮した場合の母数に関する確率密度関数が求められる。以下、確率変数  $X$  が正規分布  $N(\mu_X, \sigma_X^2)$  に従う場合を検討する。

確率変数  $X$  の確率密度関数  $f_X(x)$  は、

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

となる。ここでは、母数  $\mu_X$ 、 $\sigma_X$  は未知であるとする。

いま、この母集団から  $n$  個の独立な標本が得られたとすれば、このときの標本平均  $\bar{x}$ 、標本分散  $s_X^2$  は、互いに独立で、 $\bar{x}$  は正規分布  $N(\mu_X, \sigma_X^2/n)$ 、 $ns_X^2/\sigma_X^2$  はカイ<sup>2</sup>乗分布  $\chi^2(n-1)$  に従うことから、 $\bar{x}$ 、 $s_X$  の結合確率密度関数  $f_{\bar{x}, s_X}(\bar{x}, s_X)$  は次式のようになる。

$$f_{\bar{x}, s_X}(\bar{x}, s_X) = C \cdot \frac{1}{\sigma_X^2} \left(\frac{s_X}{\sigma_X}\right)^{n-2} \cdot \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_X^2} \{(\bar{x}-\mu_X)^2 + s_X^2\}\right] \quad \dots \dots \dots (5)$$

ただし、

$$C = \frac{n^{n/2}}{2^{(n/2)-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad \dots \dots \dots (6)$$

また、Fiducial 統計学では、母数  $\mu_X$ 、 $\sigma_X^2$  を確率変数とみなすので、 $d\bar{x}ds_X/s_X$  を  $d\mu_X d\sigma_X/\sigma_X$  で置換でき、式(5)は母数  $\mu_X$ 、 $\sigma_X$  に関する結合確率密度関数  $f_{M_X, \Sigma_X}(\mu_X, \sigma_X)$  に変換される。すなわち、

$$f_{M_X, \Sigma_X}(\mu_X, \sigma_X) = C \cdot \frac{1}{\sigma_X^2} \left(\frac{s_X}{\sigma_X}\right)^{n-1} \cdot \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_X^2} \{(\bar{x}-\mu_X)^2 + s_X^2\}\right] \quad \dots \dots \dots (7)$$

ここで、抵抗  $R$ 、荷重  $S$  が互いに独立で、それぞれ正規分布に従う場合、式(1)で示される安全性の余裕  $Z$  も正規分布に従うことになる。 $Z$  に対して式(7)を用いると、 $\mu_Z$ 、 $\sigma_Z$  の結合確率密度関数  $f_{M_Z, \Sigma_Z}(\mu_Z, \sigma_Z)$  は式(7)の  $X$  を  $Z$  に変えたものとなる。このとき、式(2)から安全性指標  $\beta$  も確率変数と考えられるので、 $(\mu_Z, \sigma_Z)$  から  $(\beta, \sigma_Z)$  への変数変換を行うと、

$$f_{\beta, \Sigma_Z}(\beta, \sigma_Z) = f_{M_Z, \Sigma_Z}(\mu_Z, \sigma_Z) \left| \frac{\partial(\mu_Z, \sigma_Z)}{\partial(\beta, \sigma_Z)} \right| = 2C \cdot \frac{1}{\sigma_Z} \left(\frac{s_Z}{\sigma_Z}\right)^{n-1} \cdot \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_Z^2} \{(\bar{x}-\beta\sigma_Z)^2 + s_Z^2\}\right] \quad \dots \dots \dots (8)$$

となる。この式より安全性指標  $\beta$  の確率密度関数  $f_\beta(\beta)$  は、式(8)を  $\sigma_Z$  について積分した周辺確率密度関数として求まる。

$$f_\beta(\beta) = 2C \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_Z} \left(\frac{s_Z}{\sigma_Z}\right)^{n-1} \cdot \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_Z^2} \{(\bar{x}-\beta\sigma_Z)^2 + s_Z^2\}\right] d\sigma_Z \quad \dots \dots \dots (9)$$

この式により、 $\beta$  についての平均値  $\mu_\beta$ 、分散  $\sigma_\beta^2$  が得られるが、式(9)は一般に解析的に求めることは困難で、数値積分をする必要がある。そこで、安全性指標  $\beta$  に対する統計的不確定性の影響を 1 次近似を用いて検討する。1 次近似を用いると、式(2)の  $\beta$  についての平均値  $E[\beta]$ 、分散  $\text{Var}[\beta]$  は次のようになる。

$$E[\beta] = E[\mu_Z]/E[\sigma_Z] \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$\text{Var}[\beta] = \frac{1}{E[\sigma_Z]^2} \text{Var}[\mu_Z] + \frac{E[\mu_Z]^2}{E[\sigma_Z]^4} \text{Var}[\sigma_Z] \quad \dots \dots \dots (11)$$

式(10)、(11)の  $\mu_Z$ 、 $\sigma_Z$  の平均、分散は次のようにして求められる。式(7)より  $\mu_X$ 、 $\sigma_X$  の確率密度関数はそれぞれの周辺確率密度関数として求まる。

$$f_{M_X}(\mu_X) = C_\mu \frac{1}{s_X} \left\{ 1 + \frac{(\bar{x}-\mu_X)^2}{s_X^2} \right\}^{-n/2} \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$f_{\Sigma_X}(\sigma_X) = C_a \frac{1}{s_X} \left( \frac{s_X}{\sigma_X} \right)^n \exp \left[ -\frac{n s_X^2}{2 \sigma_X^2} \right] \dots (13)$$

ただし、

$$C_a = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad C_a = \frac{n^{(n-1)/2}}{2^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

.....(14)

式 (12), (13) の変数  $X$  を  $Z$  に置き換えると、 $\mu_Z$ ,  $\sigma_Z$  の平均  $E[\cdot]$ , 分散  $\text{Var}[\cdot]$  は次のようになる。

$$E[\mu_Z] = \bar{z} \dots (15)$$

$$E[\sigma_Z] = s_Z \left( \frac{n}{2} \right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \dots (16)$$

$$\text{Var}[\mu_Z] = s_Z^2 / (n-3) \dots (17)$$

$$\text{Var}[\sigma_Z] = s_Z^2 \left[ \frac{3}{n-3} - \frac{n}{2} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right\}^2 \right] \dots (18)$$

式 (15)～(18) を式 (10), (11) に代入すれば、1 次近似による  $\beta$  の平均値および分散が求まる。

次に、以上の結果を用いて、統計的不確性の影響を安全性指標の決定に反映させることを考える。一般に、安全性指標は、得られたデータから母集団の平均値・分散を推定し、式 (3) を用いることにより計算される。ここでは、これを標本平均・標本分散を用いて求めた安全性指標  $\hat{\beta}$  と、通減係数  $r_\beta$  を用いて以下のように定義する。

$$\beta = r_\beta \cdot \hat{\beta} \dots (19)$$

ここで、 $\beta$  として  $E[\beta]$  をとると、 $r_\beta$  は式 (10), (15), (16) より、

$$r_\beta = \left( \frac{n}{2} \right)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \dots (20)$$

として求めることができる。

以上の式を簡単な例題に適用し、統計的不確定性の安全性指標への影響を検討する。いま、 $Z$  に関する標本統計量として、 $\bar{z}=800 \text{ kg/cm}^2$ ,  $s_Z=210 \text{ kg/cm}^2$  が得られたとする。このとき、式 (9) を用いて求めた安全性指標の確率密度関数  $f_\beta(\beta)$  が図-1 に示されている。また、表-1 には、この確率密度関数および 1 次近似より求めた  $\beta$  の平均値・標準偏差が示されている。これらより、データ数  $n$  が小さい場合には、統計的不確定性が大きく、安全性指標  $\beta$  を小さく見積らなければならないことがわかる。データの増加に従い標準偏差  $\sigma_\beta$  が小さくなり、 $\beta$  の信頼度が高まり  $n=70$  あたりから収束する傾向がみられる。1 次近似は平均値・分散に対して若干小さめの値を与えており、平均値についてはかなりの

表-1 安全性指標の平均値および標準偏差

| CASE | $n$ | $\mu_\beta$ | $\sigma_\beta$ | $E[\beta]$ | $\sqrt{\text{Var}[\beta]}$ |
|------|-----|-------------|----------------|------------|----------------------------|
| 1    | 10  | 3.58703     | 1.021110       | 3.303      | 0.955                      |
| 2    | 20  | 3.66991     | 0.789444       | 3.564      | 0.656                      |
| 3    | 30  | 3.71389     | 0.652419       | 3.648      | 0.532                      |
| 4    | 40  | 3.73767     | 0.566206       | 3.689      | 0.459                      |
| 5    | 50  | 3.75208     | 0.506784       | 3.713      | 0.410                      |
| 6    | 60  | 3.76170     | 0.462813       | 3.729      | 0.373                      |
| 7    | 70  | 3.76853     | 0.428600       | 3.741      | 0.345                      |
| 8    | 80  | 3.77367     | 0.401005       | 3.750      | 0.323                      |

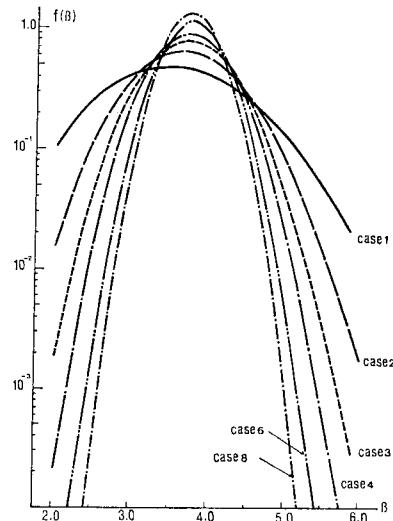


図-1 安全性指標  $\beta$  の確率密度関数

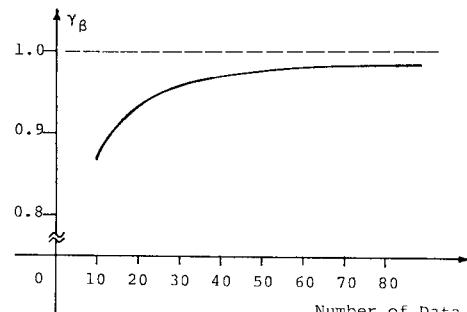


図-2 通減係数とデータ数との関係

一致がみられる。以上のことから、統計的不確定性の影響を考慮して  $\beta$  の値を決定するには、1 次近似による  $\beta$  の平均値  $E[\beta]$  に注目をし、通減係数  $r_\beta$  を標本平均・標本分散を用いて求めた安全性指標の値に乘じれば十分であると思われる（図-2 に通減係数  $r_\beta$  とデータの個数との関係を示す）。

### 3. 多数の破壊モードが存在する場合の安全性指標の求め方

前節の議論では、1 つの破壊形式 (performance func-

tion  $Z$  で定義される)に注目をし、その破壊モードに対する安全性評価を行っていた。しかし、構造系全体をみると、構造物の破壊は唯一でなく、種々の形式で生じる可能性をもっている。つまり、不静定構造物であるならば、多くの崩壊機構・破壊経路のうちのあるもので破壊が生じる。また、破壊として座屈現象を考えると、局部・全体座屈あるいは面内・面外座屈等の種々の現象に対して安全性を考えなくてはならない。

このような多くの破壊モードが存在する場合の安全性評価法については、これまでにも多くの研究がなされている<sup>6)</sup>。しかし、その大半は破壊確率  $p_f$  を用いたもので、安全性指標を用いた研究としては、各破壊モードに対する安全性指標で最小のものを全体の安全性指標と考える方法<sup>3)</sup>や、各破壊モードに相対的な重みを考慮する方法<sup>7)</sup>などがあげられるのみである。ところで、この問題の特徴は、各破壊モードを構成する抵抗  $R$  や荷重  $S$ などの変数は独立であっても、破壊モード間には一般に相関が存在することである。

ここでいう破壊モード間の相関とは、2つの破壊モードが performance function  $Z_i, Z_j$  で表されたとき、それらを構成する基礎変数に共通のものが含まれることにより、 $Z_i, Z_j$  の間に統計的になんらかの従属性が存在することを意味している。ここでは、 $Z_i$  と  $Z_j$  が統計的に完全に独立、完全に従属、部分的に従属であるということを以下のように定義する<sup>8)</sup>。

|  |   |
|--|---|
| 完全独立 : $Z_i$ と $Z_j$ において共通な変数を有さない            | { |
| 完全従属 : $Z_i$ と $Z_j$ においてすべての変数が共通であり、その係数も等しい |   |
| 部分的に従属 : $Z_i$ と $Z_j$ においていくつかの共通な変数が存在する     |   |

performance function が1次式で表される簡単な場合を用いて、上記の関係を説明する。

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= C_{11}X_1 + C_{12}X_2 \\ Z_2 &= C_{21}X_1 + C_{22}X_2 \\ Z_3 &= C_{33}X_3 + C_{34}X_4 \\ Z_4 &= C_{42}X_2 + C_{43}X_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (21)$$

ここで、 $C_{ij}$  は定数、 $X_i$  は独立な変数

前述の定義によると、 $Z_1$  と  $Z_3$ 、 $Z_2$  と  $Z_4$  は共通な変数をもたず完全独立である。また、 $Z_1$  と  $Z_2$  は  $X_1, X_2$  という共通の変数より成り立っているので、 $C_{11}/C_{21}=C_{12}/C_{22}$  のとき完全従属である。 $Z_4$  は  $Z_1, Z_2, Z_3$  と共通な変数を有しているので、部分的に従属関係にあるといえる。これらの破壊モード間の従属の度合を相関という言葉で表し、その大きさを相関係数  $\rho$  により規定する。式(21)において、 $Z_i$  と  $Z_j$  の相関係数  $\rho_{ij}$  は  $Z_i, Z_j$  の標準偏差  $\sigma_{Z_i}, \sigma_{Z_j}$  と共に分散  $\sigma_{Z_i Z_j}$  により以下のように求

められる。

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{Z_i Z_j}}{\sigma_{Z_i} \cdot \sigma_{Z_j}} \quad \dots \quad (22)$$

一般に相関係数の値は、 $-1 \leq \rho \leq 1$  の範囲にあるが、破壊モード間の相関を考える場合、負の相関は意味がないと思われる。

本論文では、Hasofer, Lind により提案された標準化空間の性質を探すことにより、各破壊モード間の相関が考慮できる手法を見出すことを試みる。

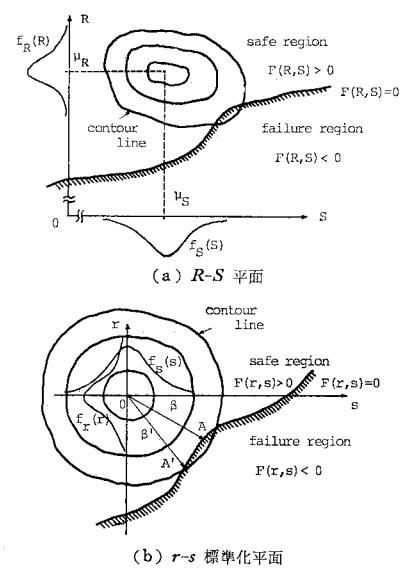
Hasofer と Lind<sup>3)</sup> は安全性指標を以下のように定義した。「標準化変換を行った基本変数が作る空間において、原点から破壊領域までの最短距離が安全性指標  $\beta$  を表す」

いま、独立な確率変数  $X$  に対して、

$$x = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad \dots \quad (23)$$

なる標準化変換を行った後の変数  $x$  を基本変数とする。このような  $x$  が作る空間では、原点を中心とした変数の分布状態に対して方向性がなくなるので、全領域についての安全性の照査が可能になる。

いま確率変数として抵抗  $R$ 、荷重  $S$  を考えると、標準化変換により、図-3(a) に示す安全状態、破壊状態を表す領域の境界線(以後は破壊線とよぶ)  $F(R, S) = 0$  が、図-3(b) の  $F(r, s) = 0$  に変化する。ここで、Hasofer と Lind の定義を用いると、図-3(b) の原点から破壊線までの最短距離 OA が安全性指標  $\beta$  を表すことになる。ここで、破壊線上の点 A を破壊点とよぶと、この点は  $(r, s)$  平面上では確率的に最も破壊しやすい点であると考えられる。したがって、安全性指標  $\beta$  は破壊領域内の最も安全性の低い点に注目し、他の破壊



(b)  $r-s$  標準化平面

図-3 破壊点の定義

領域内の点は考慮していないという意味からは、確定的な安全性の評価尺度といえよう。

次に、この標準化空間において、2つの破壊モード  $Z_1, Z_2$  が存在する場合を考える。このときの標準化空間は図-4 のようになるが、破壊

モードが1つの場合と比較して、新たにこの空間内に現れるものを以下にあげる。

#### a) 破壊線 $Z_1=0, Z_2=0$ の交角 $\theta$

付録1に示すように、標準化された  $(r, s)$  平面の破壊線の交角  $\theta$  は、その余弦  $\cos \theta$  が破壊モード間の相関係数  $\rho$  を表す。なお、この交角  $\theta$  は、2つの破壊モードの破壊点を図-4 のようにそれぞれ  $A_1, A_2$  とするとき、それぞれの破壊モードの安全性指標を表すベクトル  $\beta_1 = \overrightarrow{OA_1}, \beta_2 = \overrightarrow{OA_2}$  のなす角となる。

#### b) 同時破壊領域(図-4の斜線部分)

2つの破壊モード  $Z_1, Z_2$  による破壊が確率的に同時に生じる可能性を表す領域を、同時破壊領域とよぶことにすれば、同時破壊確率  $p_{f_{1,2}}$  は次のように表せる。

$$p_{f_{1,2}} = P_r[(Z_1 < 0) \cap (Z_2 < 0)] \quad (24)$$

ここで、 $P_r[\cdot]$  は確率を表し、 $\cap$  は積集合を表す。

#### c) 破壊線の交点C

交点Cが同時破壊領域内で最も原点に近い場合、同時破壊事象に対する安全性を評価するのに有用な情報を与える。

以上のように、3つの特性が新たに規定されるが、本論文では、同時破壊領域内で最も原点に近い点を破壊点と規定し、その距離をもって同時破壊事象に対する安全性の指標と考える。この破壊点と原点との距離という考え方方は、Hasofer と Lind の考え方を2つの破壊モードが存在する場合に拡張したものと考えられる。

いま、破壊点までの距離を  $\bar{\beta}_{1,2}$  と表すと、これは式(24)の  $p_{f_{1,2}}$  に対応すると考えられる。また、全体の破壊確率  $\tilde{p}_f$  は、

$$\begin{aligned} p_{f_{1,2}} &= P_r[(Z_1 < 0) \cup (Z_2 < 0)] \\ &= P_r[Z_1 < 0] + P_r[Z_2 < 0] \\ &\quad - P_r[(Z_1 < 0) \cap (Z_2 < 0)] \end{aligned} \quad (25)$$

$$= p_{f_1} + p_{f_2} - p_{f_{1,2}},$$

となる。ただし、 $\cup$  は和集合を表す。ここで、抵抗  $R$ 、荷重  $S$  が正規分布に従うと仮定すれば、安全性指標  $\beta$  と破壊確率  $p_f$  との間に次式が成立立つ<sup>9)</sup>。

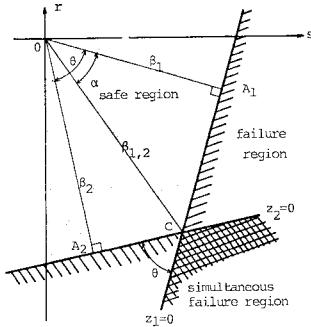


図-4 2つの破壊モードをもつ標準化空間

$$1 - p_f = \Phi(\beta) \quad (26)$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$  は標準正規確率分布関数

これを式(25)に用いると、全体の安全性指標  $\beta_{1,2}$  は、

$$\beta_{1,2} = \Phi^{-1}\{\Phi(\beta_1) + \Phi(\beta_2) - \Phi(\beta_{1,2})\} \quad (27)$$

と表せる。

ここで、同時破壊に対する安全性指標  $\beta_{1,2}$  を、破壊点までの距離として、各破壊モードに対する安全性指標  $\beta_1, \beta_2$  および、破壊モード間の相関係数  $\rho (= \cos \theta)$  を用いて求めることを考える。図-4より、原点Oから交点Cまでの距離  $\bar{\beta}_{1,2}$  と  $\beta_1, \beta_2$  との間には、次の関係が存在することがわかる(ここで、 $\beta_1 < \beta_2$  と仮定している)。

$$\bar{\beta}_{1,2} \cos \alpha = \beta_1 \quad (28)$$

$$\bar{\beta}_{1,2} \cos(\theta - \alpha) = \beta_2 \quad (29)$$

両式より  $\alpha$  を消去すると、 $\bar{\beta}_{1,2}$  は、

$$\bar{\beta}_{1,2} = \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\rho\beta_1\beta_2}{1-\rho^2}} \quad (30)$$

となる。次に、交点Cが原点に最も近い点となる条件について考える。図-4からも明らかなように、 $\theta - \alpha \geq 0$  が成立するとき、交点Cは同時破壊領域内で最も原点に近い点すなわち破壊点となる。いま、この条件を  $\sin(\theta - \alpha) \geq 0$  で表すと、交点Cが破壊点となる条件が以下のように求められる。

$$\bar{\beta}_{1,2} \leq \beta_1/\rho \quad (31)$$

また、 $\theta - \alpha < 0$  すなわち  $\bar{\beta}_{1,2} > \beta_1/\rho$  のときは、原点に最も近い点は  $A_2$  となり、破壊点までの距離は  $\beta_2$  となる。以上の結果をまとめると、 $\beta_{1,2}$  は次式で求められる。

$$\bar{\beta}_{1,2} = \begin{cases} \bar{\beta}_{1,2} & (\bar{\beta}_{1,2} \leq \beta_1/\rho) \\ \beta_2 & (\bar{\beta}_{1,2} > \beta_1/\rho) \end{cases} \quad (32)$$

上式を式(27)に代入することにより、全体の安全性指標  $\beta_{1,2}$  が求まる。

ところで、多数の破壊モードが存在する場合の全体の破壊確率  $\tilde{p}_f$  を与える式として、E.H. Vanmarcke<sup>10)</sup> は次式を提案している。

$$\tilde{p}_f = p_{f_1} + a_{21}p_{f_2}, \quad (33)$$

ただし、

$$a_{21} \approx 1 - \frac{g(\text{Max}\{\beta_1/\rho, \beta_2\})}{g(\beta_2)} \quad (34)$$

$g(\cdot)$  は安全性指標  $\beta$  と破壊確率  $p_f$  を関係づける関数である。ここでは、正規分布を仮定しているので、全体の安全性指標  $\beta_{1,2}$  が次式で求まる。

$$\beta_{1,2} = \Phi^{-1}(\Phi(\beta_1) + \Phi(\beta_2) - \Phi(\text{Max}\{\beta_1/\rho, \beta_2\})) \quad (35)$$

式(27), (35)は類似した式であるが、その相違は2つのモードの同時破壊に対する安全性の尺度の選び方にあり。すなわち、Vanmarcke の方法では、 $\text{Max}\{\beta_1/\rho, \beta_2\}$  をとり、本方法では、式(32)の  $\beta_{1,2}$  をとる。この

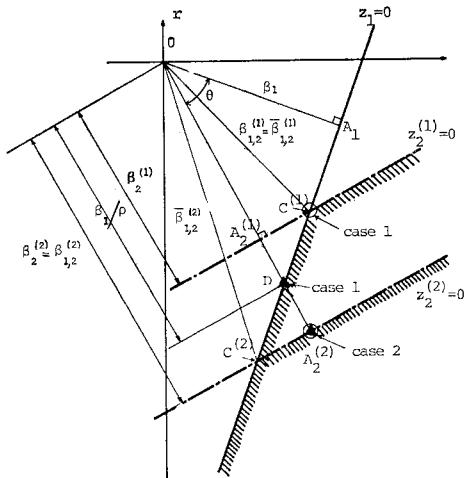


図-5 本方法と Vanmarcke の方法との比較

相違を図で示したのが 図-5 である。ここでは、本方法と Vanmarcke の方法の違いを明らかにするために、 $Z_1=0$  の破壊線は固定し、 $Z_2=0$  として  $Z_2^{(1)}=0$ ,  $Z_2^{(2)}=0$  の 2 つの場合を考える。 $Z_2^{(1)}=0$ ,  $Z_2^{(2)}=0$  の破壊線の傾きは両者とも同じ、つまり  $\theta = \cos^{-1}\rho$  は一定であり、各破壊線に対する安全性指標の間には  $\beta_2^{(1)} < \beta_1/\rho < \beta_2^{(2)}$  の関係が成り立つと仮定する。このとき、 $A_1$ ,  $A_2^{(1)}$ ,  $A_2^{(2)}$  は、 $Z_1$ ,  $Z_2^{(1)}$ ,  $Z_2^{(2)}$  の破壊点であり、 $\beta_1$ ,  $\beta_2^{(1)}$ ,  $\beta_2^{(2)}$  は、それぞれの安全性指標を表している。また、 $C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$  は  $Z_1=0$  と  $Z_2^{(1)}=0$ ,  $Z_2^{(2)}=0$  の交点である。まず、この図より  $\beta_1/\rho$  は  $\overline{OD}$  すなわち  $Z_1=0$  と原点より  $Z_2^{(1)}=0$  ( $Z_2^{(2)}=0$ ) に下した垂線との交点までの原点からの距離を表していることがわかる。さてここで、式 (27), (35) に従うと、本方法と Vanmarcke の方法の同時破壊に対する安全性を表す点は、図中の  $\circ$ ,  $\blacktriangle$  で表した点となる。 $Z_2^{(2)}=0$  を破壊線として選んだ場合、この点は両者とも  $A_2^{(2)}$  点と同じとなり、同時破壊に対する安全性指標  $\beta_{1,2}^{(2)}$  は  $\beta_2^{(2)}$  となる。しかし、 $Z_2^{(1)}=0$  を選んだ場合、本方法では  $C^{(1)}$  点、Vanmarcke の方法では  $D$  点となり、同時破壊に対する安全性指標はそれぞれ、 $\beta_{1,2}^{(1)} = \beta_{1,2}^{(1)}$ ,  $\beta_{1,2}^{(1)} = \beta_1/\rho$  となる。

以上のことから、本方法は Vanmarcke の方法に比べて、 $\beta_1$ ,  $\beta_2$  に大きな差がない場合は、 $\beta_{12}$  に小さな値を与える、差が大きいときは Vanmarcke の方法と同じ値を与えることがわかる。つまり、Vanmarcke の方法は本方法より  $\beta_{12}$  としては安全側の値を与えるが、同時破壊に対しては過少評価をしていることになる。しかし、両方法とも 1 つの代表的な点に注目し、同時破壊領域を近似的に評価しようとしている点では同じである。なお破壊モードが 3 個以上の場合の取り扱い方は次節の適用例で示す。

#### 4. 適用例

### (1) ラーメン構造物の例題

塑性ヒンジの形成により生じる崩壊機構を破壊と考えると、一般にラーメン構造物は非常に多くの破壊モードをもつ。しかも、そのうちのいくつかは同程度で生じる可能性をもっており、各崩壊機構間にはかなりの相関がみられる。ここでは、図-6に示す簡単なラーメンモデルを用いて、破壊モード間の相関あるいはそれを構成する変数間の独立性・従属性について考察を加え、前節で示した多数の破壊モードが存在する場合の安全性指標を求める手法について検討する。

いま、荷重として鉛直荷重  $P$ 、水平荷重  $H$  を考えると、図-6 に示す 8 個の崩壊機構（破壊モード）が代表的なものとしてあげられる。ここで、はり・柱の全塑性モーメント  $M_B$ 、 $M_C$  および荷重間に従属性・独立性を仮定することにより、この問題は 2 変数、3 変数、4 変数の独立変数よりなる問題として扱うことができる。

### a) 2 変数の場合

$M_B$ ,  $M_C$  および  $P$ ,  $H$  が完全従属関係にあり、 $M_C = M_B$ ,  $H = P/2$  と表されると考えると、図-6 で示した 8 個のモードは、以下に示した 3 つの performance function にまとめられる。

$$\left. \begin{array}{l} Z_1, Z_2, Z_3 \rightarrow Z_1=4 M_B - 75 P \\ Z_4, Z_5, Z_6 \rightarrow Z_4=4 M_B - 50 P \\ Z_7, Z_8 \rightarrow Z_7=6 M_B - 125 P \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (36)$$

ここで、各モード間の相関係数を求める

$$\rho_{14}=0.9811, \quad \rho_{12}=0.9986, \quad \rho_{42}=0.9694$$

(ただし,  $\mu_{M_B}=40$ ,  $\sigma_{M_B}=4$ ,  $\mu_P=1$ ,  $\sigma_P=0.2$ )  
とかなりの従属性をもつことがわかる. また,  $Z_1$ ,  $Z_4$ ,  $Z_7$  に対する安全性指標および破壊点の座標は,

$$\beta_1 \equiv 3.876, \quad \beta_2 \equiv 5.829, \quad \beta_3 \equiv 3.318$$

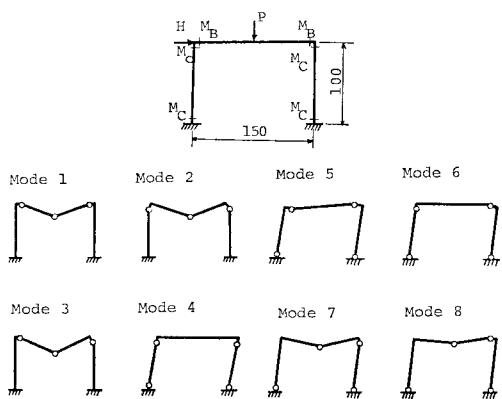


図-6 一層ラーメンの破壊モード

$$\vec{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} -2.827 \\ 2.651 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\beta}_4 = \begin{Bmatrix} -4.944 \\ 3.090 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\beta}_7 = \begin{Bmatrix} -2.298 \\ 2.394 \end{Bmatrix}$$

これらの関係を図-7に示す。図からも明らかなように、この問題では各モード間に従属性が高いため、ほとんど同時破壊による影響は考慮する必要がないと思われる。

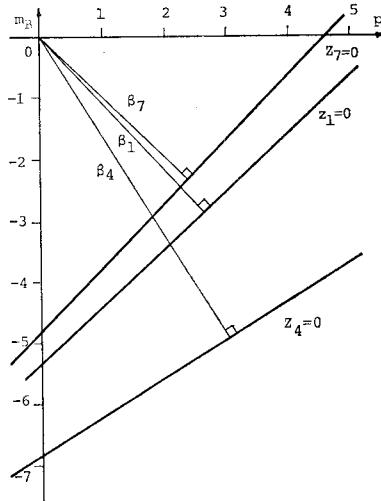


図-7 2変数問題の破壊領域

表-2 3変数問題の計算結果

a) performance function ( $Z_1 \sim Z_8$ )  
 $Z_1 = 4 M_B - 75 P, \quad Z_8 = 2 M_B + 2 M_C - 50 P$   
 $Z_2 = 2 M_B + 2 M_C - 75 P, \quad Z_6 = M_B + 3 M_C - 50 P$   
 $Z_3 = 3 M_B + M_C - 75 P, \quad Z_7 = 2 M_B + 4 M_C - 125 P$   
 $Z_4 = 4 M_C - 50 P, \quad Z_5 = 4 M_B + 2 M_C - 125 P$

## b) 相関係数行列

|       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$ | $Z_7$ | $Z_8$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Z_1$ | 1     | 0.857 | 0.969 | 0.362 | 0.840 | 0.605 | 0.746 | 0.936 |
| $Z_2$ |       | 1     | 0.958 | 0.784 | 0.980 | 0.918 | 0.982 | 0.982 |
| $Z_3$ |       |       | 1     | 0.578 | 0.938 | 0.778 | 0.887 | 0.993 |
| $Z_4$ |       |       |       | 1     | 0.800 | 0.960 | 0.872 | 0.652 |
| $Z_5$ |       |       |       |       | 1     | 0.937 | 0.952 | 0.952 |
| $Z_6$ |       |       |       |       |       | 1     | 0.957 | 0.827 |
| $Z_7$ |       |       |       |       |       |       | 1     | 0.932 |
| $Z_8$ |       |       |       |       |       |       |       | 1     |

$$R; \begin{cases} \mu_{M_B} = \mu_{M_C} = 40 \\ \sigma_{M_B} = \sigma_{M_C} = 4 \end{cases} S; \begin{cases} \mu_P = 1 \\ \sigma_P = 0.2 \end{cases}$$

## c) 各破壊モードの安全性指標

| mode | $\vec{\beta}_i$ |        |       |           | $\beta_i$ |
|------|-----------------|--------|-------|-----------|-----------|
|      | $m_B$           | $m_C$  | $p$   | $\beta_i$ |           |
| 1    | -2.827          | 0      | 2.651 | 3.876     |           |
| 2    | -1.926          | -1.926 | 3.612 | 4.524     |           |
| 3    | -2.649          | -0.883 | 3.312 | 4.332     |           |
| 4    | 0               | -4.944 | 3.090 | 5.830     |           |
| 5    | -3.860          | -3.860 | 4.825 | 7.286     |           |
| 6    | -1.692          | -5.077 | 4.231 | 6.822     |           |
| 7    | -0.974          | -1.947 | 3.042 | 3.741     |           |
| 8    | -1.947          | -0.974 | 3.042 | 3.741     |           |

## b) 3変数の場合

次に、全塑性モーメント  $M_B, M_C$  は独立で、荷重が従属の場合を考える。このときの各モードに対する performance function, 安全性指標およびモード間の相関係数を表-2に示す。ここで、これらの値を用いて、相関係数が破壊点を示す位置ベクトル  $\vec{\beta}_i$  と安全性指標  $\beta_i$  により求まるることを確かめてみよう。 $Z_1$  と  $Z_8$  に注目すると、破壊線の交角  $\theta$  の余弦は以下のように求められる。

$$\cos \theta = \frac{(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_8)}{|\vec{\beta}_1| \cdot |\vec{\beta}_8|} = \frac{-2.827 \times (-1.947) + 2.651 \times 3.042}{3.876 \times 3.741} = 0.936$$

これは  $\rho_{18} (=0.936)$  と一致する。ただし、 $(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_8)$  は内積を表し、 $|\vec{\beta}_1| = \beta_1, |\vec{\beta}_8| = \beta_8$  である。

次に、前節で提案した手法を用いて、安全性指標に及ぼす同時破壊の影響を検討する。この場合、8個の破壊モードが存在するので、全体の安全性指標  $\beta_{12}$  は参考文献 11) に示された全体としての破壊確率を求める式を変形した次式を用いて求める。

$$\beta_{12} = \phi^{-1} \left[ \sum_{i=1}^8 \phi(\beta_i) - \sum_{i=1}^7 \phi \left( \max_{j=2}^8 \{\beta_{i,j}\} \right) \right] \dots (37)$$

ここで、 $\beta_{i,j}$  を式 (32) から算定すると、 $\beta_{12}$  は 3.628 となり、 $\beta_1 \sim \beta_8$  で最も小さい  $\beta_7, \beta_8$  の値に比べ約 3%

表-3 4変数問題の計算結果

a) performance function ( $Z_1 \sim Z_8$ )

$$\begin{aligned} Z_1 &= 4 M_B - 75 P, & Z_8 &= 2 M_B + 2 M_C - 100 H \\ Z_2 &= 2 M_B + 2 M_C - 75 P, & Z_6 &= M_B + 3 M_C - 100 H \\ Z_3 &= 3 M_B + M_C - 75 P, & Z_7 &= 2 M_B + 4 M_C - 100 H \\ Z_4 &= 4 M_C - 50 P, & Z_5 &= 4 M_B + 2 M_C - 100 H \end{aligned}$$

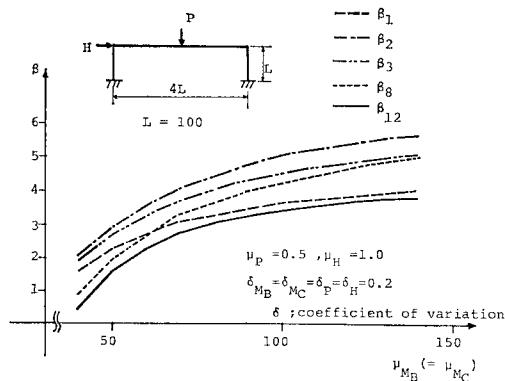
## b) 相関係数行列

|       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$ | $Z_7$ | $Z_8$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Z_1$ | 1     | 0.857 | 0.969 | 0     | 0.367 | 0.181 | 0.634 | 0.864 |
| $Z_2$ |       | 1     | 0.958 | 0.361 | 0.451 | 0.423 | 0.874 | 0.874 |
| $Z_3$ |       |       | 1     | 0.173 | 0.432 | 0.304 | 0.773 | 0.901 |
| $Z_4$ |       |       |       | 1     | 0.800 | 0.960 | 0.742 | 0.476 |
| $Z_5$ |       |       |       |       | 1     | 0.937 | 0.761 | 0.761 |
| $Z_6$ |       |       |       |       |       | 1     | 0.791 | 0.635 |
| $Z_7$ |       |       |       |       |       |       | 1     | 0.901 |
| $Z_8$ |       |       |       |       |       |       |       | 1     |

$$R; \begin{cases} \mu_{M_B} = \mu_{M_C} = 40 \\ \sigma_{M_B} = \sigma_{M_C} = 4 \end{cases} S; \begin{cases} \mu_P = 1 \\ \sigma_P = 0.2 \end{cases}$$

## c) 各破壊モードの安全性指標

| mode | $\vec{\beta}_i$ |        |       |       | $\beta_i$ |
|------|-----------------|--------|-------|-------|-----------|
|      | $m_B$           | $m_C$  | $p$   | $h$   |           |
| 1    | -2.827          | 0      | 2.651 | 0     | 3.876     |
| 2    | -1.926          | -1.926 | 3.612 | 0     | 4.524     |
| 3    | -2.649          | -0.883 | 3.312 | 0     | 4.332     |
| 4    | 0               | -4.944 | 3.090 | 3.090 | 5.830     |
| 5    | -3.860          | -3.860 | 4.825 | 0     | 4.825     |
| 6    | -1.692          | -5.077 | 4.231 | 0     | 4.231     |
| 7    | -0.974          | -1.947 | 3.042 | 2.674 | 1.783     |
| 8    | -1.947          | -0.974 | 3.042 | 2.674 | 1.783     |

図-8 安全性指標  $\beta_{12}$  の変化

小さくなっている。

### c) 4 変数の場合

さらに、荷重  $P, H$  も独立であると仮定すると、performance function、安全性指標、相関係数は表-3 のようになる。さて、ここで変数  $M_B, M_C, P, H$  間の独立性の安全性指標への影響を考える。2変数の場合、 $Z_7$  の安全性指標  $\beta_7$  は 3.318 であったものが、3変数・4変数と独立性が上がるにつれ、3.741, 4.528 と次第に大きくなっている。さらに、4変数の場合は  $Z_7$  は最も危険なモードではなく、 $Z_1$  が最も危険なモードとなっている。この最も危険なモード（最小の  $\beta_i$  をもつモード）が変化するという現象は、全塑性モーメントの平均値を変化させた場合にもみられる。図-8 に  $M_B$  の平均値を変化させた場合の安全性指標の変化を示す。 $\beta_{12}$  の値は、 $M_B$  の値が増加するにつれてその差は小さくなるものの、最も小さな安全性指標の値よりも小さくなってしまっており、構造物の安全性を評価するには、破壊モード間の相関の影響を考慮することが必要であると思われる。

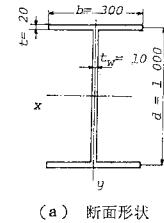
## (2) はりの座屈問題の例題<sup>12)</sup>

前の例では、塑性ヒンジの発生による崩壊機構を破壊モードと考えたが、ここでは破壊モードとして破壊様式の異なるものを考える。その簡単な例として、単純はりの座屈問題を取り上げる。座屈には種々のものが考えられるが、ここではオイラー座屈と横倒れ座屈を考える。前者は圧縮荷重、後者は主軸まわりの曲げモーメントによって、たわみの面内から面外、すなわち弱軸方向へ変形する現象で、ともに構造物の破壊につながるものである。

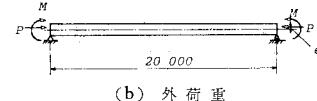
安全性の照査を強度、荷重それぞれに関する応力度  $f_R, f_S$  の形で行うとすると、破壊の条件式は、

$$Z = f_R - f_S \quad \dots \dots \dots (38)$$

ここで、 $f_R$  はオイラー座屈に対して、



(a) 断面形状



(b) 外荷重

図-9 I型断面はり

$$f_{R1} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \dots \dots \dots (39)$$

2軸対称で slender な断面に対する横倒れ座屈に対して、

$$f_{R2} = \frac{\pi^2}{2 l^2} \frac{I_y}{A_f + A_w/6} E \quad \dots \dots \dots (40)$$

ただし、 $E$  はヤング率、 $l$  はスパン長、 $\lambda$  は細長比、 $I_y$  は弱軸まわりの断面 2 次モーメント、 $A_f, A_w$  はそれぞれフランジ、ウェブの断面積を表す。

ここで、モデルとして図-9 に示すスパン長 20 m の I 型桁を考える。いま、簡単のために、強度のばらつきはヤング率  $E$  によると考え、その平均値を  $\mu_E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、変動係数を 0.1 とする。このとき、標準偏差  $\sigma_E$  は  $2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  となり、 $f_{R1}, f_{R2}$  は従属関係にあると考えられる。

次に、荷重としては図-9 (b) に示すように、偏心距離  $e$  を有する圧縮荷重  $P$  と曲げモーメント  $M$  を考え、互いに独立であるとする。このとき、圧縮荷重  $P$  によりオイラー座屈が生じ、 $M + P \cdot e$  という曲げモーメントにより横倒れ座屈が生じると考えられ、それぞれに対応する応力  $f_{S1}, f_{S2}$  は、

$$f_{S1} = \frac{P}{A} \quad \dots \dots \dots (41)$$

$$f_{S2} = \frac{M + P \cdot e}{I_x} \cdot \frac{d}{2} \quad \dots \dots \dots (42)$$

ここで、 $A$  は部材断面積、 $I_x$  は  $x$  軸まわりの断面 2 次モーメント、 $d$  は部材せいである。

いま、荷重  $P, M$  の平均値を  $\mu_P = 300 \text{ t}$ ,  $\mu_M = 100 \text{ tm}$  とし、変動係数をともに 0.2 とすると、標準偏差は  $\sigma_P = 60 \text{ t}$ ,  $\sigma_M = 20 \text{ tm}$  となる。また、偏心距離  $e$  の平均値  $\mu_e$  を 5 cm、標準偏差  $\sigma_e$  を 2 cm と仮定する。

確率変数  $E, P, M, e$  に関する基本変数をそれぞれ  $r, p, m, \tilde{e}$  とすると、破壊条件式はオイラー座屈に対して、

$$Z_1 = 212.0 r - 272.8 p + 756 \quad \dots \dots \dots (43)$$

横倒れ座屈に対して、

$$Z_2 = 304.1 r - \frac{100}{6.2} - \{20 m + (3 + 0.6 p)(5 + 2 e)\} + 1428 \quad \dots\dots\dots(44)$$

となる。

ここで、 $\beta_1$  は  $Z_1$  が 1 次式で与えられるので、簡単に求められるが、 $\beta_2$  は  $Z_2$  が非線形であるので、一般にはテラー展開を用いて線形式に直して求める必要がある。ここでは、Hasofer, Lind の定義に基づき、最短距離として求める。

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2.188, \quad \beta_2 = 2.592 \\ \vec{\beta}_1 &= \begin{pmatrix} -1.343 \\ 1.728 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1.717 \\ 0.337 \\ 1.821 \\ 0.583 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

相関係数は、 $\beta_1, \beta_2, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$  を用いて 0.509 と求まる。

次に、以上の数値を用いて、本方法と Vanmarcke の方法により全体の安全性指標  $\beta_{12}$  を求める。本方法を用いると、 $\beta_{12}=2.135$ 、Vanmarcke の方法では  $\beta_{12}=2.073$  となり、本方法は Vanmarcke の方法より大きな値を与える。これは前にも示したように、Vanmarcke の方法が同時破壊領域を小さめに評価しているためである。Vanmarcke の方法は、式 (32) の条件式から明らかのように、performance function が線形式（あるいは、同時破壊領域が凸領域）で与えられる場合には、 $\beta_{1,2}$  に対して本方法の上限を与えていていることになる。

## 5. 結 論

本論文では、土木構造物の安全性の評価尺度として、安全性指標に注目し、数式を用いその確率的構造を明らかとし、統計的不確定性の安全性指標への影響を考察した。また、Hasofer と Lind により提案された標準化空間における諸量の意味を明確にした。さらに、破壊点というものを定義し、それを用いることにより、破壊モードが多数存在する場合の安全性指標の計算法を提案した。

本論文で得られた結果を以下にまとめて示す。

(1) 安全性指標は本来は確定的な評価尺度であるが、Fiducial 統計学の考え方を用いることにより、確率量を考えることができ、情報量に関する統計的不確定性の安全性指標に及ぼす影響が評価できる。

(2) しかし、実際への適用という観点からは、1 次近似を用いて統計的不確定性を評価するのが便利である。データの個数による影響は遅減係数を導入することにより、ある程度考慮できる。

(3) Hasofer と Lind により提案された最短距離と

いう考え方を拡張することにより、多数の破壊モードが存在する場合の安全性指標の求め方を提案した。本方法は Vanmarcke の方法に比べて、大きめの値を与える。しかし、本方法で用いられている破壊点の概念は、performance function が非線形となる場合、あるいは 3 個以上の破壊モードから形成される同時破壊領域を評価する場合にも適用できると思われる。

(4) 構造物の安全性を評価するには、各パラメータ一間の相関および破壊モード間の相関を十分検討する必要がある。

(5) 破壊点の標準化空間における座標、つまり、不確定性を表す確率変数の比というものを考慮することにより、信頼性を考慮した設計法に対する有益な示唆が得られると思われる。

最後に本論文作成にあたり、貴重なご助言をいただいた中部工業大学の小西一郎教授に感謝の意を表します。

## 【付録 1】 $\cos \theta = \rho$ の関係式の誘導

はじめに破壊モードが 1 つの場合の安全性指標  $\beta$  およびそれに対応するベクトル  $\vec{\beta}$  について考える。一般に多次元空間で破壊面が超平面の場合には、破壊条件式  $Z$  は抵抗  $R_i$  ( $i=1 \sim m$ )、荷重  $S_j$  ( $j=1 \sim n$ ) の線形結合で表される。すなわち、

$$Z = \sum_{i=1}^m a_i R_i - \sum_{j=1}^n b_j S_j \quad \dots\dots\dots(A \cdot 1)$$

となる。ここで、 $a_i, b_j$  は定数

ここで、 $R_i, S_j$  に対する基本変数  $r_i, s_j$  を用いると、

$$Z = \sum_{i=1}^m a_i \sigma_{R_i} r_i - \sum_{j=1}^n b_j \sigma_{S_j} s_j + \left( \sum_{i=1}^m a_i \mu_{R_i} - \sum_{j=1}^n b_j \mu_{S_j} \right) \quad \dots\dots\dots(A \cdot 2)$$

となる。この  $(m+n)$  次元空間の超平面  $Z=0$  に対する原点からの垂線の長さ、および垂線の足の座標がそれぞれ  $\beta$  および  $\vec{\beta}$  の成分を表すので、

$$\beta = \frac{\left| \sum_{i=1}^m a_i \mu_{R_i} - \sum_{j=1}^n b_j \mu_{S_j} \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{j=1}^n b_j^2 \sigma_{S_j}^2}} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad \dots\dots\dots(A \cdot 3)$$

$$\vec{\beta} = \frac{-\left| \sum_{i=1}^m a_i \mu_{R_i} - \sum_{j=1}^n b_j \mu_{S_j} \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{j=1}^n b_j^2 \sigma_{S_j}^2}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_{R_1} \\ \vdots & \vdots \\ a_m & \sigma_{R_m} \\ -b_1 & \sigma_{S_1} \\ \vdots & \vdots \\ -b_n & \sigma_{S_n} \end{pmatrix} = -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z^2} \begin{pmatrix} a_1 & \sigma_{R_1} \\ \vdots & \vdots \\ a_m & \sigma_{R_m} \\ -b_1 & \sigma_{S_1} \\ \vdots & \vdots \\ -b_n & \sigma_{S_n} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(A \cdot 4)$$

となる。なお、式 (A·2) よりわかるように、破壊面  $Z$

$=0$  の勾配には、各変数の標準偏差が関係することがわかる。

次に、多数の破壊モードが存在する場合を考える。 $Z_p, Z_q$  という 2 つのモードに対して、式 (A・3), (A・4) より、

$$\vec{\beta}_p = -\frac{\mu_{Z_p}}{\sigma_{Z_p}^2} \begin{pmatrix} a_{1p} & \sigma_{R_1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{mp} & \sigma_{R_m} \\ -b_{1p} & \sigma_{S_1} \\ \vdots & \vdots \\ -b_{np} & \sigma_{S_n} \end{pmatrix}, \quad \beta_p = \frac{\mu_{Z_p}}{\sigma_{Z_p}} \dots (A \cdot 5)$$

$$\vec{\beta}_q = -\frac{\mu_{Z_q}}{\sigma_{Z_q}^2} \begin{pmatrix} a_{1q} & \sigma_{R_1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{mq} & \sigma_{R_m} \\ -b_{1q} & \sigma_{S_1} \\ \vdots & \vdots \\ -b_{nq} & \sigma_{S_n} \end{pmatrix}, \quad \beta_q = \frac{\mu_{Z_q}}{\sigma_{Z_q}} \dots (A \cdot 6)$$

となるので、2 つのベクトル  $\vec{\beta}_p, \vec{\beta}_q$  の交角  $\theta$  は、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\vec{\beta}_p, \vec{\beta}_q)}{|\vec{\beta}_p| \cdot |\vec{\beta}_q|} = \frac{\mu_{Z_p}/\sigma_{Z_p}^2 \cdot \mu_{Z_q}/\sigma_{Z_q}^2}{\beta_p \cdot \beta_q} \\ &\quad \cdot \left( \sum_{i=1}^m a_{ip} a_{iq} \sigma_{R_i}^2 + \sum_{j=1}^n b_{jp} b_{jq} \sigma_{S_j}^2 \right) \\ &= \frac{\sigma_{Z_p} \sigma_{Z_q}}{\sigma_{Z_p} \cdot \sigma_{Z_q}} = \rho_{pq} \dots (A \cdot 7) \end{aligned}$$

ただし、 $\sigma_{Z_p} \sigma_{Z_q} = \sum_{i=1}^m a_{ip} a_{iq} \sigma_{R_i}^2 + \sum_{j=1}^n b_{jp} b_{jq} \sigma_{S_j}^2$  は共分散を表す。

式 (A・7) より、交角  $\theta$  の余弦  $\cos \theta$  は破壊モード間の相関係数に等しいことがわかる。

#### 参考文献

- 1) 伊藤 学：構造設計における安全性の規範、土木学会誌、

- 第 60 卷 10 号、pp. 35~43、1975 年 8 月。
- 2) Cornell, C.A. : Structural Safety Specifications Based on Second-Moment Reliability Analysis, IABSE Symposium on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design", Final Report, London, England, pp. 235~245, 1969.
  - 3) Hasofer, A.M. and N.C. Lind : Exact and Invariant Second Moment Code Format, Proc. ASCE, EM 1, pp. 111~121, Feb. 1974.
  - 4) 藤本 照：統計数理の基礎と応用、日刊工業新聞社、pp. 171~174、1968 年 7 月。
  - 5) 藤野陽三：「測定値の誤差を考慮した信頼性設計」への討議、土木学会論文報告集、第 268 号、pp. 129~132、1977 年。
  - 6) たとえば、Moses, F. and D. Kinser : Analysis of Structural Reliability, Proc. ASCE, ST 5, pp. 147~164, Oct. 1967.
  - 7) Lind, N.C. : Formulation of Probabilistic Design, Proc. ASCE, EM 2, pp. 273~284, Apr. 1977.
  - 8) Stevenson, J. and F. Moses : Reliability Analysis of Frame Structures, Proc. ASCE, ST 11, pp. 2409~2427, Nov. 1970.
  - 9) Ang, A.H-S and C.A. Cornell : Reliability Bases of Structural Safety and Design, Proc. ASCE, ST 9, pp. 1755~1769, Sept. 1974.
  - 10) Vanmarcke, E.H. : Matrix Formulation of Reliability Analysis and Reliability-Based Design", Int. J. of Computers and Structures, Vol. 3, pp. 757~770, 1971.
  - 11) Shiraishi, N. and H. Furuta : Safety Analysis and Minimum-Weight Design of Rigid Frames Based on Reliability Concept", The Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ. Vol. 41, Part 4, pp. 474~497, Oct. 1979.
  - 12) 小西一郎編：鋼橋 基礎編 I, 丸善, p. 437, 1977 年 7 月。

(1979.6.12・受付)